ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 5.

УДК 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-269-290

Развитие концептуальных положений качественной теории[1]

Р. Р. Мухин

Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).
e-mail: mukhiny@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена изучению эволюции основных положений качественной теории, под знаком которой происходило развитие всей математики XX в. В развитии качественной теории можно выделить несколько этапов с четко выраженными тенденциями: становление качественной теории, когда сложились новые подходы, новый язык и система понятий (конец XIX – 20-е гг. XX в.); следующий этап – широкое привлечение методов топологии и функционального анализа, вероятностных представлений и расширение качественной теории с выделением самостоятельных областей (конец 1920-х – середина XX в.); с середины XX в. по настоящее время – современный этап. Он выделяется тем, что в качественной теории воплотилось представление о математике как единой науке. Качественная теория вобрала в себя идеи и методы самых разных разделов (топологии, функционального анализа, теории групп Ли и др.). Объединяющая роль качественной теории заключается в том, что в ней воплощаются две культуры в математике, одна из них направлена на решение задач, а другая – на построение и осмысление теорий. В этом отношении качественная теория не просто конкретный раздел, а своеобразный подход к математическим проблемам. Особенностью современного этапа является еще невиданное сближение с областью приложений, особенно с физикой. Физика является не просто потребителем, она стимулировала кардинальные изменения самой математики. Становится трудно провести различимую границу между некоторыми разделами математики и теоретической физики. Качественная теория преобразила облик всей математики и ее приложений.

Ключевые слова: качественная теория, топология, топологическая инвариантность, динамическая система, локальное и глобальное описание.

Библиография: 72 названия.

Для цитирования:
Р. Р. Мухин. Развитие концептуальных положений качественной теории // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 269–290.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402 А.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 5.

UDC 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-269-290

Development of the conceptual provisions of the qualitative theory[2]

R. R. Mukhin

Mukhin Ravil' Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Stary Oskol).
e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

The work is devoted to the study of the evolution of the main provisions of the qualitative theory, under the sign of which the development of all mathematics of the twentieth century took place. In the development of qualitative theory there are several stages with clearly defined trends: the formation of a qualitative theory, when new approaches, a new language and a system of concepts were formed (late 19th – 20s of the 20th century); the next stage is the widespread use of methods of topology and functional analysis, probabilistic representations and the expansion of qualitative theory with the allocation of independent areas (late 1920s – mid-twentieth century); from the middle of the twentieth century to the present – the modern stage. It is distinguished by the fact that the idea of mathematics as a single science was embodied in the qualitative theory. Qualitative theory has absorbed the ideas and methods of various branches (topology, functional analysis, the theory of Lie groups, etc.). The unifying role of a qualitative theory is that it embodies two cultures in mathematics, one of them is aimed at solving problems, and the other – at building and comprehending theories. In this respect, qualitative theory is not just a specific branch, but a peculiar approach to mathematical problems. A feature of the present stage is the still unprecedented convergence with the field of applications, especially with physics. Physics is not just a consumer, it has stimulated fundamental changes in mathematics itself. It becomes difficult to draw a distinguishable boundary between some branches of mathematics and theoretical physics. Qualitative theory has transformed the face of all mathematics and its applications.

Keywords: qualitative theory, topology, topological invariance, dynamical system, local and global description.

Bibliography: 72 titles.

For citation:
R. R. Mukhin, 2022, "Development of the conceptual provisions of the qualitative theory", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 269–290.

1. Введение

Эволюция качественной теории имеет длительную историю и здесь можно выделить несколько этапов. Эти этапы не следует понимать в явно хронологическом отношении, а больше как констатацию доминирующих тенденций.

Представления качественного характера постепенно складывались в математике Нового времени, это предыстория качественной теории. Но рождение собственно качественной теории происходит в конце XIX в. Далее, с последних двух десятилетий XIX до конца 20-х гг.

[2]The work was supported by the RFBR grant No. 20-011-00402 A.

XX в. происходит рождение качественной теории и ее становление. В следующий период (конец 1920-х гг. середина XX в.) качественная теория не только становится отдельной областью математики, но из нее самой выделяются самостоятельные разделы со своими задачами и методами исследования. И следующий, современный этап начался в конце 1950-х гг. и продолжается до настоящего времени. Здесь качественные методы охватили всю математику и вышли за ее пределы.

2. Предыстория

Качественная теория является закономерным результатом развития математики XIX в., которое определяется всей совокупностью политических, экономических, социальных условий того времени, изменением места и роли математики в обществе. Содержание математики XVIII в. заключается, главным образом, в освоении идейного наследия математики XVII в., когда в трудах Р. Декарта, П. Ферма, И. Ньютона, В. Г. Лейбница был заложен фундамент новой математики. XIX в. ознаменовался также переворотом в науке, сопоставимый с тем, что произошло в XVII в. Наука совершенно преобразилась, кардинальным образом изменилось миропонимание. XIX в. получил от предыдущего века новые разделы, составившие затем большие области математики, а также аналитическую и небесную механику, ставшие главными потребителями аналитических методов и источником задач, оказывающих мощное стимулирующее воздействие на развитие математики. Но что касается основ математики, тут все было зыбко и ненадежно. Преобладал подход, во многом навеянный непосредственным восприятием. Считалось, что любая непрерывная функция имеет производную, каждая ограниченная функция интегрируема. Не было ясного понимания предела, вопросов сходимости и т.д. Все это потребовало глубокого реформирования математического анализа. Развернувшаяся в 20-40-е гг. XIX в. реформа заложила новые каноны математической строгости и обоснованности. Утверждалась методология, направленная на выявление условий и границ применимости каждого утверждения. Особое значение получили теоремы существования, в частности, теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений, и четкое различие необходимых и достаточных условий. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о разрешимости той или иной задачи. В то время Н. Х. Абелем была доказана неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения 5-й степени (1826), П. Ванцелем – невозможность с помощью циркуля и линейки решения известных еще с античности задач об удвоении куба и трисекции угла (1837). В высшей степени такой подход к строгости проявляется у К. Вейерштрасса(«вейерштрассовская строгость»).

Идеи качественного характера носились в воздухе. Как пример можно привести теорию Ш. Штурма о колебаниях решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка (1836) [1]. Но общая четкая постановка задач качественного характера , отдельного выделения таких задач является заслугой А. Пуанкаре [2, С. 163].

3. Рождение и становление качественной теории

Качественная теория зародилась из нескольких источников. Под качественной теорией поначалу понималась качественная теория дифференциальных уравнений. Одной из самых острых неразрешенных проблем в течение всей истории математики Нового времени являлось интегрирование дифференциальных уравнений. Во многом питательной средой здесь служили задачи механики и физики. Несмотря на известные успехи, возможности проинтегрировать уравнения в квадратурах оставались весьма ограниченными. Здесь наметилось несколько путей. С одной стороны, разрабатывались практические методы, когда с помощью разложения в ряды, непрерывные дроби или численным интегрированием уравнений можно было получить решения с требуемой степенью точности. Такой подход, несмотря на всю его во многих практически важных случаях достаточность, оставался внутренне неудовлетворительным. Это отчетливо видно в свете описанной выше реформы математического анализа. Другой подход был предложен С. Ли на основе созданной им теории непрерывных групп преобразований, где он попытался распространить идеи Э. Галуа по решению алгебраических уравнений на дифференциальные уравнения. Теория групп и алгебр Ли занимает в современной математике огромное место, но не разрешило в полной мере задачу интегрирования дифференциальных уравнений.

Старые методы оказались исчерпанными, требовались новые идеи. Пуанкаре предложил другой путь и поставил задачу качественного исследования дифференциальных уравнений. Основы качественной теории были изложены им в серии четырех мемуаров *Mémoire sur les courbes définies par une équations differentielle («О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями»*, 1881-1886) [3]. В начале первого мемуара Пуанкаре четко формулирует проблему:

«В громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определенных или неопределенных интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешенным. Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям» [3, С. 11].

Качественные методы выявляют топологию всего множества решений, упор делается на решения как единого целого, а не индивидуальных решений, выражаемых конкретными функциями. В постановке задачи и разработке качественной теории интегрирования дифференциальных уравнений у Пуанкаре практически не было предшественников. Можно отметить связь теоретико-функциональных идей Б. Римана с качественной теорией, в которой геометрия стала способом рассуждений. Создание качественной теории явилось революционным шагом, сами основатели качественной теории не осознавали в полной мере разрыва с традициями классической математики, это была новая математика и для нее открылось целое поле приложений. Оказалось, что математика может быть иной, чем только исследование аналитических структур. Но такое понимание пришло лишь десятилетия спустя.

Другой источник качественной теории – теория устойчивости. Она имеет длительную историю. Но современная теория устойчивости сложилась, начиная с труда А. М. Ляпунова *Общая задача об устойчивости движения* (1892) [4]. Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

Далее он рассматривает какое-либо частное решение $x_s = f_s(t)$

«Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть невозмущенным, а все остальные, с которыми оно сравнивается, возмущенными» [4, С. 28-29].

Бросается в глаза отход от традиционного подхода, подход Ляпунова к постановке задачи устойчивости находится в русле идей качественной теории. Речь идет уже не об одной траектории, а при определенных условиях всего множества траекторий посредством привлечения возмущенного движения.

На современном языке устойчивость по Ляпунову означает устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, когда при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех векторов $x(t)$ таких, что $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ при $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$. Отметим концептуальную важность введенных понятий *устойчивости и неустойчивости.* Понятие неустойчивости обрело первостепенное значение и содержательность в целом ряде научных направлений и было понято лишь позднее, в XX в. Науку XIX в. можно отнести к «эпохе устойчивости».

Еще одним источником качественной теории является старая, восходящая еще к Ньютону, проблема фигур равновесия вращающейся жидкой массы, которая привела к теории нелинейных интегральных уравнений. А. Эддингтон указывал, что *«одна из самых глубоких загадок Вселенной заключается во всеобъемлемости вращения, по-видимому, для всех ее объектов»* [5]. С этих позиций становится ясной актуальность задачи о фигурах равновесия, которая остается труднейшей задачей математики и механики до настоящего времени и, видимо, не имеет общего решения. К. Маклорен (1742) уточнил результаты Ньютона, и нашел фигуры равновесия, представляющие эллипсоиды вращения (эллипсоиды Маклорена). Совершенно новый и неожиданный результат получил К. Г. Якоби. Он показал, что трехосный эллипсоид с тремя неравными осями, также может быть фигурой равновесия (эллипсоиды Якоби) [6]. Это было совершенно неожиданно, противоречило интуиции – фигура равновесия, не являющаяся телом вращения! Эллипсоиды Маклорена и Якоби представляют первое приближение, и видимо, это побудило Пуанкаре внимательно посмотреть, как формируются новые фигуры равновесия при наложении возмущения. Так появилось понятие бифуркации (1885) [7, P. 49-50], когда происходит разделение качественным образом различающихся состояний при малом изменении параметров системы. Понятие бифуркации имеет ключевое значение не только в качественной теории, а в общенаучном смысле.

Понятие бифуркации заняло центральное место в исследованиях Ляпунова по фигурам равновесия. Это привело его к исследованию нелинейных интегральных уравнений. Тогда, на рубеже веков интегральные уравнения являлись новым предметом для математики, до этого они встречались лишь как единичные примеры. Логика развития науки обычно следует пути от простого к сложному. В случае интегральных уравнений эта привычная логика оказалась нарушенной. Теория линейных и нелинейных интегральных уравнений зародилась и развивалась параллельно в одно и то же время в конце XIX – начале XX в. Нелинейные интегральные уравнения явились еще одним, менее известным, источником качественной теории и составляют ее заметную часть [8]. В теории нелинейных интегральных уравнений выкристаллизовался целый ряд понятий и методов качественного подхода. Среди них понятие бифуркации, со всей очевидностью показавшее принципиальное отличие нелинейных систем от линейных.

На первый план в качественной теории вышли геометрические представления, и совершенно закономерно, что с самого начала широко использовались понятия и методы другой области качественного характера – топологии. В. Г. Лейбниц в письме Х. Гюйгенсу (1679) высказал идею, реализация которой привела позднее к созданию топологии:

«Я полагаю, что нам нужен еще иной геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение (situm) как Алгебра выражает величину» [9, С. 198].

Лейбниц ввел и сам термин *analysis situs* (анализ положения), так до XX в. называли топологию. Но до XIX в. идея выделения «геометрии положения», как предмета отдельного изучения от «геометрии величины» (по выражению К. Ф. Гаусса) не привлекала математиков. Выдающееся место в создании топологии принадлежит Б. Риману, который фактически заложил основы топологии поверхностей в своей работе об абелевых функциях [10]. Совершенно отчетливо предмет топологии определен в *Эрлангенской программе* Ф. Клейна: отыскание того, что остается неизменным при преобразованиях, составленных из бесконечно малых деформаций [11, С. 420]. На современном языке это означает изучение свойств фигур и их взаимного расположения, сохраняющихся при гомеоморфизмах (топологическая эквивалентность). Таким образом, предметом топологии является изучение топологических инвариантов.

Первый такой инвариант, один из важнейших, был найден еще Л. Эйлером [12] – эйлерова характеристика. До Пуанкаре видное место в создании топологии занимают еще Э. Бетти [13] и К. Жордан [14, 15].

Что касается Пуанкаре, то общепризнано, что он является главным основателем этой области. Изучение глобального поведения интегральных кривых на поверхностях и переход к исследованию систем дифференциальных уравнений высших порядков послужили для Пуанкаре мощным побудительным мотивом для разработки ряда основных положений топологии в работе *Analysis situs* (1895) и в пяти дополнениях к ней [16]. Идейное наследие Пуанкаре не исчерпано до сих пор. Появление качественной теории и топологии в одно и то же время и даже в трудах одного и того же человека не случайно, между этими двумя областями имеется глубокое внутреннее единство.

Создание новых разделов математики, в том числе и названных двух выше, было бы невозможным без теории множеств. И хотя вскоре выявились порожденные ею парадоксы, показавшие пределы возможностей логических построений, теория множеств стала фундаментом всей математики (вспомним высказывание Д. Гильберта: «Никто не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором»).

Помимо топологии, качественная теория опирается и на только что появившийся функциональный анализ. Упомянем лишь некоторые главные события, имеющих общематематическое значение. Понятие функционала – конец XIX – начало XX в. (С. Пинкерле, В. Вольтерра, Ж. Адамар) [17]. Особо надо отметить работы М. Фреше [18], [19] и Д. Гильберта [20], которые пришли к идее бесконечномерного функционального пространства – одного из самых фундаментальных понятий математики XX в. Идеи Фреше не сразу были восприняты математическим сообществом. Ранее даже многомерная геометрия поначалу вызывала острое неприятие. Гильберту принадлежит первый пример конкретного функционального пространства – гильбертова пространства, одного из оснований функционального анализа. Следующим принципиальным шагом явилось построение теории полных линейных нормированных пространств – банаховых пространств [21]. Венчает построение здания функционального анализа *Теория линейных операций* С. Банаха [22], в которой результаты многих математиков из разных стран представлены как единое целое, появилась новая область математики.

4. Дальнейшая эволюция качественной теории

В 1920-е гг. качественная теория разделилась на две ветви, которые превратились в две большие отдельные области: теорию операторных уравнений и теорию динамических систем, как стали называть позднее собственно качественную теорию. Функционально-аналитические методы составляют фундамент современного анализа, в том числе, теории операторных уравнений. Как это всегда бывает с появлением новой области, активно стали искать бесконечномерные обобщения уже известных математических задач. Для операторных уравнений особое значение имеют теоремы существования решений, что представляет качественную задачу. Такой задачей, к примеру, является, отнесенная институтом Клея к нерешенным проблемам тысячелетия, проблема турбулентности. Для трехмерных уравнений Навье-Стокса неизвестно не только ни одного турбулентного решения, но даже неизвестно, существует ли оно. Исследование многих классов уравнений сводится к доказательству существования и методов нахождения неподвижных точек отображения f множества X в себя, т.е. такой точки $x \in X$, чтобы $f(x) = x$. В зависимости от свойств отображения f и множества X созданы различные принципы неподвижной точки, и наиболее известным является принцип Шаудера. Задача о неподвижной точке имеет топологический характер и принцип Шаудера берет свое начало из теоремы Брауэра, которая явилась одним из первых применений алгебраической топологии для подобного рода задач. Л. Брауэр доказал теорему о существовании по крайней мере одной неподвижной точки при непрерывном отображении f n-мерного симплициального комплекса в себя, такого, что $f(x) = x$ [23]. Ю. Шаудер обобщил этот результат на случай банахова пространства [24, 25]. Принцип Шаудера позволяет установить наличие неподвижных точек у вполне непрерывного оператора при отображении ограниченного непрерывного замкнутого множества на свою часть. Через несколько лет Ж. Лере и Ю. Шаудер предложили более рафинированный метод (принцип Лере-Шаудера), позволяющий найти подходы к сложным уравнениям с частными производными высших порядков [26].

События принципиального характера связаны с собственно качественной теорией, которая после значительных изменений превратилась в теорию динамических систем. Теория динамических систем широко использует методы топологии, функционального анализа и теории вероятностей. Теория вероятностей обрела зримые очертания после появления труда Якоба Бернулли *Ars Conjectandi (Искусство предположений*, 1713) [27]. Однако права гражданства в математике теория вероятностей получила лишь после решения А. Н. Колмогоровым [28, 29] 6-й проблемы Гильберта, который отнес аксиоматизацию теории вероятностей к числу важнейших задач математики.

Основателями теории динамических систем являются А. Пуанкаре и Дж. Биркгоф, у последнего она уже обрела четкие контуры. Важным рубежом явился коллоквиум математиков в университете Чикаго (1920), на котором Биркгоф прочел цикл лекций *Динамические системы*. В лекциях Биркгофа принципиальное значение имело широкое применение для исследования динамических систем топологических методов. Несколько позднее в своем труде *Динамические системы* Биркгоф выдвинул программу, в которой в полной общности ставится задача изучения динамических систем (программа Пуанкаре-Биркгофа):

«Конечной целью теории движения динамической системы должно служить качественное определение всех возможных типов движения и взаимоотношений между этими движениями» [30, С. 194].

До самого конца XIX в. идеалом научного подхода являлось рациональное описание природы, которая представлялась царством порядка. Неупорядоченность, неустойчивость относили к несовершенству наших знаний. У Биркгофа принципиально иное видение. Он, в отличие от традиционного подхода, не выделяет отдельно устойчивые движения, они у него находятся в ряду всех движений. Сложные движения обретают равные права с регулярными движениями. Сами сложные движения можно разделить на классы соответственно их сложности, ввести таким образом иерархию сложности. Фактически начал складываться новый взгляд на мир. Развитие этих идей вместе с другой чертой качественной теории – изучение системы в целом, глобальное рассмотрение привело к новому разделу теории динамических систем – эргодической теории.

5. Эргодическая теория

Исходным пунктом эргодической теории явилась фундаментальная физическая проблема обоснования статистической механики. Известно, какая острая полемика разгорелась в конце XIX в. по поводу оснований кинетической теории. В основе полемики лежала идея, не утратившая привлекательности до нашего времени: выразить кинетические закономерности, исходя из уравнений классической механики. Однако последовательное проведение этой линии приводило к глубоким парадоксам. Для их разрешения Л. Больцман сформулировал *эргодическую гипотезу*, суть которой состояла в том, что в изолированной системе фазовая траектория пройдет через каждую точку гиперповерхности постоянной энергии. Иными словами, в эргодической системе временные средние значения физических величин равны их фазовым статистическим средним. Первая эргодическая теорема принадлежит Пуанкаре [31, Т. 2. С. 130-158]. Эта теорема о возвращении утверждает, что любая точка системы $p \in \Omega$, где

Ω – пространство динамической системы, пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения (за исключением начальных условий нулевой меры). Эргодическая теория строится на основе теории меры. Система будет эргодической по отношению к мере μ, если для любого отображения f инвариантного множества $A \subset \Omega,\ f^{-1}(A) = A$, оно является метрически транзитивным, т.е. либо A, либо $\Omega\ A$ имеют меру 0 [32].

В русле идей Пуанкаре лежат основополагающие результаты Дж. фон Неймана [33] и Дж. Биркгофа [34]. Фон Нейман доказал статистическую эргодическую теорему, но Биркгофу принадлежит более сильный результат – индивидуальная эргодическая теорема о равенстве временных и фазовых средних, которое имеет место тогда и только тогда, когда пространство метрически транзитивно.

К эргодическим теоремам примыкает важнейший результат Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова об инвариантной мере: в компактном фазовом пространстве динамической системы существует инвариантная мера (теорема Крылова-Боголюбова) [35]. Они установили способы построения инвариантной меры для широкого класса динамических систем, у которых не существует интегрального инварианта в отличие от гамильтоновых систем.

В широком смысле под эргодичностью понимают сложное поведение динамических систем, наличие у них статистических свойств. В более узком отношении эргодическая система демонстрирует простейший вариант сложного поведения и открывают иерархию таких систем. Помимо эргодического движения, имеется более сложный вид движения – *перемешивание* (Дж. В. Гиббс) [36], [37]. Из наличия перемешивания следует эргодичность, тогда как обратное неверно. Развитие этих идей привело В.А. Рохлина к понятию перемешивания n-го порядка [38], новому инварианту динамических систем. Таким образом, складывается иерархия движений по их сложности: эргодичность, перемешивание, перемешивание второго порядка и т.д.

Несмотря на успехи эргодической теории, решить проблему обоснования статистической механики с ее помощью не удалось. Задача сводится к установлению метрической транзитивности. Однако преобразования с инвариантной мерой оказались столь сложны, что установить метрическую транзитивность удалось лишь в самых простых случаях. Эргодическая теория стала развиваться как область математики, и она сосредоточилась на решении своих собственных задач. Центральной проблемой эргодической теории является классификация преобразований, что выводит на первый план вопрос изоморфизма: при каких условиях можно считать, что два преобразования с инвариантной мерой относятся к одному метрическому типу?

В период своего становления, как самостоятельного раздела математики, эргодическая теория пользовалась в основном функционально аналитическими представлениями. В работах Колмогорова [39, 40] уже происходит явное смещение акцентов с функционально-аналитического подхода на вероятностные представления. С этого времени был разрушен традиционный взгляд, что естественным языком эргодической теории является функционально-аналитический язык. Между теорией вероятностей и теорией динамических систем существует глубокая внутренняя связь. К Колмогорову восходит идея об использовании преобразования пространства с инвариантной мерой и разбиений пространства на конечное число множеств в качестве модели стационарного случайного процесса. Теория измеримых разбиений вместе с теорией информации и теорией вероятностей послужила тем фундаментом, на котором Колмогоров создал раздел эргодической теории, известный сейчас как энтропийная теория динамических систем. Я. Г. Синай вспоминал, что Колмогоров предложил понятие энтропии, которое должно помочь различать динамические системы "вероятностного" и "детерминированного" происхождения. Тогда не было известно нетривиальных примеров динамических систем, для которых это можно было бы сделать [41].

Основы энтропийной теории изложены Колмогоровым в двух статьях [39, 40], существенной уточнение в определение внес Синай [42]. Основным понятием является энтропия измеримого разбиения A пространства M с мерой μ на конечное или счётное число множеств A_1,

$A_2, \ldots$, которая даётся формулой

$$H(A) = -\sum_k \mu(A_k) \log \mu(A_k),$$

где сумма берётся по всем элементам разбиения A, имеющим положительную меру, что можно интерпретировать на языке теории вероятностей как среднее значение информации, полученной после испытания. Стационарный случайный процесс можно описать с помощью автоморфизма T, определенного на пространстве M с мерой и измеримой функцией P на M. Тогда сложное испытание, состоящее из последовательности испытаний $A, TA, \ldots, T^n A$, эквивалентно одному испытанию, описываемому разбиением ξ_T^n. Энтропия Колмогорова-Синая (КС-энтропия или метрическая энтропия) $h(T)$ определяется как верхняя грань на множестве конечных измеримых разбиений ξ

$$h(t) = sup \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n).$$

Энтропию $h(T)$ можно также представить как оценку сложности системы в среднем. Она описывает максимально возможную скорость создания информации преобразованием T с помощью конечных разбиений пространства состояний. КС-энтропия представляет принципиально новый инвариант, позволяющий разделить системы с разными значениями энтропии на подклассы, что позволяет говорить об их неизоморфности. Принципиальный результат заключается в том, что случайные явления и классические динамические системы оказалось можно описывать *на одном и том же языке*.

Кроме того, Колмогоров ввел важное и плодотворное понятие К-систем для характеристики ослабления статистических связей в случайном процессе на отдаленных друг от друга промежутках времени. С этой точки зрения К-системы соответствуют случайным процессам с самыми слабыми свойствами регулярности [39]. Положительность энтропии К-систем в противоположность детерминированным системам с нулевой энтропией отражает в инвариантной форме разделение динамических систем на стохастические и детерминированные.

Кульминационным пунктом взлета теории динамических систем, который происходил начиная с 1960-х гг., является открытие сложного поведения систем с небольшим числом степеней свободы – динамического хаоса. В основе этого явления лежит не особый физический механизм, а оно обусловлено свойствами решений уравнений, что имеет универсальный характер и не ограничивается лишь физическими системами. Энтропия Колмогорова-Синая служит мерой экспоненциальной скорости сближения или разбегания траекторий динамической системы. Количественной характеристикой неустойчивости траекторий являются показатели Ляпунова. Было ясно, что должна существовать связь энтропии с показателями Ляпунова. Длительные поиски завершились работой Я. Б. Песина [43], установившего, что для диффеоморфизма T многообразия M, сохраняющего меру μ энтропия $h(T)$ равна

$$h(T) = -\int \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x) \chi_i(x) d\mu(x)$$

где $q_i(x)$ – кратность соответствующего значения показателя Ляпунова $\chi_i(x), k(x)$ – число различных отрицательных значений показателя. Поскольку энтропия динамической системы гораздо более трудно вычислима, чем показатели Ляпунова, данное выражение дает возможность более простого расчета энтропии.

6. Качественная теория в математике второй половины XX века

Эргодическая теория является не только важным инструментом исследования поведения решений дифференциальных уравнений, но она стала составной частью идеологии качественного подхода. В своем известном докладе на Международном конгрессе математиков в 1954 г. [44] Колмогоров сформулировал проблему программного характера о развитии теории динамических систем: выяснение путей применения основных концепций и результатов теории динамических систем для решения задач механики. Как оказалось, эта программа не ограничивается лишь одной механикой, а имеет общий характер. Главный тезис заключается в том, что теория динамических систем дала сильный импульс для развития математики в целом. Она вошла в центр притяжения различных разделов, когда вступают во взаимодействие и переплетаются самые разные математические дисциплины, что позволяет найти подходы к старым нерешенным и новым задачам.

Другим направлением, выделенным Колмогоровым, является качественное аналитическое исследование возмущенных интегрируемых систем. Задачу поставил еще Пуанкаре в контексте общих вопросов динамики и счел ее столь значительной, что отнес ее к основной проблеме механики [31, Т. 1. С. 34]. Дело в том, что ряды теории возмущений являются расходящимися, и традиционное рассмотрение лишь нескольких первых членов помимо того, что не позволяет изучить некоторые важные теоретические вопросы, является внутренне неудовлетворительным. Требуется изучение всего ряда, задача имеет глобальный характер. Расходимость обусловлена не неудачным методом, а лежит в существе дела. В последующие десятилетия неоднократно предпринимались попытки решения задачи (А. Пуанкаре, М. Борн, К. Зигель и др.), но успеха добиться не удалось. Колмогоров пришел к этой задаче в поисках ответа на вопрос, какие могут быть эргодические множества в динамических системах классической механики и какие из них имеют положительную меру? В результате была создана теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (теория КАМ) [44]-[46] – одно из ярких достижений математики ушедшего века. Главный результат заключается в установлении того, что при наложении возмущения существует множество положительной меры, которое распадается на инвариантные торы с квазипериодическим движением на них. Другими словами, разбиение области на инвариантные торы оказывается устойчивым к малым возмущениям.

Все эти результаты теории динамических систем быстро вошли в обиход физики (физика плазмы, ускорительная техника и др.). Сама же теория динамических систем разделилась на целый ряд разделов и направлений (симплектическая геометрия, гиперболическая теория, конформная динамика и др.) [47]-[49]. Кульминационным событием развития теории динамических систем в XX в. стали открытие упоминавшегося выше динамического хаоса и создание теории точно интегрируемых систем.

В формировании математики XX в. определяющее значение имели два принципа: симметрии и качественного описания. Математическая теория симметрии составляет предмет теории групп. Эти два принципа совершенно по-другому высветили вопросы интегрирования уравнений.

Интегрирование дифференциальных уравнений является центральной проблемой математики с самого начала создания анализа бесконечно малых. До середины XIX в. понятие интегрируемости считалось самим собой разумеющимся, пока оно не было поколеблено работами Э. Бура [50] и Ж. Лиувилля [51, 52]. К Пуанкаре восходит идея, что возможны различные определения интегрируемости и система дифференциальных уравнений может быть лишь более или менее интегрируемой [30, С. 255]. Интегрируемость связывается с наличием интегралов движения, обусловленных присутствием той или иной симметрии. Здесь требуется не локальное изучение, а рассмотрение системы в целом, и на первый план выступают топологические соображения. Так, в системе с двумя степенями свободы пространством положений является поверхность M, гомеоморфное сфере с некоторым k – числом приклеенных ручек, k – топологический инвариант, род поверхности. При $k \geq 2$, когда M не гомеоморфна сфере S^2 или тору T^2, система неинтегрируема. В этом случае замкнутая аналитическая поверхность не может быть конфигурационным пространством аналитической интегрируемой системы [53, 54]. Произошло смещение акцентов. Вопросы неинтегрируемости стали отдельным направлением исследований теории дифференциальных уравнений. Насколько нетривиальны эти задачи, указывает следующий факт. Была распространена идея, принадлежащая Ф. Клейну и А. Зоммерфельду, что при известном большом наборе частных решений с помощью интерполирования можно получить представление о свойствах решений в общем случае. Но, к примеру, при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в его фазовом пространстве всегда имеются зоны квазислучайного движения, наличие которых никак нельзя вывести из факта существования бесконечного числа периодических или квазипериодических движений [54, С. 18].

Но вот другой полюс того же ряда вопросов. Согласно одной старой работе Э. Ферми [55] любая нелинейность в системах с достаточно большим числом степеней свободы приводит к полному разрушению интегралов движения и система становится неинтегрируемой. Хотя доказательство Ферми было не совсем убедительным и вызвало критику со стороны математиков, весьма распространенным было убеждение в универсальности свойства нелинейных систем, когда под действием возмущения происходит разрушение квазипериодического движения на торах и требуется переход к статистическому описанию. Оказалось, что это представление несправедливо. Согласно теории КАМ (1954), разрушению подвергаются резонансные торы, мера которых мала, а нерезонансные торы лишь деформируются, оставаясь топологически торами. С другой стороны, в те же годы (1955) Ферми совместно с Дж. Пастой и С. Уламом решил проверить свою гипотезу об эргодичности неинтегрируемой нелинейной системы, в качестве которой была выбрана цепочка из 64 осцилляторов, с помощью начинавшихся распространяться ЭВМ. Вычислительный эксперимент, вопреки ожиданию, продемонстрировал устойчивый квазипериодический характер без заметных признаков эргодичности (проблема Ферми-Паста-Улама) [56]. Эта задача в непрерывном пределе приводит к уравнению Кортвега де Фриза, для которого были обнаружены решения частицеподобного типа – солитоны (М. Крускал, Н. Забуски, 1965) [57]. В дальнейшем решения солитонного типа были обнаружены у других нелинейных уравнений, что привело к созданию теории солитонов (см., например, [58]). Сформировался важнейший раздел современной математической физики, возродился интерес к классическому разделу математики – к интегрируемым системам. Было найдено большое количество точно решаемых нелинейных систем, важных с точки зрения физики, и их число постоянно растет.

Постепенно сложилось понимание, что нелинейные явления – это особый мир, во многом непривычный, где не срабатывает интуиция, у него предельно широкая область проявления – от математики и физики до экономики, социальной области и психологии. Традиционный мир линейных представлений является лишь приближением с определёнными границами применимости.

Одной из главных тенденций математики второй половины прошлого века стало невиданное по своей интенсивности углубление связей между топологией, качественной теорией, функциональным анализом, теорией вероятностей, алгебраической геометрией, теорией групп Ли и другими разделами, что привело к единому подходу – качественным методам в решении самых разнообразных задач, и приобрело общематематическое значение. При качественном подходе изменился сам объект исследования, когда расширилось понимание глобального описания: переход от отдельной системы ко всему множеству систем. Отсюда следует усиление внимания к классификации объектов, к критерию их «одинаковости», к отношениям эквивалентности. Совершенно естественным явилось обобщение на увеличение размерности (от кривых и поверхностей к n-мерным многообразиям, к функциям с бесконечным числом переменных и т.д.). Глубоко укоренившееся традиционное видение принципиально неограниченной точности описания с помощью классического анализа сменилось пониманием ограниченности этого подхода случаями устойчивости системы к малым возмущениям. Произошло осознание того факта, что случайная величина не просто отражает неполноту нашего знания, а представляет первичное понятие, лежащее в основе мироздания. Эти кардинальные изменения привели к многочисленным последствиям и представляют одну из главных особенностей математики XX в.

Значительное место в указанных процессах заняла новая постановка старых, давно сформулированных задач. В качестве не просто примера, явившимся заметным событием в русле названных математических тенденций, и таким событием, которое само формировало эти тенденции, назовем теорию индекса Атья-Зингера. Это не только одно из крупнейших достижений математики XX в., оно примечательно еще тем, что отчетливо показывает, как тесно переплелись современная математика и современная теоретическая физика.

Под индексом оператора понимается соотношение между его аналитическими и топологическими инвариантами. Отдельные примеры индексов известны еще с XIX в. К ним относится формула Гаусса-Бонне, связывающая гауссову кривизну K двумерного компактного риманова многообразия ω и геодезической кривизны k_g границы $\partial\omega$ с его эйлеровой характеристикой $\chi(\omega)$

$$\int_\omega K d\sigma + \int_{\partial\omega} k_g ds = 2\pi\chi(\omega)$$

К простейшему случаю индекса относится классическая теорема Пуанкаре о распределении особых точек кривых, определяемых дифференциальными уравнениями [3.С.145]

$$N + F - C = 2 - 2p$$

где N – число узлов, F – число фокусов, C – число седел, p – род поверхности. Другим, более сложным, примером является теорема Римана-Роха, связывающего число мероморфных функций с заданными полюсами с родом поверхности. Обобщения теоремы Римана-Роха легли в основу современной алгебраической геометрии.

На современном языке формула индекса устанавливает связь между аналитическим индексом линейного оператора $D : L_0 \to L_1$, где L_0, L_1 – топологические векторные пространства, и топологическим индексом, представляющего некоторую характеристику оператора D и пространств L_0, L_1. Вопрос об индексе для общего эллиптического дифференциального оператора на замкнутом многообразии, как общематематическая проблема, был поставлен И. М. Гельфандом [59]. Побудительным мотивом явились краевые задачи для линейных эллиптических уравнений. Гельфанд исходил из топологических соображений, отмечая, что наиболее важные свойства в целом решений этих задач обычно сохраняются при небольших деформациях задачи и должны быть гомотопическими инвариантами. Изучение этих инвариантов открывает общий путь для всего многообразия краевых задач.

Индекс эллиптического оператора D можно определить как разность нулевых мод D и сопряженного оператора D^+ [60, С. 171]

$$\gamma(D) = \dim\ kerD - \dim\ kerD^+$$

При непрерывном изменении эллиптического оператора индекс оператора не меняется. М. Атья и И. Зингер показали, что индекс можно вычислить с помощью топологических методов (теория индекса Атья-Зингера) [61]. Теория индекса является важным инструментом для установления особенностей устройства сложных нелинейных систем.

Первоначальное доказательство было очень сложным. В дальнейшем удалось добиться некоторых упрощений (М. Атья, И. Зингер, Р. Ботт, В. К. Патоди), но новый, значительно все упрощающий подход удалось найти после работ Э. Виттена по доказательству неравенств Морса и формулы Лефшеца, исходя из физических соображений – представлений суперсимметрии, связывающих бозонные и фермионные поля. Сама идея для использования того же подхода для доказательства теоремы об индексе была реализована американским физиком Л. Альваресом-Гауме [62, 63].

Теория индекса сопоставляет целое число эллиптическому оператору на компактном гладком многообразии. Зингер видел обобщение теории на новые ситуации: негладкие многообразия, многообразия специального типа и т.д. [64]. В этом направлении много было сделано математиками из разных стран. Однако теория индекса вошла еще в инструментарий теоретической физики. В частности, теорема об индексе связана с оператором Дирака, занимающего важное место в калибровочной теории. Атья вспоминал, что ему с Зингером пришлось самим «открыть» оператор Дирака, знай они о нем раньше, их работа по теории индекса значительно бы облегчилась [65]. Сам Атья внес огромный вклад, чтобы самые новые математические достижения стали достоянием физики, что подчеркнуто в решении Норвежской Академии Наук о присуждении Абелевской премии за 2004 г. М. Атья и И. Зингеру:
«За открытие и доказательство теоремы об индексе, которая соединила топологию, геометрию и анализ, и за их выдающуюся роль в наведении новых мостов между математикой и теоретической физикой»[66].

Одной из главных черт эволюции взглядов о месте математики является новое понимание взаимоотношения математики и физики. Современная физика не просто активно использует новейшие математические достижения, но беспрецедентно усилилась тенденция, когда физика формирует прогресс самой математики, причем в самых абстрактных ее областях. В некоторых областях уже трудно различима граница между математикой и теоретической физикой. Яркой иллюстрацией является работа английского математика С. Дональдсона [67, 68].

Дональдсон показал, что 4-мерная геометрия является намного более богатой, чем это традиционно считалось, и она содержит структуры с совершенно неожиданными свойствами. Дональдсон воспользовался новым инструментом, позаимствованным из теоретической физики – уравнениями Янга-Миллса, которые лежат в основе современной квантовой теории поля. Уравнения Янга-Миллса представляют глубокое нелинейное обобщение уравнений Максвелла и связаны с неабелевыми калибровочными группами. В евклидовой метрике существуют решения этих уравнений, представляющие большой физический интерес – инстантонные решения, которые и были положены Дональдсоном в основу его рассмотрения. Он построил квадратичную форму (полиномы Дональдсона) и классификацию 4-мерных многообразий свел к изучению алгебраических свойств этих полиномов. Полученные Дональдсоном инварианты являются весьма тонким инструментом, позволяющие различать гомеоморфные и диффеоморфные многообразия. Дональдсон получил фундаментальный результат: существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия, и это нельзя обнаружить традиционными топологическими методами. Здесь прослеживается ситуация, сложившейся в XIX в., когда появившиеся примеры непрерывных, но недифференцируемых функций, привели математический мир, по словам Н. Бурбаки, в состояние растерянности [69, С. 26]. Как тогда, так и в случае с многообразиями Дональдсона, геометрическая интуиция подверглась сильным испытаниям.

7. Вычислительный эксперимент

Еще одной из черт математики второй половины XX в. является переосмысление принципов применения вычислительной техники, которое выразилось в новом методе научного исследования – вычислительном эксперименте. Создание ЭВМ в первую очередь связано с именем Дж. фон Неймана, он же был и среди главных идеологов их использования. Фон Нейман пришел к выводу, что аналитические методы дошли до своего предела, с их помощью нельзя получить даже качественную информацию о поведении решений нелинейных уравнений. Выход фон Нейман видел в применении только что появившихся ЭВМ. Часто не различают вычислительный эксперимент и компьютерное моделирование, хотя иногда различие может быть чисто терминологическим. Но все же компьютерное моделирование больше направлено на получение ответов на конкретные вопросы: решение уравнений, расчет параметров крыла самолета и т.д., и при этом оно опирается на сложившийся теоретический фундамент. Кроме того, при компьютерном моделировании еще до проведения расчетов имеется возможность оценки того, что должно получиться. Главное отличие вычислительного эксперимента заключается в его эвристическом характере (это подчеркивали еще фон Нейман и Улам), когда варьированием параметров, начальных условий и т.д. стараются выяснить устройство модели в целом выделением качественных характеристик, элементов внутренней структуры, особенностей поведения и т.д. В вычислительном эксперименте могут рассматриваться ситуации, когда сами теоретические положения не являются твердо установленными. В этом случае может проявиться принципиально новое, как, например, один из первых вычислительных экспериментов привел к проблеме Ферми-Паста-Улама, затрагивающего вопрос о природе статистических законов. Этот путь привел к одному из самых значительных достижений математики ушедшего века – открытию солитонов. С помощью вычислительного эксперимента выбираются направления для дальнейших аналитических исследований. Вычислительный эксперимент стал методом исследования не только в физике, но и в математике. Появился даже термин «экспериментальная математика». Самый известный здесь результат – доказательство теоремы о четырех красках, труднейшей топологической задачи, пришедшей еще из XIX в. (В. Хакен, К. Аппель, 1976).

8. Заключение

Конец XIX – начало XX в. относится к переломным рубежам в истории науки. За короткий временной промежуток ее достижения привели к кардинальным изменениям в представлениях о картине мира и места в ней человека. Классическая наука исповедовала веру в неограниченные возможности человеческого разума. Открытия в науке, в первую очередь в физике, поколебали сложившиеся представления о мире и традиционный стиль мышления. Сформировалась квантово-релятивистская картина мира. В биологии утвердилась идея дискретности в наследовании и формировании генетических структур. Коренные изменения коснулись и других наук. Рождение, эволюция оказались присущи и Вселенной как целому. Все это оказало глубокое воздействие и на математику. Развитие математики происходит под воздействием прагматических потребностей, она объясняет законы природы, но есть внутренний имманентный двигатель ее прогресса. Он заключается в сущности человека, потребности творить, то, что делает человека человеком, и математической творчество находится в том же ряду. Эти два разных понимания предназначения науки составили известную дискуссию между Ж. Фурье и К. Г. Якоби. Под знаком этих утверждений развивалась и математика XX в., добавив сюда значительно усилившиеся потребности со стороны техники, инженерии, военно-промышленного комплекса, а также из нетрадиционной сферы приложений – гуманитарной области.

Становление качественной теории с некоторой долей условности можно отнести с конца XIX до 20-х гг. XX в., причем в логическом, а не в строго хронологическом отношении. Тогда сложились новые подходы, новый язык и новая система понятий. Радикальный поворот не мог произойти сразу и в первые десятилетия качественной теории в ней присутствует дух и традиционные методы классической математики. И в дальнейшем качественная теория не порывает полностью с классической математикой. Качественное рассмотрение имеет содержательный характер лишь при его дополнении количественным исследованием.

Главной чертой следующего периода (конец 1920-х гг. – середина XX в.) развития качественной теории, которая стала самостоятельным разделом, является расширение теории с выделением самостоятельных разделов и широкое привлечение методов топологии и функционального анализа – новых областей математики, также преимущественно качественного характера – и вероятностных методов.

Современный этап развития качественной теории, который определим с середины прошлого века до настоящего времени, выделяется тем, что в ней воплотилась одна из сущностей математики – математики как единой науки. Математика представляет единый организм и ее жизнеспособность обусловлена связностью ее частей. Именно это позволяет математике охватить самые разные стороны человеческой деятельности. Объединяющая роль качественной теории заключается еще в том, что в ней воплощаются две культуры в самой математике. Одна из них направлена на решение задач, а другая – на построение и осмысление теорий. В этом отношении качественная теория не просто конкретный раздел, а своеобразный подход к математическим проблемам. Качественная теория наводит мосты между самыми разными разделами математики. Другой особенностью современного этапа является невиданное ранее тесное сближение математики, в том числе, качественной теории, с областью приложений, особенно с физикой. Становится трудно провести различимую границу между некоторыми разделами математики и теоретической физики. Эти границы весьма условны, по словам М. Атья, такое разделение следует понимать больше в административном смысле [70, P. 66]. Представления качественной теории, топологии, геометрии, теории групп Ли охватили не только квантовую теорию, но и классическую механику и классическую электродинамику.

Значение качественного подхода усиливается тем обстоятельством, что в современной фундаментальной физике главным инструментом, дающим количественные результаты, остается теория возмущений. Теория возмущений прекрасно работает в квантовой электродинамике, позволяя получить количественные данные с огромной точностью совпадающие с результатами эксперимента. Это обусловлено малостью константы взаимодействия ($\alpha \approx 1/137$), что приводит к быстро сходящимся выражениям. Для сильного взаимодействия это уже не так, и про получающиеся количественные величины можно говорить лишь о тенденции согласия с экспериментальными результатами. При этих условиях значение возможности получения качественной информации трудно переоценить. Качественная теория представляет не просто новую математику, но новую математику для физики, механики, экономики, гуманитарных наук. В приложениях математики особую сложность представляют гуманитарные науки вследствие разобщенности понятий, кардинального различия объектов исследования, крайней трудности формализации. Качественный подход остается главным, нередко единственным методом исследования. Насколько он может быть продуктивным, дает понимание хода процесса (исторического, социального, культурного и др.) по И. Пригожину [71] и Ю. М. Лотману [72].

В широком смысле качественная теория дает новое видение мира на уровне парадигмы, поскольку устройство мира дается на языке физических величин и геометрических образов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sturm Ch. F. Mémoire sur une classe équations à différences partielles // J. Math. Pures et Appl. 1836.V. 1. Pp. 373–444.

2. Демидов С., Петрова С. С., Симонов Н. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Математика XIX в. М.: Наука, 1987. С. 80–183.

3. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. Pp. 375–422; 1882. V. 8. Pp. 251–296; Sér. 4. 1885. V. 1. Pp. 167–244; 1886. V. 2. Pp. 151–217. Рус. перевод: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.

4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Ляпунов А. М. Избр. труды: работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007. С. 27–298.

5. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures // archive: 1409.1823.

6. Jacobi C. G. Über die Figur des Gleichgewichts // Ann. Phys. Chem. 1834. Bd. 33. Pp. 229–233; Gesammelte Werke. V. 2. Berlin : Verlag von G. Reimer, 1882–1891. S. 17–22.

7. Poincaré H. Sur l'équilibre d'un masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. T. 7. Pp. 259–380 ; Oeuvres de Henri Poincaré. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Pp. 40–140.

8. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков // Чебышевский сборник, 2021. Т. 22, В. 3. С. 312—345.

9. Лейбниц В. Г. Избранные отрывки из математических сочинений // УМН. 1948. Т. 3. В. 1 (23). С. 165–204.

10. Риман Б. Теория абелевых функций // Б. Риман. Сочинения. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. С. 88–138.

11. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических представлений ("Эрлангенская программа") // Об основаниях геометрии. Под ред. А. П. Нордена. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 399–434.

12. Euler L. Elementa doctrinae solidorum (1758) // Euler Archive. 230. Pp. 109–141.

13. Betti E. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni // Ann. Math. Pura Appl. 1870. V. 2/4. Pp. 140–158.

14. Jordan C. Sur la deformation des surfaces // J. Math. Pures et Appl. 1866. II sér. T. 11. Pp. 1–5.

15. Jordan C. Course d'Analyse. V. III. Paris, 1867. Pp. 587–594.

16. Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytechniques. - II sér. 1895. Cahier 1. - Pp. 1–121./ Рус. пер.: // А. Пуанкаре. Избр. труды: В 3 т. / Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 454–734.

17. Медведев Ф. А. Основоположники функционального анализа // Истор.- мат. исслед. 1973. В. XVIII. С. 55–70.

18. Frechét M. Généralisation d'un théorème de Weierstrass // Comp. Ren. Acad. Sci. 1904. V. 139. Pp. 848–850.

19. Frechét M. Sur la quelques points du Calcul fonctionel // Rend. Circ. Math. Palermo. 1906. V. 22. Pp. 1–74.

20. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen III // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1905. S. 307–338.

21. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. T. 3. Pp. 123–181.

22. Banach S. Théorie des opértaions linéaires. Warrzawa, 1932. 259 p.

23. Brouwer L. E. J. Über ein eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich // J. Math. Ann. 1910. Bd. 69. S. 176–180.

24. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Math. Zeitschr. 1927. Bd. 26. S. 47–65, 417–431.

25. Schauder J. Über lineare, vollstetige Operationen // Studia. Math. 1930. Bd. 2. S. 183–196.

26. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionelles // Ann. Ec. Norm. Sup. 1934. V. 3 (51). Pp. 43–78.

27. Бернулли Я. О законе больших чисел. М.: Наука, 1986. 176 с.

28. Колмогоров А. Н. Общая теория меры и исчисление вероятностей // Коммун. академия, Сб. работ матем. раздела. 1929. Т. 1. С. 8–21.

29. Kolmogorov A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrehung. Berlin: Springer-Verl., 1933. 62 S.

30. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. Providence, Rhod Island: AMS, 1927. IX + 295 p. / Рус. пер.: Дж. Биркгоф Динамические системы / Пер. с англ. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.

31. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. // Избр. труды: В 3 т. / М.: Наука, 1971. Т. 1. 772 с.; 1972. Т. 2. 998 с.

32. Hopf E. Ergodentheorie. Berlin: Springer-Verl. 1937. IV + 835 S. То же : Хопф Э. Эргодическая теория // УМН. 1949. Т. 4. В. 1. С. 113–182.

33. Neumann J. von. Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1932. V. 18. Pp. 70–82.

34. Birkhoff G. D. Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems and proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1931. V. 17. Pp. 650–660.

35. Kryloff N., Bogoliouboff N. La théorie générale de la mesure dans son applications a l'étude des système dynamiques de la mécanique non lineaire // Ann. Math. 1937. V. 38. Pp. 65–113. / Рус. пер. в кн.: Н.Н.Боголюбов. Избр. труды. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1969. С. 411–463.

36. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики // Дж. В. Гиббс. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. С. 350–509.

37. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.

38. Рохлин В. А. Обобщение сохраняющего меру преобразования, не являющегося перемешиванием // ДАН СССР. 1949. Т. 13. С. 329–340.

39. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. № 5. С. 861–864.

40. Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 754–755.

41. Синай Я. Г. Письменное сообщение от 26.03.2007.

42. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 768–771.

43. Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32. В. 4. С. 55–112.

44. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // Proc. Intern. Congr. Math. 1954. Amsterdam. V. 1. P. 315–333. / То же в кн.: А.Н.Колмогоров. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 316–332.

45. Moser J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47. Pp. 1824–1831.

46. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохрwанении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18. В. 5. С. 13–40.

47. Аносов Д. В. О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 74–192.

48. Аносов Д. В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1–18.

49. Йоккоз Ж. К. Недавнее развитие динамики // Международный конгресс математиков в Цюрихе. Избран. доклады. М.: Мир, 1999. С. 349–380.

50. Bour J. Sur l'integration des équations différentielles de la Mécanique Analytic // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 185–200.

51. Liouville J. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. Math. Pures et Appl. 1841. Pp. 1–13, 36.

52. Liouville J. Note à l'occasion du memoire précident de M. Edmond Bour // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 201–202.

53. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. В. 1. С. 3–67.

54. Козлов В. В. Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 430 с.

55. Fermi E. Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. B. 24. S. 261–265. / Рус. пер.: Э. Ферми . Науч. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 115–123.

56. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Study of Nonlinear Problems // Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report. LA, 1940. 1955. / Рус. пер.: Э. Ферми. Науч. труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647–656.

57. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. Pp. 240–243.

58. Солитоны. М.: Мир, 1983. 408 с.

59. Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях // УМН. 1960. Т. 15. В. 3 (93). С. 121–132.

60. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. М.: URSS, 400 с.

61. Atiyah M., Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. AMS. 1963. V. 69. N 3. Pp. 422–433.

62. Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Comm. Math. Phys. 1983. V. 90. Pp. 161–173.

63. Монастырский М. И. Современная математика в отблеске медалей Филдса. М.: Янус-К, 2000. 200 с.

64. Singer I. M. Future extensions of index theory and elliptic operators // Prosp. Math. Ann. Math. Soc. 1971. N 70. Pp. 171–185.

65. Atiyah M. The Dirac equation and geometry // Paul Dirac. The Man and his Work. Cambridge: CUP, 1998. Pp. 108–124.

66. Atiyah and Singer Receive 2004 Abel Prize // Notices AMS. 2004. V. 51. N 6. Pp. 649–650.

67. Donaldson S. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds // Bull. AMS. 1983. V. 8. Pp. 81–83.

68. Donaldson S., Kronheimer P. The Geometry of Four- Manifolds. Oxford: OUP, 1990. 440 p.

69. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. литературы, 1963. 292 с.

70. Atiyah M. Trends in Pure Mathematics // Proc. 3rd Int. Congr. In Math. Education. 1977. Pp. 61–74.

71. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. М.: Наука, 1985. 328 с.

72. Лотман Ю. М. Семиосфера. С.-Петербург: «Искусство—СПБ», 2000. 704 с.

REFERENCES

1. Sturm Ch. F. Mémoire sur une classe équations à différences partielles // J. Math. Pures et Appl. 1836.V. 1. Pp. 373–444.

2. Demidov S. S., Petrova S. S., Simonov N. N. Ordinary differential equations // Mathematics of XIX century. M .: Nauka, 1987. Pp. 80–183 (in Russian).

3. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. V. 7. Pp. 375–422; 1882. V. 8. Pp. 251–296; Sér. 4. 1885. V. 1. Pp. 167–244; 1886. V. 2. Pp. 151–217

4. Lyapunov A. M. The general problem of the stability of motion // Lyapunov A.M. Select. works: works on the stability of motion. Moscow: Nauka, 2007. Pp. 27–298 (in Russian).

5. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures // archive: 1409.1823.

6. Jacobi C. G. Über die Figur des Gleichgewichts // Ann. Phys. Chem. 1834. Bd. 33. S. 229–233; Gesammelte Werke. V. 2. Berlin : Verlag von G. Reimer, 1882–1891. S. 17–22.

7. Poincaré H. Sur l'équilibre d'un masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. T. 7. Pp. 259–380 ; Oeuvres de Henri Poincaré. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Pp. 40–140.

8. Bogatov E. M., Mukhin1 R. R. On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics // Chebyshevskii sbornik, V. 22. N 3. Pp. 312–345 (in Russian).

9. Leibniz W. G. Selected passages from mathematical writings // Russian Mat. Survey. 1948. V. 3. Issue 1 (23). Pp. 165–204 (in Russian).

10. Riemann B. Theorie der Abel'schen Functionen // Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. 1892. S. 88–144.

11. Klein F. A Comparative Review of Recent Researchers in Geometry // Bull. New York Math. Soc. 1893. V. 2. N 10. Pp. 215–240.

12. Euler L. Elementa doctrinae solidorum (1758) // Euler Archive. 230. Pp. 109–141.

13. Betti E. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni // Ann. Math. Pura Appl. 1870. V. 2/4. Pp. 140–158.

14. Jordan C. Sur la deformation des surfaces // J. Math. Pures et Appl. 1866. II sér. T. 11. Pp. 1–5.

15. Jordan C. Course d'Analyse. V. III. Paris, 1867. Pp. 587–594.

16. Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytechniques. II sér. 1895. Cahier 1. Pp. 1–121.

17. Medvedev F. A. Founders of functional analysis // Histor.-mat. Research. 1973. V. XVIII. Pp. 55–70 (in Russian).

18. Frechét M. Généralisation d'un théorème de Weierstrass // Comp. Ren. Acad. Sci. 1904. V. 139. Pp. 848–850.

19. Frechét M. Sur la quelques points du Calcul fonctionel // Rend. Circ. Math. Palermo. 1906. V. 22. Pp. 1–74.

20. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der loinearen Integralgleichungen III // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1905. S. 307–338.

21. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. 1923. T. 3. Pp. 123–181.

22. Banach S. Théorie des opértaions linéaires. Warrzawa, 1932. 259 p.

23. Brouwer L. E. J. Über ein eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich // J. Math. Ann. 1910. Bd. 69. S. 176–180.

24. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Math. Zeitschr. 1927. Bd. 26. S. 47–65, 417–431.

25. Schauder J. Über lineare, vollstetige Operationen // Studia. Math. 1930. Bd. 2. S. 183–196.

26. Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionelles // Ann. Ec. Norm. Sup. 1934. V. 3 (51). Pp. 43–78.

27. Bernoulli J. Ars Conjectandi. Basileae: Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713. 358 p.

28. Kolmogorov A. N. General measure theory and probability calculus // Kommun. Academy, Sat. works of math. sec. 1929. V. 1. Pp. 8–21 (in Russian).

29. Kolmogorov A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrehung. Berlin: Springer-Verl., 1933. 62 S.

30. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. Providence, Rhod Island: AMS, 1927. IX + 295 P.

31. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars T. 1. 1892. 382 p; T. 2. 1893. 476 P.

32. Hopf E. Ergodentheorie. Berlin: Springer-Verl. 1937. IV + 835 S.

33. Neumann J. von. Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1932. V. 18. Pp. 70–82.

34. Birkhoff G. D. Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems and proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1931. V. 17. Pp. 650–660.

35. Kryloff N., Bogoliouboff N. La théorie générale de la mesure dans son applications a l'étude des système dynamiques de la mécanique non lineaire // Ann. Math. 1937. V. 38. Pp. 65–113.

36. Gibbs J. W. Elementary principles in statistical mechanics. N.Y.: C. Schribner, 1902. 207 p.

37. Zaslavsky G. M. Stochasticity of dynamical systems. M.: Nauka, 1984. 272 p. (in Russian).

38. Rokhlin V. A. A generalization of a measure-preserving transformation that is not a mixing // Rep. Acad. Sci. USSR. 1949. T. 13. Pp. 329–340 (in Russian).

39. Kolmogorov A. N. A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces // Rep. Acad. Sci. USSR. 1958. № 5. Pp. 861–864 (in Russian).

40. Kolmogorov A. N. On entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms // Rep. Acad. Sci. USSR. 1959. T. 124. № 4. Pp. 754–755 (in Russian).

41. Sinai Ya. G. Written communication on 26.03.2007.

42. Sinai Ya. G. On the concept of the entropy of dynamical systems // Rep. Acad. Sci. USSR. 1959. T. 124. № 4. Pp. 768–771 (in Russian).

43. Pesin Ya. B. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory // Russian Mat. Survey. 1977. T. 32. V. 4. Pp. 55–112 (in Russian).

44. Kolmogorov A. N. General theory of dynamical systems and classical mechanics // Selected works of A.N. Kolmogorov. V. 1. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. Pp. 355–375.

45. Moser J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47. Pp. 1824–1831.

46. Arnold V. I. Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the conservation of conditionally periodic motions with a small change in the Hamilton function // Russian Mat. Survey. 1963. T. 18. V. 5. Pp. 13–40 (in Russian).

47. Anosov D. V. On the development of the theory of dynamical systems over the last quarter of a century // Student readings of the MK IMU. Issue. 1. M.: MTsNMO, 2000. Pp. 74–192 (in Russian).

48. Anosov D. V. Dynamical Systems in the 1960s: The Hyperbolic Revolution // Mathematical events of the twentieth century. Springer, 2006. Pp. 1–17.

49. Yoccoz J.-C. Recent developments in Dynamics // Proc. Int. Congress Mathematicians, V. 1, 2. Zurich: Birkhauser, 1995. Pp. 246–265.

50. Bour J. Sur l'integration des équations différentielles de la Mécanique Analytic // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 185–200.

51. Liouville J. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. Math. Pures et Appl. 1841. Pp. 1–13, 36.

52. Liouville J. Note à l'occasion du memoire précident de M. Edmond Bour // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. Pp. 201–202.

53. Kozlov V. V. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // Russian Mat. Survey. 1983. T. 38. V. 1. Pp. 3–67 (in Russian).

54. Kozlov V. V. Symmetry, topology and resonances in Hamiltonian mechanics. Izhevsk: Udmurt Univ. Publ. House, 1995. 430 p. (in Russian).

55. Fermi E. Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. B. 24. S. 261–265.

56. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Study of Nonlinear Problems // Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report. LA, 1940. 1955.

57. Zabusky N. J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. Pp. 240–243.

58. Solitons. M.: Mir, 1983. 408 p. (in Russian).

59. Gelfand I. M. On elliptic equations // Russian Mat. Survey. 1960. T. 15. V. 3 (93). Pp. 121–132. (in Russian).

60. Shvartz A. S. Quantum field theory and topology. M.: Nauka, 1989. 400 p. (in Russian).

61. Atiyah M., Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. AMS. 1963. V. 69. N 3. Pp. 422–433.

62. Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Comm. Math. Phys. 1983. V. 90. Pp. 161–173.

63. Monastyrsky M. I. Modern Mathematics in the Reflection of the Fields Medals. M.: Janus-K, 2000. 200 p. (in Russian).

64. Singer I. M. Future extensions of index theory and elliptic operators // Prosp. Math. Ann. Math. Soc. 1971. N 70. Pp. 171–185.

65. Atiyah M. The Dirac equation and geometry // Paul Dirac. The Man and his Work. Cambridge: CUP, 1998. Pp. 108–124.

66. Atiyah and Singer Receive 2004 Abel Prize // Notices AMS. 2004. V. 51. N 6. Pp. 649–650.

67. Donaldson S. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds // Bull. AMS. 1983. V. 8. Pp. 81–83.

68. Donaldson S., Kronheimer P. The Geometry of Four- Manifolds. Oxford: OUP, 1990. 440 p.

69. Bourbaki N. Essays on the history of mathematics. M.: Foreign Literature Publ House, 1963. 292 p. (in Russian).

70. Atiyah M. Trends in Pure Mathematics // Proc. 3rd Int. Congr. In Math. Education. 1977. Pp. 61–74.

71. Prigogine I. From being to becoming : time and complexity in the physical sciences. San Francisco : W. H. Freeman, 1980. 262 p.

72. Lotman Yu. M. Semiosphere. St. Petersburg: Art-SPB, 2000. 704 p. (in Russian).

Получено: 23.06.2022
Принято в печать: 22.12.2022