

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-320-336

**Тензорная теория деформационной повреждаемости**

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин

**Тутышкин Николай Дмитриевич** — доктор технических наук, профессор, Управление научно-исследовательских работ; Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru*

**Травин Вадим Юрьевич** — кандидат технических наук, АО “НПО “Сплав” им. А. Н. Ганичева” (г. Тула).

*e-mail: travin.vu@mail.ru*

**Аннотация**

На основе физической концепции порообразования, зарождения и роста пор формулируются обобщенные определяющие соотношения тензорной модели пластической повреждаемости металлов, основанной на трех инвариантах. Мультипликативное разложение тензора метрического преобразования и термодинамическая формулировка определяющих соотношений приводят к симметричному тензору повреждаемости второго ранга с ясным физическим смыслом. Его первый инвариант определяет повреждаемость, связанную с пластической дилатансией материала вследствие роста пор, второй инвариант девиаторного тензора - повреждаемость, связанную с изменением формы дефектов, третий инвариант девиаторного тензора описывает влияние на повреждаемость вида напряженного состояния (угла Лоде), в том числе, влияние поворота главных осей тензора напряжения (изменение угла Лоде). Введение трех составляющих мер с соответствующим физическим смыслом позволяет отобразить кинетический процесс деформационной повреждаемости эквивалентным параметром в трехмерном векторном пространстве, включая критериальные условия для пластического разрушения. Мера пластической повреждаемости, основанная на трех инвариантах, может оказаться полезной для оценки качества мезоструктуры металлоизделий, получаемых методами обработки давлением.

*Ключевые слова:* основные уравнения, определяющие соотношения, пластичность, напряжения, деформации, физико-структурные параметры, повреждаемость, диссипация энергии, поверхность нагружения.

*Библиография:* 26 названий.

**Для цитирования:**

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин. Тензорная теория деформационной повреждаемости // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 320–336.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 539.374

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-320-336

**Tensor theory of deformation damage**

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin

**Tutyshkin Nikolai Dmitrievich** — doctor of technical sciences, professor, Department of Research; Tula State University (Tula).

*e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru*

**Travin Vadim Yuryevich** — candidate of technical sciences, JSC “NPO A. N. Ganichev “SPLAV” (Tula).

*e-mail: travin.vu@mail.ru*

**Abstract**

On the basis of the physical concept of pore formation, origin and growth of pores, generalized determining relations of the tensor model of plastic damage of metals based on three invariants are formulated. The multiplicative decomposition of the metric transform tensor and the thermodynamic formulation of the defining relations lead to a symmetric damage tensor of the second rank with a clear physical meaning. Its first invariant determines the damage associated with the plastic dilatance of the material due to pore growth, the second invariant of the deviant tensor - damage associated with a change in the shape of defects, the third invariant of the deviant tensor describes the effect on the damage of the type of stress state (Lode angle), including the effect of the rotation of the main axes of the stress tensor (change of the Lode angle). The introduction of three component measures with the corresponding physical meaning allows the kinetic process of deformation damage to be represented by an equivalent parameter in a three-dimensional vector space, including the criterion conditions for plastic destruction. A measure of plastic damage based on three invariants can be useful in assessing the quality of the mesostructure of metal products obtained by pressure treatment methods.

*Keywords:* basic equations, defining relation, plasticity, stresses, strains, physical and structural parameters, damage, energy dissipation, loading surface.

*Bibliography:* 26 titles.

**For citation:**

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin, 2022, “Tensor theory of deformation damage”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 320–336.

**1. Введение**

В работах [1, 2], на основе физической концепции роста и изменения формы пор при больших пластических деформациях, сформулированы потенциал диссипации и определяющие соотношения пластической повреждаемости металлов. Математическая структура потенциала диссипации соответствует термодинамически согласованной теории о мультипликативном разложении тензора метрического преобразования [3, 4]. Вводятся два набора внутренних переменных: пластические переменные (характеризующие дислокационную структуру) и переменные повреждаемости (описывающие размножение и рост микродефектов). Термодинамическая формулировка определяющих соотношений приводит к симметричному тензору повреждаемости второго ранга ( $\omega$ ) с ясным физическим смыслом.

Его первый инвариант ( $I_1(\omega) = \omega_k^k$ ) определяет повреждаемость, связанную с пластической дилатансией материала вследствие роста пор. А второй инвариант  $I_2(\tilde{\omega}) = (1/2)\tilde{\omega}_p^j\tilde{\omega}_j^p$  девиаторного тензора  $\tilde{\omega}$  (мера  $I_2^{1/2}(\tilde{\omega}) = [(1/2)\tilde{\omega}_p^j\tilde{\omega}_j^p]^{1/2}$ ) - повреждаемость, связанную с изменением формы дефектов. Введение двух нормированных параметров ( $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) с соответствующим физическим смыслом позволяет определить эквивалентную меру  $\omega_{eq}(\omega_1, \omega_2)$  деформационной повреждаемости, включая критериальные условия для пластического разрушения. Однако в этих работах не принимался во внимание третий инвариант  $I_3(\tilde{\omega}) = (1/3)\tilde{\omega}_k^j\tilde{\omega}_p^k\tilde{\omega}_j^p$  девиаторного тензора  $\tilde{\omega}$  (мера  $I_3^{1/3}(\tilde{\omega}) = [(1/3)\tilde{\omega}_k^j\tilde{\omega}_p^k\tilde{\omega}_j^p]^{1/3}$ ), который имеет такое же равноправное значение, как и первый ( $I_1(\omega)$ ) и второй ( $I_2(\tilde{\omega})$ ) инварианты. Совместное влияние трех инвариантов на пластическое разрушение подтверждается экспериментальными исследованиями ряда авторов [5-14]. Модель пластического разрушения, учитывающая зависимость как от гидростатического напряжения, так и от угла Лоде, основывается на использовании трехмерного годографа  $\varepsilon_{if}(\bar{\sigma}, \phi_\sigma)$ . Экспериментальные объемные диаграммы пластического разрушения  $\varepsilon_{if}(\bar{\sigma}, \phi_\sigma)$ , построенные на основе системы разнотипных опытов для ряда конструкционных металлических материалов, показывают зависимость предельной эквивалентной деформации  $\varepsilon_{eqf}$  от параметра трехосности напряженного состояния  $ST = \sigma_H/\sigma_{eq}$  и угла Лоде  $\phi_\sigma = (1/3)\arccos\left\{-3\sqrt{3}I_3(s)/2I_2^{3/2}(s)\right\}$ , где  $\sigma_H$  - гидростатическое напряжение,  $\sigma_{eq}$  - эквивалентное напряжение фон Мизеса,  $s$  - девиаторный тензор напряжения. Определяющие соотношения повреждаемости содержат материальные функции, определяемые экспериментальными методами. Их определение для изучаемых материалов в задаваемых условиях деформирования является, как правило, трудной экспериментальной задачей. Количественная оценка мер повреждаемости (степени деструкции) деформируемого материала и достоверное прогнозирование его пластического разрушения (предельного состояния повреждаемости) требует определения материальных функций на макро- и мезоуровнях в зависимости от инвариантных параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) и микроструктурных параметров материала. В этом отношении очень важное значение имеют работы с важными экспериментальными результатами [12, 15, 13, 1, 2].

Далее формулируются обобщенные определяющие соотношения тензорной модели деформационной повреждаемости металлических материалов при больших пластических деформациях, основанной на трех инвариантах. Вводятся три нормированные меры  $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$  ( $d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$ ), соответствующие трем инвариантам тензора скорости (приращения) поврежденности  $\dot{\omega}$  ( $d\omega$ ). Кинетический процесс деформационной повреждаемости отображается в трехмерном векторном пространстве (с ортонормированным базисом  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ) эквивалентным вектором  $d\vec{\omega}_{eq} = d\omega_1\vec{u}_1 + d\omega_2\vec{u}_2 + d\omega_3\vec{u}_3$ . Мера эквивалентной повреждаемости за конечный период времени  $t$   $\omega_{eq} = \int_t |d\vec{\omega}_{eq}|$ . По определяющим соотношениям проводились расчеты с использованием экспериментально определенных материальных функций пластической дилатансии и девиаторной деформации на мезоуровне, а также трехмерной диаграммы пластичности для малоуглеродистой низколегированной стали. Материальные функции определялись из опытов на растяжение, сжатие и сдвиг с использованием сканирующей электронной микроскопии, что позволило варьировать угол Лоде в полном диапазоне его значений  $0 \leq \phi \leq \pi/3$ . Для построения трехмерной диаграммы пластичности в диапазоне значений параметра трехосности напряженного состояния  $-1 \leq ST \leq 1$  и угла Лоде  $0 \leq \phi \leq \pi/3$  использовались как свои, так и систематизированные опубликованные экспериментальные данные. Сравнение расчетов показывает существенное влияние третьего инварианта (угла Лоде) на эквивалентную повреждаемость. Мера пластической повреждаемости, основанная на трех инвариантах, может оказаться полезной для оценки качества мезоструктуры металлоизделий, получаемых методами обработки давлением. Во многих процессах объемной штамповки деформируемый материал испытывает непропорциональное нагружение, сопровождающееся поворотом глав-

ных осей тензора напряжения и соответствующим изменением угла Лоде.

Рассмотрим используемые кинематические соотношения. Две точки зрения Эйлера и Лагранжа на описание кинематики сплошной среды используются в дальнейшем как равноправные и эквивалентные. Так как закон движения сплошной среды  $x_i = x_i(\xi_i, t)$  в независимых переменных Лагранжа  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно разрешить относительно этих переменных  $\xi_i = \xi_i(x_i, t)$ , т.е. перейти к независимым переменным Эйлера  $x_i$  и наоборот [14]. При этих преобразованиях соблюдается инвариантность закона движения сплошной среды (независимость от выбора системы координат).

Пластические деформации обрабатываемых металлов в технологических процессах ОМД достигают 70...90% и в  $\approx 10^2$  раз превосходят упругие деформации. Поэтому в определяющие соотношения входят только пластические деформации. Соответственно девиатор приращения деформации  $D_{de} = D_{de}^p$  и девиатор ее скорости  $D_{\dot{e}} = D_{\dot{e}}^p$ . Целесообразность использования модели жестко-пластического материала при анализе процессов ОМД обоснована в работах Р. Хилла [16], В.В. Соколовского [17], Л.М. Качанова [18], Д.Д. Ивлева [19]. В связи с определением деформаций на макро- и мезоуровнях вводятся в рассмотрение тензоры приращения деформации и ее скорости на макро-уровне:  $T_{de}, T_{\dot{e}}$  и мезоуровне:  $T_{d\bar{e}}, T_{\dot{\bar{e}}}$ . Соответствующими буквами будут обозначаться их (например, ковариантные) компоненты:  $d\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, d\bar{\varepsilon}_{ij}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$ , в том числе, шаровые  $d\varepsilon_{kk}, \dot{\varepsilon}_{kk}, d\bar{\varepsilon}_{kk}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{kk}$  и девиаторные  $de_{ij}, \dot{e}_{ij}, d\bar{e}_{ij}, \dot{\bar{e}}_{ij}$ , а также эквивалентные меры  $d\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, \varepsilon_i, d\bar{\varepsilon}_i, \dot{\bar{\varepsilon}}_i, \bar{\varepsilon}_i$ . Использование ковариантных компонент тензоров приращения деформации и ее скорости является удобным при формулировке основных соотношений для напряженно-деформированного состояния и повреждаемости. Ковариантные компоненты тензоров приращения деформации и ее скорости, определяемые в дальнейшем через компоненты метрического тензора, имеют ясный геометрический смысл. Для их определения и последующей формулировки определяющих соотношений тензорной модели пластической повреждаемости, в том числе обработки экспериментальных данных по пластическому деформированию опытных образцов, используются геометрические модели макро- и мезоэлементов [1, 2].

Для определения ковариантных компонент тензоров приращения деформации и ее скорости используются известные кинематические соотношения [20]. Применительно к изучаемой проблеме пластической повреждаемости эти кинематические соотношения были рассмотрены в работах [21, 22, 1]. Кратко приведем необходимые пояснения. Конфигурации макроэлемента позволяет определять большие деформации материала в процессах пластического течения тензором метрического преобразования

$$T_E = E^i_{\cdot j} \kappa_i \otimes \kappa^j = \overset{\circ}{E}{}^{ik} E_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j, \quad (1)$$

где  $\kappa_i$  - векторы базиса сопутствующей системы координат  $\xi_i$  (жестко связанной с деформируемым телом).

При описании больших пластических деформаций, характерных для технологических процессов, часто используется тензор логарифмических деформаций Генки:

$$T_{\varepsilon_{\ln}} = \frac{1}{2} \lg E = \frac{1}{2} (\ln E)^i_{\cdot j} \kappa_i \otimes \kappa^j = \varepsilon^i_{\cdot j} \kappa_i \otimes \kappa^j. \quad (2)$$

Для независимого определения симметричного тензора скорости деформации ( $T_{\dot{e}}$ ) используется несимметричная объективная норма Олдройда для тензора метрического преобразования  $T_{\dot{E}} = \overset{\circ}{g}{}^{ik} \dot{g}_{kj} \kappa_i \otimes \kappa_j$ . Тогда тензор скорости деформации:

$$T_{\dot{e}} = \frac{1}{2} T_E^{-1} T_{\dot{E}} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}{}^{ik} \dot{g}_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j = \dot{\varepsilon}^i_{\cdot j} \kappa_i \otimes \kappa^j \quad (3)$$

соответствует смешанному эквиваленту нормы тензора Альманси.

Многие процессы пластического деформирования характеризуются сложным (непропорциональным) нагружением деформируемого материала. Сложное (непропорциональное) нагружение, в соответствии с законом пластического течения, сопровождается поворотом главных осей тензора приращения деформации относительно сопутствующей системы координат  $\xi_i$  (жестко связанной с деформируемым телом). Это обстоятельство приводит к изображению пути деформации в пространстве  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  сложной траекторией ( $s$ ), не совпадающей с прямолинейной траекторией для простого нагружения. Эквивалентная (накапливаемая) деформация (параметр Одквиста) при сложном (непропорциональном) нагружении определяется интегрированием по пути деформации  $s$  [16]:

$$\varepsilon_i = \int_s \dot{\varepsilon}_i dt = \int_s d\varepsilon_i, \quad (4)$$

где эквивалентная скорость и приращение деформации

$$\dot{\varepsilon}_i = \sqrt{(2/3)(\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ji} - \dot{\varepsilon}_{ii}\dot{\varepsilon}_{jj})}, d\varepsilon_i = \sqrt{(2/3)(d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ji} - d\varepsilon_{ii}d\varepsilon_{jj})}. \quad (5)$$

Путь деформации оказывает влияние на годограф разрушения. А. Бенцера [23] убедительно показал это влияние при моделировании пластической деформации материала, содержащего периодическое распределение первоначально сферических пор.

На мезоуровне вводятся аналогичные кинематические соотношения [21, 22, 1]. Соответственно для мезоэлемента вводятся тензор метрического преобразования  $T_{\hat{\varepsilon}}$ , тензор логарифмических деформаций  $T_{\hat{\varepsilon}_{in}}$  и тензор скорости деформации  $T_{\dot{\hat{\varepsilon}}}$ . Рассеянные по макрообъему  $V_{<0:\textcircled{a}>}$  поры имеют различные исходные и текущие размеры и форму, а также положение главных осей. Поэтому экспериментальные измерения изменяющихся размеров совокупности пор в пределах макрообъема за период времени  $\Delta t$  приводят к рассеянным значениям тензора приращения деформации мезоэлементов  $T_{\Delta\hat{\varepsilon}} = T_{\dot{\hat{\varepsilon}}}\Delta t$  и, соответственно, их эквивалентной деформации  $\hat{\varepsilon}_i$ . В связи с этим возникает необходимость определения наиболее вероятных (модальных) значений величин  $\Delta\hat{\varepsilon}_{ij}$  и  $\hat{\varepsilon}_i$  по экспериментально определяемым распределениям величин  $\Delta\hat{\varepsilon}_{ij}$  и  $\hat{\varepsilon}_i$ . Модальные значения тензора  $T_{\Delta\hat{\varepsilon}}$  и, соответственно, интенсивности деформации  $\hat{\varepsilon}_i$  являются мерами, ассоциированными по отношению к  $N$ -совокупности пор

в пределах макроэлемента. Они будут также являться локальными характеристиками деформации макроэлемента на мезоуровне.

Кристаллическая структура деформированных металлов на каждой стадии пластической деформации характеризуется определенной плотностью и расположением дислокаций и микродефектов (микропор и микротрещин). Пластическая деформация связана с развитием дислокаций в кристаллической структуре, тогда как деформационная повреждаемость вызвана размножением и ростом микродефектов. Эти диссипативные процессы отчетливо различаются по своей природе и, что существенно, в том, как они влияют на макромеханические свойства металлоизделий, получаемых ОД. Следовательно, для моделирования процессов пластического формоизменения целесообразно вводить два набора внутренних переменных: пластические переменные (характеризующие дислокационную структуру) и переменные повреждаемости (описывающие размножение и рост микродефектов). В связи с этим для модели жестко-пластического повреждаемого материала используется следующее мультипликативное разложение тензора метрического преобразования  $E$ :

$$E = E_P E_d, E_P = \overset{\circ}{E}{}^{ik} \overset{*}{E}{}_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j, E_d = \overset{*}{E}{}^{ik} E_{kj} \kappa_i \otimes \kappa^j, \quad (6)$$

где  $E_{ij}^*$  - метрика основных векторов промежуточной конфигурации, которая представляет фиктивное состояние при фиксированных величинах внутренних переменных.

Составляющая  $E_p$  описывает пластическую деформацию, связанную с физическими механизмами скольжения; другая часть  $E_d$  описывает деформацию, связанную с диссипативным ростом и формоизменением мезоэлементов (оболочек с порой). Зависимость для тензора скорости деформации (3), с учетом мультипликативного разложения тензора метрического преобразования (6), принимает следующий вид:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} E_p^{-1} \dot{E}_p + \frac{1}{2} E^{-1} E_p \dot{E}_d = \dot{\varepsilon}_p + \dot{\varepsilon}_d. \quad (7)$$

Используемая идея деградации метрических коэффициентов, как соответствующих критериев развивающейся повреждаемости, была обоснована в работе [3]. Следуя работе Баммана и Солянки [4], вводятся эффективные неповрежденные конфигурации, которые характеризуют поведение фиктивного неповрежденного материала. Представленное отображение аналогично принципу эквивалентной деформации, означающего, что любое определяющее уравнение в деформациях для поврежденного материала может быть получено таким же образом, как и для неповрежденного материала, за исключением того, что обычное напряжение заменяется эффективным напряжением [22]. Эффективное напряжение было определено Ю.Н. Работновым как напряжение, отнесенное к поверхности, которая эффективно сопротивляется нагрузке (т.е. к эффективной площади сечения, которая снижается из-за образования пор) [24].

Необходимым условием обоснованности определяющих соотношений деформационной повреждаемости является их термодинамическая согласованность. Определяющие соотношения для внутренних переменных ( $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{r}, \dot{\omega}_{ij}$ ) следуют из потенциала диссипации ( $F$ ), являющегося выпуклой функцией ассоциированных переменных ( $-s_{ij}, R, -Y_{ij}$ ) (Таблица). Из второго закона термодинамики (неравенства Клаузиуса-Дюгема) следует условие выпуклости потенциала диссипации в пространстве ассоциированных переменных:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial s_{ij}}, \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R}, \dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y_{ij}}, \quad (8)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  - компоненты девиаторного тензора скорости деформации  $\dot{\varepsilon}$  (на макроуровне);  $\dot{r}$  - параметр изотропного упрочнения;  $\dot{\omega}_{ij}$  - компоненты тензора скорости повреждаемости  $\dot{\omega}$ ;  $s_{ij}$  - компоненты девиаторного тензора напряжения  $s$ ;  $R$  - параметр напряжений при изотропном упрочнении;  $Y_{ij}$  - компоненты тензора  $Y$ , характеризующего скорость высвобождения плотности энергии, связанной с ростом и изменением формы пор;  $\dot{\lambda}$  - пластический множитель.

Согласно опубликованным качественным экспериментам [1, 2], потенциал  $F$  строится в виде суммы:

$$F = \Phi + \Omega, \quad (9)$$

где  $\Phi$  - пластический потенциал;  $\Omega$  - потенциал повреждаемости.

Соотношения (8) с учетом (9) принимают следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}}, \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}}. \quad (10)$$

Следуя Л.М. Качанову [18] в качестве пластического потенциала  $\Phi$  принимается функция текучести Мизеса:

$$f(s_{ij}, R) = (1/2) s_{ij} s_{ji} - \tau_y^2 = 0, \tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}, \quad (11)$$

где  $\tau_y, \sigma_y$  - соответственно, предел текучести при сдвиге и при одноосном состоянии.

Таблица 1: Переменные состояния и диссипативные функции

Внутренние переменные состояния	Ассоциированные переменные	Диссипативные функции
Девиаторный тензор скорости пластической деформации, $\dot{\epsilon}$	Девиаторный тензор напряжения, $-s$	Диссипация, вызванная пластической энергией формоизменения, $\dot{w}_p = s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$
Параметр изотропного упрочнения, $\dot{r}$	Параметр напряжений при изотропном упрочнении, $R$	Скорость изменения плотности накопленной энергии, $\dot{w}_s = R\dot{r}$
Тензор скорости повреждения, $\dot{\omega}$	Тензор скорости высвобождения плотности энергии, $-Y$	Диссипация, вызванная повреждаемостью, $\dot{w}_D = Y_{ij}\dot{\omega}_{ij}$

Пластический множитель

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\dot{\epsilon}_i}{\tau_y}, \quad (12)$$

где  $\dot{\epsilon}_i = \sqrt{(2/3) \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ji}}$  - скорость эквивалентной деформации на макроуровне (отнесенной к макроэлементу пластической среды).

При определении НДС будем учитывать изотропное упрочнение, характерное для больших пластических деформаций при обработке давлением. Сопряженной силой изотропного упрочнения является параметр напряжений  $R = \sqrt{(1/2) s_{ij} s_{ji}} = \tau_y$ . Параметр  $R$  определяет изменение радиуса цилиндра пластичности, описываемого уравнением (12) в пространстве главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ). Параметр изотропного упрочнения

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial [(1/2) s_{ij} s_{ji} - \tau_y^2]}{\partial (\tau_y)} = 2\dot{\lambda} \tau_y = \dot{\epsilon}_i \sqrt{3}. \quad (13)$$

Потенциал повреждаемости порами  $\Omega$  для модели жестко-пластического тела определяет диссипацию, связанную с пластической дилатансией вследствие роста объема пор и изменения формы мезоэлементов. Скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с ростом поры, является квадратичной функцией первого инварианта  $I_1 \left( \dot{\hat{\epsilon}} \right)$  тензора скорости деформации  $\dot{\hat{\epsilon}}$  мезоэлемента:

$$\dot{w}_v = \hat{\sigma}_H \dot{\hat{\epsilon}}_{kk} = \frac{1}{3\dot{\lambda}} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_{kk} \right)^2 = \frac{1}{3\dot{\lambda}} I_1^2 \left( \dot{\hat{\epsilon}} \right) = \frac{1}{3\dot{\lambda}} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_{11} + \dot{\hat{\epsilon}}_{22} + \dot{\hat{\epsilon}}_{33} \right)^2, \quad (14)$$

где  $\hat{\sigma}_H$  - гидростатическое напряжение;  $\hat{\epsilon}_{kk}, k = 1, 2, 3$  - линейные компоненты тензора  $T_{\hat{\epsilon}}$ .

Используемая связь  $\dot{\hat{\epsilon}}_{kk} = 3\dot{\lambda} \hat{\sigma}_H$  на мезоуровне соответствует условию текучести Р. Грина [25]:

$$AI_2(\hat{s}) + BI_1^2(\hat{\sigma}) = \tau_y^2, \quad (15)$$

где  $A, B$  - материальные функции;  $\hat{\sigma}, \hat{s}$  - тензор и девиаторный тензор напряжений;  $\tau_y$  - предел текучести сплошного материала (при  $f = 0$ ).

Скорость дилатансии, ассоциированная с условием текучести Р. Грина:

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{18B}{A} \frac{\sqrt{I_2(\dot{\hat{e}})}}{\sqrt{I_2(\hat{s})}} \hat{\sigma}_H = \frac{18B}{A} \dot{\lambda} \hat{\sigma}_H. \quad (16)$$

Скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с изменением формы поры, является линейной функцией второго инварианта  $I_2(\dot{\hat{e}})$  девиаторного тензора скорости деформации  $\dot{\hat{e}}$  мезоэлемента:

$$\dot{w}_{sh} = \hat{s}_{ij} \dot{\hat{e}}_{ij} = \frac{1}{\lambda} \dot{\hat{e}}_{ij} \dot{\hat{e}}_{ji} = \frac{2}{\lambda} I_2(\dot{\hat{e}}) = \frac{3}{2\lambda} \dot{\varepsilon}_i^2 \quad (17)$$

где  $\hat{s}_{ij}$ ,  $\dot{\hat{e}}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  - компоненты девиаторных тензоров  $\hat{s}$  и  $\dot{\hat{e}}$ .

Рассеянные по макрообъему  $V_{<0;\textcircled{a}>}$  поры имеют различные исходные и текущие размеры и форму, а также положение главных осей. Поэтому экспериментальные измерения изменяющихся размеров совокупности пор в пределах  $V_{<0;\textcircled{a}>}$  за период времени  $\Delta t$  приводят к рассеянным значениям тензора приращения деформации мезоэлементов  $\Delta \hat{\varepsilon} = \dot{\hat{e}} \Delta t$ , девиаторного тензора  $\Delta \hat{e} = \dot{\hat{e}} \Delta t$  и, соответственно, их инвариантов  $I_1(\Delta \hat{\varepsilon})$ ,  $I_2(\Delta \hat{e})$ . В связи с этим возникает необходимость определения наиболее вероятных (модальных) значений функций  $I_1^2(\Delta \hat{\varepsilon})$ ,  $I_2(\Delta \hat{e})$  по экспериментально определяемым распределениям величин  $I_1^2(\Delta \hat{\varepsilon})$ ,  $I_2(\Delta \hat{e})$ . Модальные значения тензоров  $\Delta \hat{\varepsilon}$ ,  $\Delta \hat{e}$  являются мерами приращения деформации, ассоциированными по отношению к  $N$ -совокупности пор в пределах макроэлемента пластической среды. Они будут также являться локальной характеристикой приращения деформации макрообъема на мезоуровне. Потенциал повреждаемости порами, с учетом соблюдения одинаковой размерности с пластическим потенциалом  $\Phi \equiv f(s_{ij}, R) = (1/2) s_{ij} s_{ji} - \tau_Y^2$ ,

$$\Omega = \frac{1}{2\lambda} (\dot{w}_v + \dot{w}_{sh}) = \frac{1}{2\lambda^2} \left( \frac{1}{3} I_1^2(\dot{\hat{e}}) + 2I_2(\dot{\hat{e}}) \right) = \frac{1}{2\lambda^2} \left( \frac{1}{3} (\dot{\varepsilon}_{kk})^2 + \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ji} \right). \quad (18)$$

Тензор  $Y$  характеризует скорость высвобождения плотности энергии, связанной с ростом и изменением формы мезоэлементов, и является линейной функцией тензора скорости деформации мезоэлементов:

$$Y_{ij} = k_Y \frac{1}{\lambda} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (19)$$

где  $k_Y$  - нормирующий множитель.

Зависимость (18), с учетом линейной функции тензора скорости деформации мезоэлементов (19), принимает следующий вид:

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}} = \frac{\dot{\lambda}}{k_Y^2} Y_{ij} = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{k_Y} \quad (20)$$

где  $Y_{kk}$  - шаровые компоненты тензора  $Y$ ;  $\tilde{Y}_{ij}$  - компоненты девиаторного тензора  $\tilde{Y}$ .

Потенциал повреждаемости (20) и ассоциированная переменная в виде  $Y_{ij} = \left( k_Y / \dot{\lambda} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}$ , в соответствии с третьим уравнением (10), определяют тензор скорости повреждаемости  $\dot{\omega}$ :

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}} = \frac{\dot{\lambda}}{k_Y^2} Y_{ij} = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{k_Y}. \quad (21)$$

Условие выпуклости потенциала диссипации  $F$  в пространстве ассоциированных переменных приводит к условию выпуклости потенциала  $\Omega$  в пространстве ассоциированной переменной  $-Y_{ij}$ .

Разложим тензор приращения поврежденности  $d\omega$  на шаровый тензор  $tr d\omega = d\omega_k^k$  и девиаторный тензор  $dev d\omega = d\omega - (1/3)tr d\omega = d\tilde{\omega}$ , где  $d\omega_{kk}$  - первый инвариант тензора  $d\omega$ . Девиаторный тензор скорости повреждаемости  $\dot{\tilde{\omega}}$  имеет два инварианта (второй  $I_2(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/2)\dot{\tilde{\omega}}_p^j \dot{\tilde{\omega}}_j^p$  и третий  $I_3(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/3)\dot{\tilde{\omega}}_k^j \dot{\tilde{\omega}}_p^k \dot{\tilde{\omega}}_j^p$ ), вообще говоря, отличные от нуля. В соответствии с дифференциальным уравнением (21), инварианты тензора скорости повреждаемости  $\dot{\omega}$  являются линейными функциями соответствующих инвариантов тензора скорости мезодеформаций  $\dot{\tilde{\epsilon}}$ :

$$I_1(\dot{\omega}) = \dot{\omega}_k^k = \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_k^k}{k_Y}, I_2(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/2)\dot{\tilde{\omega}}_p^j \dot{\tilde{\omega}}_j^p = \frac{(1/2)\dot{\tilde{\epsilon}}_p^j \dot{\tilde{\epsilon}}_j^p}{k_Y^2},$$

$$I_3(\dot{\tilde{\omega}}) = (1/3)\dot{\tilde{\omega}}_k^j \dot{\tilde{\omega}}_p^k \dot{\tilde{\omega}}_j^p = \frac{(1/3)\dot{\tilde{\epsilon}}_k^j \dot{\tilde{\epsilon}}_p^k \dot{\tilde{\epsilon}}_j^p}{k_Y^3}. \quad (22)$$

В соответствии с зависимостями (22), разложение тензора приращения поврежденности  $d\omega$  на шаровый и девиаторный тензор, а также их инварианты имеют ясный физический смысл. Первый инвариант  $I_1(d\omega) = d\omega_k^k = \dot{\omega}_k^k dt$  описывает приращение поврежденности, связанное с изменением объема пор. Второй инвариант  $I_2(d\tilde{\omega})$  девиатора  $d\tilde{\omega}$  (линейная мера  $I_2^{1/2}(d\tilde{\omega}) = [(1/2)d\tilde{\omega}_p^j d\tilde{\omega}_j^p]^{1/2} = [(1/2)\dot{\tilde{\omega}}_p^j \dot{\tilde{\omega}}_j^p]^{1/2} dt$ ) описывает приращение поврежденности, связанное с изменением формы пор. Третий инвариант  $I_3(d\tilde{\omega})$  (линейная мера  $I_3^{1/3}(d\tilde{\omega}) = [(1/3)d\tilde{\omega}_k^j d\tilde{\omega}_p^k d\tilde{\omega}_j^p]^{1/3} = [(1/3)\dot{\tilde{\omega}}_k^j \dot{\tilde{\omega}}_p^k \dot{\tilde{\omega}}_j^p]^{1/3} dt$ ), как выясним дальше, описывает влияние фазового угла девиатора (угла Лоде  $\phi_{\dot{\tilde{\omega}}}$ ) на развитие (торможение) процесса повреждаемости. Подобное представление кинетического процесса повреждаемости позволяет ввести для его оценки три меры ( $d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3$ ), соответствующие трем приведенным инвариантам. Следующие меры ( $d\omega_1$  и  $d\omega_2$ ), соответствующие приведенному первому и второму инвариантам, были введены и использовались в расчетах деформационной повреждаемости и пластического разрушения [21, 1, 2]:

$$d\omega_1 = I_1(d\omega) = I_1(\dot{\omega}) dt = \dot{\omega}_k^k dt = \frac{I_1(\dot{\tilde{\epsilon}})}{k_Y} dt = \frac{\dot{\tilde{\epsilon}}_k^k}{k_Y} dt,$$

$$d\omega_2 = \sqrt{6}I_2^{1/2}(d\tilde{\omega}) = \sqrt{6}I_2^{1/2}(\dot{\tilde{\omega}}) dt = \left(3d\tilde{\omega}_p^j d\tilde{\omega}_j^p\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{6}I_2^{1/2}(\dot{\tilde{\epsilon}})}{k_Y} = \frac{\left(3\dot{\tilde{\epsilon}}_p^j \dot{\tilde{\epsilon}}_j^p\right)^{1/2}}{k_Y} dt, \quad (23)$$

где  $\sqrt{6}$  - коэффициент термодинамической эквивалентности (соответствия) мер  $d\omega_2$  и  $d\omega_1$ , значение которого соответствует структуре потенциала  $\Omega$ .

Меры  $d\omega_2$  и  $d\omega_1$  связаны со структурой термодинамического потенциала  $\Omega$ , так как соответствующие им инварианты  $I_1^2(\dot{\tilde{\epsilon}})$  и  $I_2(\dot{\tilde{\epsilon}})$  определяют скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с объемной деформацией ( $\hat{w}_v$ ) и деформацией формоизменения ( $\hat{w}_{sh}$ ) мезоэлементов в пределах  $RVE$ . Соотношение  $\hat{w}_{sh} / \hat{w}_v = (d\omega_2)^2 / (d\omega_1)^2 = 6I_2(\dot{\tilde{\epsilon}}) / I_1^2(\dot{\tilde{\epsilon}})$  выполняется только при коэффициенте термодинамической эквивалентности мер, равном  $\sqrt{6}$ .

Из связи мер  $d\omega_1$  и  $d\omega_2$  со структурой термодинамического потенциала  $\Omega$  через соответствующие им инварианты  $I_1^2(\dot{\tilde{\epsilon}})$  и  $I_2(\dot{\tilde{\epsilon}})$  следует, что компоненты  $\dot{\tilde{\epsilon}}_k^k$  и  $\dot{\tilde{\epsilon}}_p^j$  шарового и девиаторного тензора скорости мезодеформаций являются действительными аргументами по отношению к мерам  $d\omega_1$  (или  $\dot{\omega}_1$ ) и  $d\omega_2$  (или  $\dot{\omega}_2$ ). Соответствующий мере  $d\omega_3$  третий инвариант

$I_3(\dot{\epsilon})$  дивизора скорости мезодеформаций не является количественной мерой деформации, не определяет скорость изменения плотности энергии мезоэлемента, связанной с объемной деформацией или деформацией формоизменения мезоэлементов, и, соответственно, не входит в структуру потенциала  $\Omega$ . В этом смысле компоненты  $\dot{\epsilon}_{\cdot p}^j$  скорости мезодеформаций не могут быть действительным аргументом по отношению к мере  $d\omega_3$  (или  $\dot{\omega}_3$ ). Компоненты  $\dot{\epsilon}_{\cdot p}^j$  являются мнимым аргументом по отношению к мере  $d\omega_3$  (или  $\dot{\omega}_3$ ):

$$d\omega_3 = \frac{\sqrt{6}[(1/3)i\dot{\epsilon}_{\cdot k}^j i\dot{\epsilon}_{\cdot p}^k i\dot{\epsilon}_{\cdot j}^p]}{k_Y} dt = \frac{\sqrt{6}iI_3^{1/3}(\dot{\epsilon})}{k_Y} dt = \sqrt{6}iI_3^{1/3}(\dot{\omega}) dt \quad (24)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

Введем вектор приращения эквивалентной повреждаемости  $d\vec{\omega}_{eq}$  в трехмерном комплексном векторном пространстве с ортонормированным базисом  $u_1, u_2, u_3$ :

$$d\omega_{eq} = |d\omega_{eq}| = d\omega_1 u_1 + d\omega_2 u_2 + d\omega_3 u_3 \quad (25)$$

Его модуль является мерой приращения эквивалентной повреждаемости за период времени  $dt$ :

$$\begin{aligned} d\omega_{eq} &= \left[ (d\omega_1)^2 + (d\omega_2)^2 + (d\omega_3)^2 \right]^{1/2} = \left[ I_1^2(\dot{\omega}) + 6(I_2(\dot{\omega}) + i^2 I_3^{2/3}(\dot{\omega})) \right]^{1/2} dt = \\ &= \left[ I_1^2(\dot{\epsilon}) + 6(I_2(\dot{\epsilon}) - I_3^{2/3}(\dot{\epsilon})) \right]^{1/2} \frac{dt}{k_Y} \quad (26) \end{aligned}$$

Накопленная повреждаемость за конечный период времени  $t$ :

$$\omega_{eq} = \int_t \dot{\omega}_{eq} dt = \int_{\omega_{eq}} d\omega_{eq}. \quad (27)$$

Для выяснения физического смысла меры  $d\omega_3$  используем известную зависимость для угла Лоде  $\phi_{\dot{\epsilon}}$ [18]:

$$\frac{3\sqrt{3}I_3(\dot{\epsilon})}{2I_2^{3/2}(\dot{\epsilon})} = -\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}}. \quad (28)$$

Зависимости (24) и (26), с учетом известной функции угла Лоде, принимают следующий вид:

$$d\omega_3 = -\left(4\sqrt{2}\right)^{1/3} i \frac{I_2^{1/2}(\dot{\epsilon})}{k_Y} (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{1/3} dt, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} d\omega_{eq} &= [d\omega_v^2 + d\tilde{\omega}^2]^{1/2} = [\dot{\omega}_v^2 + \dot{\omega}^2]^{1/2} dt = \left[ I_1^2(\dot{\epsilon}) + 6 \left( I_2(\dot{\epsilon}) - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} I_2(\dot{\epsilon}) (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2} \frac{dt}{k_Y} = \\ &= \left[ \left( \dot{\epsilon}_{\cdot k}^k \right)^2 + \frac{9}{2} \dot{\epsilon}_{eq}^2 \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2} \frac{dt}{k_Y}, \quad (30) \end{aligned}$$

где  $d\omega_v = d\omega_1$  - приращение повреждаемости, описываемое шаровым тензором  $tr d\omega$ ;  $d\tilde{\omega} = (d\omega_2^2 + d\omega_3^2)^{1/2}$  - приращение повреждаемости, описываемое дивизорным тензором  $dev d\omega = d\omega - (1/3) tr d\omega = d\tilde{\omega}$ .

Положительная инвариантная величина  $f(\phi_{\dot{\epsilon}}) = \left( 1 - (\sqrt[3]{4}/3) (\cos 3\phi_{\dot{\epsilon}})^{2/3} \right)^{1/2}$  ( $\approx 0.686 \leq f(\phi_{\dot{\epsilon}}) \leq 1$ ) учитывает влияние на повреждаемость фазового угла дивизора скорости мезодеформаций (угла Лоде  $\phi_{\dot{\epsilon}}$ ), связанного с третьим инвариантом  $I_3(\dot{\epsilon})$  зависимостью (29). Фазовый угол дивизора определяет вид деформированного состояния мезоэлемента (рис. 1).

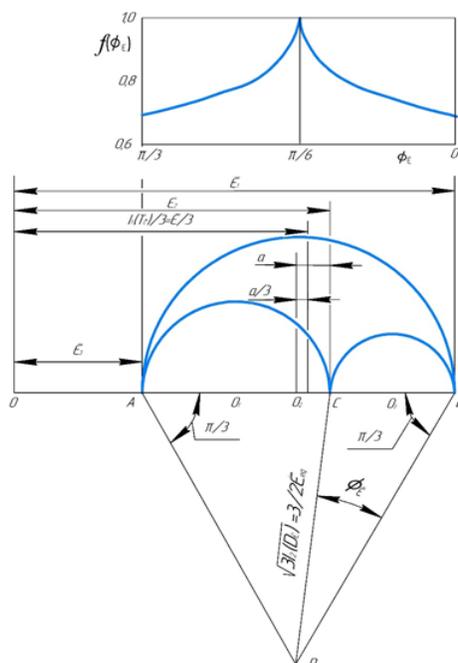


Рис 1: Изображение инвариантных функций ( $I_1(D_{\dot{\varepsilon}})$ ,  $\sqrt{I_2(D_{\dot{\varepsilon}})}$ ,  $\phi_{\dot{\varepsilon}}$ ,  $f(\phi_{\dot{\varepsilon}})$ ) мезодеформаций на диаграмме Мора

При растяжении ( $\phi_{d\omega} = \phi_{\dot{\omega}} = \pi/3$ ) поры приобретают вытянутую эллипсоидальную форму, при сжатии ( $\phi_{d\omega} = \phi_{\dot{\omega}} = 0$ ) – форму сплюснутого эллипсоида. При деформации сдвигом ( $\phi_{d\omega} = \phi_{\dot{\omega}} = \pi/6$ ) поры приобретают форму эллипсоида, главные оси которого оказываются повернутыми относительно главных осей деформации. Согласно зависимости  $f(\phi_{\dot{\varepsilon}})$  (рис. 1), наибольшее влияние угла Лоде  $\phi_{\dot{\varepsilon}}$  (или  $\phi_{\dot{\omega}}$ ) на замедление кинетического процесса повреждаемости происходит при одноосном напряженно-деформированном состоянии. При плоском деформированном состоянии ( $\phi_{\dot{\omega}} = \pi/3$ ) это влияние отсутствует. Актуальной является задача анализа процесса повреждаемости при непропорциональном нагружении, когда происходит поворот главных осей тензоров  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\omega}$  относительно собственных лагранжевых координат  $\xi^k$  (жестко связанных с деформируемым материалом), и параметры  $\phi_{\dot{\varepsilon}}$ ,  $\phi_{\dot{\omega}}$  будут, вообще говоря, изменяться. В соответствии с зависимостью (30), интегральные параметры  $\omega_v, \tilde{\omega}$

$$\omega_v = \int_t \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^k \cdot k}{k_Y} dt = \int_{\bar{\varepsilon}^k \cdot k} \frac{d\bar{\varepsilon}^k \cdot k}{k_Y}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_t \dot{\bar{\varepsilon}}_{eq} \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\bar{\varepsilon}})^{2/3} \right)^{1/2} \frac{dt}{k_Y} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{\bar{\varepsilon}_{eq}} \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\bar{\varepsilon}})^{2/3} \right)^{1/2} \frac{d\bar{\varepsilon}_{eq}}{k_Y} \quad (31)$$

образуют действительное векторное подпространство (действительную плоскость, выделяемую в ранее введенном комплексном векторном пространстве для параметров  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) и позволяют определить эквивалентную повреждаемость, как текущую длину дуги повреждаемости  $s_\omega$  (рис. 2):

$$\omega_{eq} = \int_{s_\omega} ds_\omega, \quad (32)$$

где элемент дуги  $ds_\omega$  определяется как модуль вектора приращения эквивалентной повреждаемости  $ds_\omega = d\omega_{eq} = |d\omega_{eq}| = (\dot{\omega}_v^2 + \dot{\tilde{\omega}}^2)^{1/2} dt = (d\omega_v^2 + d\tilde{\omega}^2)^{1/2}$ .

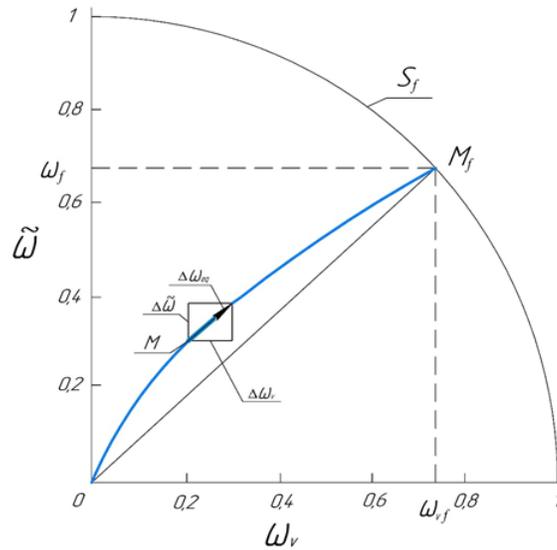


Рис 2: Отображение эквивалентной повреждаемости  $\omega_{eq}$  в фазовой плоскости  $\omega_v, \tilde{\omega}$

Отображение кинетического процесса роста повреждаемости в плоскости  $\omega_v, \tilde{\omega}$  криволинейной траекторией  $s_\omega$  (рис. 2) характерно для непропорционального роста мезодеформаций при непропорциональном нагружении, когда происходит поворот главных осей тензора напряжений и, в соответствии с законом пластического течения  $(10)_1$ , тензора приращения деформаций, а также (в соответствии с соотношением  $(10)_3$ ), и тензора приращения повреждаемости относительно материальных слоев деформируемого тела. Угол Лоде, как фазовый угол девиаторного тензора, существенно изменяется при непропорциональном нагружении, так как изменяется и соотношение между главными компонентами тензора (точка С на диаграмме Мора перемещается и угол  $\phi$  изменяется, рис. 1). Процесс непропорционального роста повреждаемости удобно рассматривать состоящим из нескольких этапов, в пределах каждого из которых параметры  $\omega_v$  и  $\tilde{\omega}$  растут пропорционально. Эта процедура эквивалентна замене дуги повреждаемости  $OM_f$  хордовой линией, а интеграла (32) суммой

$$\omega_{eq} = \int_{s_\omega} ds_\omega = \sum_{j=1}^m \Delta\omega_{eqj}, \Delta\omega_{eqj} = (\Delta\omega_{vj}^2 + \Delta\tilde{\omega}_j^2)^{1/2}, \quad (33)$$

где  $\Delta\omega_{vj}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_j$ ,  $\Delta\omega_{eqj}$  - приращения мер на  $j$ -м этапе.

При пропорциональном росте повреждаемости фазовый угол девиаторов  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\omega}$  (углы Лоде  $\phi_{\dot{\varepsilon}}$  и  $\phi_{\dot{\omega}}$ ) не изменяется, так как компоненты тензоров  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\omega}$  изменяются пропорционально параметру, определяющему процесс деформации (повреждаемости), и поворота главных осей тензоров  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\omega}$  не происходит. В этом случае процесс повреждаемости отображается в плоскости параметров  $\omega_v, \tilde{\omega}$  прямолинейной траекторией  $OM_f$  (рис. 2), и эквивалентная мера повреждаемости в текущий момент

$$\omega_{eq} = |d\omega_{eq}| = \sqrt{\omega_v^2 + \tilde{\omega}^2}, \quad (34)$$

где интегральные зависимости (31) для компонент  $\omega_v$  и  $\tilde{\omega}$  имеют конечную форму:

$$\omega_v = \frac{\bar{\varepsilon}_{\cdot k}^k}{k_Y}, \tilde{\omega} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\bar{\varepsilon}_{eq}}{k_Y} \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\varepsilon}})^{2/3} \right)^{1/2}. \quad (35)$$

В качестве нормирующего множителя  $k_Y$  принимается следующая интегральная величина к моменту макроразрушения  $t_f$ :

$$k_Y = \int_{t_f} \left[ \left( \dot{\varepsilon}_{\cdot k}^k \right)^2 + \frac{9}{2} \dot{\varepsilon}_{eq}^2 \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\varepsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2} dt \quad (36)$$

или при пропорциональном нагружении

$$k_Y = \left[ \left( \dot{\varepsilon}_{\cdot kf}^k \right)^2 + \frac{9}{2} \bar{\varepsilon}_{eqf}^2 \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{3} (\cos 3\phi_{\dot{\varepsilon}})^{2/3} \right) \right]^{1/2}, \quad (37)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{\cdot kf}^k, \bar{\varepsilon}_{eqf}$  - объемная эквивалентная девиаторная деформация МЕ к моменту разрушения.

## 2. Заключение

Прогнозирование пластической повреждаемости является очень существенным технологическим фактором, особенно при изготовлении металлоизделий с качественной мезоструктурой и высокими эксплуатационными свойствами (испытывающих интенсивные силовые нагрузки, высокие скорости деформации, физико-химические воздействия). Повреждаемость металлов при больших конечных пластических деформациях связана главным образом с образованием, ростом и коалесценцией пор. При больших пластических деформациях в направлении полос сдвига происходит коалесценция пор с образованием пустот большого размера. В свою очередь эти пустоты являются источниками полос локализованной деформации и могут приводить к пластическому разрушению материала [26]. Мера деформационной повреждаемости во многих работах связывается с объемной фракцией пор (или пластической дилатансией вследствие изменения объемной фракции пор). Момент макроразрушения связывается с достижением критической величины объемной фракции пор (пластической дилатансии). Подобные модели вполне удовлетворительно описывают развитие повреждаемости в процессах с умеренным пластическим формоизменением материала (небольшими девиаторными деформациями), в которых происходит в основном изменение объема пор (но не их формы). Во многих технологических процессах пластического формоизменения обрабатываемый металл испытывает большие по величине девиаторные деформации. Поры при больших пластических деформациях приобретают вытянутую или сплюснутую, в зависимости от напряженно-деформированного состояния, эллипсоидальную форму. При этом пространственная ориентация главных осей мезоэллипсоида оказывается связанной с направлениями главных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  малой частицы материала, содержащей пору (мезоэлемента, представляющего собой материальную оболочку с одной порой). Таким образом металлические материалы обладают тензорными свойствами деформационной повреждаемости. Экспериментальные

исследования свидетельствуют о существенном влиянии изменения формы пор на развитие деформационной повреждаемости и пластическое разрушение материала. Неучёт тензорных свойств повреждаемости, особенно при больших конечных пластических деформациях, может приводить к существенным погрешностям при решении прикладных задач. Переменные повреждаемости должны иметь не только ясный физический смысл, но и четкую математическую формулировку. Термодинамическая формулировка определяющих соотношений приводит к симметричному тензору повреждаемости второго ранга ( $\omega$ ) с ясным физическим смыслом. Его первый инвариант определяет повреждаемость, связанную с пластической дилатансией материала вследствие роста пор, второй инвариант девиаторного тензора - повреждаемость, связанную с изменением формы дефектов, третий инвариант девиаторного тензора описывает влияние на повреждаемость вида напряженного состояния (угла Лоде), в том числе, влияние поворота главных осей тензора напряжения (изменение угла Лоде). Введение трех составляющих мер с соответствующим физическим смыслом позволяет отобразить кинетический процесс деформационной повреждаемости эквивалентным параметром в трехмерном векторном пространстве, включая критериальные условия для пластического разрушения. Мера пластической повреждаемости, основанная на трех инвариантах, является полезной для оценки качества мезоструктуры металлоизделий, получаемых методами обработки давлением.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. CityTutyshkin N.D., Мьller W.H., Wille R., Zapara M.A. Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments // International Journal of Plasticity. 2014. Vol. 59. P. 133–151.
2. Tutyshkin N.D., Lofink P., Мьller W.H., Wille R., Stahn O. Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants // International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2017. Vol. 29. № 1. P. 251-269.
3. Вьгнig M. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics // International Journal of Plasticity. 2003. Vol. 19. P. 1679–1713.
4. Bammann D.J., Solanki K.N. On kinematic, thermodynamic, and kinetic coupling of a damage theory for polycrystalline material // International Journal of Plasticity. 2010. Vol. 26. P. 775-793.
5. Тутьшкин Н. Д., Трегубов В. И. Связанные задачи теории повреждаемости деформируемых материалов. /Под ред. Н.Д. Тутьшкина. Тула: ТулГУ–РАРАН, 2016. 267 с.
6. Богатов А.А., Мижирицкий О.И., Смирнов С.В. Ресурс пластичности металлов при обработке давлением. М.: Металлургия, 1984. 144 с
7. Bao Y., Wierzbicki T. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space // International Journal of Mechanical Sciences. 2004. Vol. 46. P. 81-98.
8. Bao Y., Wierzbicki T. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture // Journal Engineering. Fracture. Mechanics. 2005. Vol. 72 (7). P. 1049–1069.
9. Xue L. Damage accumulation and fracture initiation of uncracked ductile solids subjected to triaxial loading // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44 (16). P. 5163–5181.
10. Dunand M., Maertens A. P., Luo M., Mohr D. Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part I: Plasticity // International Journal of Plasticity. 2012. Vol. 36. P. 34–49.

11. Luo M., Dunand M., Mohr D. Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part II: Ductile fracture // *International Journal of Plasticity*. 2012. V. 32-33. P. 36–58.
12. Khan A.S., Liu H. A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy// *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 35. P. 1–12.
13. Вгънig M., Gerke S., Hagenbrock V. Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage // *International Journal of Plasticity*. 2013. Vol. 5. P. 49-65.
14. Danas K., Ponte Castaceda P. Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials // *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 49. P. 1325–1342.
15. Hosokava A., Wilkinson D. S., Kang J., Maire E. Onset of void coalescence in uniaxial tension studied by continuous X-ray tomography // *International Journal Acta Materialia*. 2013. Vol. 61. P. 1021-1036.
16. Хилл Р. Математическая теория пластичности /Пер. с англ. Э.И. Григолюка. М.: Госуд. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1956. 407 с.
17. Соколовский В.В. Теория пластичности. - 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
18. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
19. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности.- М.: Наука, 1966.- 232с.
20. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2 т. Т.1. / Л. И. Седов. - 4-е изд., исправл. и доп. М.: Наука, 1984. 528 с.
21. Zapara M.A., Tutyshkin N.D., Мьller W.H., Wille R. Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals // *International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2012. Vol. 24. P. 697-717.
22. Zapara M.A., CityplaceTutyshkin StateN.D., Мьller W.H., Wille R. A study of ductile damage and failure of pure copper – Part II: Analysis of the deep drawing process of a cylindrical shell // *Journal of Technische Mechanik*. 2012. Vol. 32. P. 631 – 648.
23. Benzerga A., Surovik D., Keralavarma S. On the path-dependence of the fracture locus in ductile materials – Analysis // *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 37. P. 157–170.
24. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
25. Green R.J. A plasticity theory for porous solids // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1972. Vol. 14. P. 215-224.
26. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твёрдых тел. М.: Metallurgy, 1971. 264 с.

## REFERENCES

1. Tutyshkin N.D., Мьller W.H., Wille R., Zapara M.A., 2014, “Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 59, p.p. 133–151.
2. Tutyshkin N.D., Lofink P., Мьller W.H., Wille R., Stahn O., 2017, “Constitutive equations of a tensorial model for strain-induced damage of metals based on three invariants”, *International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 29, № 1. p.p. 251-269.
3. Вгьниг M., 2003, “An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 19, p.p. 1679–1713.
4. Vammann D.J., Solanki K.N., 2010, “On kinematic, thermodynamic, and kinetic coupling of a damage theory for polycrystalline material”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 26, p.p. 775-793.
5. Tutyshkin N.D., Tregubov V.I., 2016, “Related problems of the theory of hardness of deformable materials”, Ed. N.D. Tutyshkin, *Tula: Toole. state. Un-t - RARAN*, 267 p. (In Russian)
6. Bogatov A.A., Mizhiritsky O.I., Smirnov S.V., 1984, “Resource of ductility of metals in pressure processing”, *M.: Metallurgy*, 144 p. (In Russian)
7. Bao Y., Wierzbicki T., 2004, “On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 46, p.p. 81-98.
8. Bao Y., Wierzbicki T., 2005, “On the cut-off value of negative triaxiality for fracture”, *Journal Engineering. Fracture. Mechanics*, Vol. 72 (7), p.p. 1049–1069.
9. Xue L., 2007, “Damage accumulation and fracture initiation of uncracked ductile solids subjected to triaxial loading”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 5163–5181.
10. Dunand M., Maertens A. P., Luo M., Mohr D., 2012, “Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part I: Plasticity”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 36, p.p. 34–49.
11. Luo M., Dunand M., Mohr D., 2012, “Experiments and modeling of anisotropic aluminum extrusions under multi-axial loading – Part II: Ductile fracture”, *International Journal of Plasticity*, V. 32-33, p.p. 36–58.
12. Khan A.S., Liu H., 2012, “A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 35, p.p. 1–12.
13. Вгьниг M., Gerke S., Hagenbrock V., 2013, “Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 5, p.p. 49-65.
14. Danas K., Ponte Castaceda P., 2012 “Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 49, p.p. 1325–1342.
15. Hosokava A., Wilkinson D. S., Kang J., Maire E., 2013, “Onset of void coalescence in uniaxial tension studied by continuous X-ray tomography”, *International Journal Acta Materialia*, Vol. 61, p.p. 1021-1036.

16. Hill R., 1956, “Mathematical Theory of Plasticity”, Per. from the English E.I. Grigolyuk, M.: State. Publishing House of Technical Theorists. lit-ra, 407 p. (In Russian)
17. Sokolovsky V.V., 1969. “The Theory of Plasticity”, 3rd edition, revised and supplemented, M.: *Higher School*, 608 p. (In Russian)
18. Kachanov L.M., 1969, “Fundamentals of plasticity theory”, M.: *Science*, 420 p. (In Russian)
19. Ivlev D.D., 1966, “The Theory of Ideal Plasticity”, M.: *Science*, 232p. (In Russian)
20. Sedov L. I., 1984, “Mechanics of a continuous environment”, In 2 vols, Vol.1, 4th ed., Fixed. and supplement, M.: *Science*, 528 p. (In Russian)
21. Zapara M.A., Tutyshkin N.D., Мьller W.H., Wille R., 2012, “Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals”, *International Journal Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 24, p.p. 697-717.
22. Zapara M.A., CityplaceTutyshkin StateN.D., Мьller W.H., Wille R., 2012, “A study of ductile damage and failure of pure copper – Part II: Analysis of the deep drawing process of a cylindrical shell”, *Journal of Technische Mechanik*, Vol. 32. p.p. 631 – 648.
23. Benzerga A., Surovik D., Keralavarma S., 2012, “On the path-dependence of the fracture locus in ductile materials – Analysis”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 37, p.p. 157–170.
24. Rabotnov Yu.N., 1987, “Introduction to the Mechanics of Destruction”, M.: *Science*, 80 p. (In Russian)
25. Green R.J., 1972, “A plasticity theory for porous solids”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 14, p.p. 215-224.
26. Екобори Т., 1971, “Physics and mechanics of destruction and strength of solid bodies”, M.: *Metallurgy*, 1971, 264 p. (In Russian)

Получено: 17.10.2022

Принято в печать: 22.12.2022