ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 2 (2014)

УДК 519.4

ПРОБЛЕМА СОПРЯЖЕННОСТИ СЛОВ В HNN-РАСШИРЕНИИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРОХОДНЫХ БУКВ ДРЕВЕСНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Е. С. Логачева (Тула)

Аннотация

Решение проблемы сопряженности слов представляет интерес в свободных конструкциях групп. Для свободных групп с объединением по циклической подгруппе проблема была решена С.Липшуцем. Также указанная проблема была решена А. Фридманом в HNN-расширении свободной группы по ассоциированным циклическим подгруппам. Для HNN-расширения древесного произведения циклицесиких групп с ассоциированными циклическими подгруппами проблема сопряженности слов решена автором в соавторстве с В.Н. Безверхним.

В данной работе положительно решена проблема сопряженности слов в HNN-расширении с помощью системы правильных проходных букв. В качестве базовой группы HNN-расширения рассматривается древесное произведение бесконечных циклических групп с объединением по бесконечной циклической подгруппе. Результат является обобщением проблемы сопряженности в HNN-расширении древесного произведения циклических групп по ассоциированным циклическим подгруппам с помощью одной проходной буквы. Используя метод математической индукции утверждение доказывается для любого числа проходных букв. В процессе доказательства основной теоремы доказаны утверждения, которые представляют самостоятельный результат:

- алгоритмическая разрешимость пересечения конечно порожденной подгруппы основной группы с ассоциированной подгруппой;

- алгоритмическая разрешимость пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы основной группы с ассоциированной подгруппой.

Ключевые слова: группа, подгруппа, HNN-расширение, древесное произведение, проблема сопряженности.

Библиография: 13 названий.

THE PROBLEM OF THE CONJUGATION OF WORDS IN HNN-EXTENSION WITH A FINITE NUMBER ENTRANCE LETTERS OF A TREE PRODUCT OF CYCLIC GROUPS WITH CYCLIC AMALGAMATION

E. S. Logacheva (Tula)

Abstract

In the work of the positive solution of the conjugation of words in HNN-extension with the system of entrance letters. The base HNN-extensions is a wood product of the infinite cyclic groups with cyclic subgroups. The result is a generalization of the conjugacy problem in HNN-extension of a wood product of cyclic groups associated cyclic subgroups with one entrance letter.

The conjugacy problem for words is of interest in free designs groups. The problem was solved in free groups with cyclic subgroups by S.Lipshutz, in the HNN-extension of a free group by an associate of cyclic subgroups by A. Friedman, in HNN-extension of a tree product with the association cyclic groups associated with cyclic subgroups by author with V.N. Bezverkhny.

In this paper a positive solution of the conjugation problem for words in HNN-extension with the system of entrance letters. The base HNN-extensions is a tree product of the infinite cyclic groups with cyclic subgroups. The result is a generalization of the conjugacy problem in HNN-extension of a wood product of cyclic groups associated cyclic subgroups with one entrance letters. Assertion is proved for any number of entrance letters using the method of mathematical induction. In the proof of the main theorem the author proved self result assertion :

- algorithmic solvability of intersection of finitely generated subgroup of the core group with an associated sub-group;

- algorithmic solvability of intersection of the related class of finitely generated subgroup of the core group with an associated sub-group.

Keywords: the group, the subgroup, the HNN-extension, the tree product, the conjugacy problem.

Bibliography: 13 titles.

1. Введение

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли элемент $h \in G$ такой, что $h^{-1}w_1h = w_2$.*

Известно, что в свободных группах проблема сопряженности слов разрешима. [13]

С. Липшуцем была установлена разрешимость проблемы сопряженности слов в классе групп $F_m *_C F_n$, где F_m и F_n - свободные группы рангов $m, n < \infty$, C - циклическая подгруппа. [11]

Фридманом А.А. была решена проблема сопряженности слов в группе

$$\langle F_m, t | t^{-1} v_i^{p_{ij}} t = v_j^{q_{ji}} \rangle,$$

где F_m — свободная группа, $m < \infty, v_i, v_j \in F_m$. [12] Из этого результата следует, что проблема сопряженности слов разрешима в группе $\langle a, t | t^{-1} a^m t = a^n \rangle$. Автором совместно с В.Н.Безверхним доказана разрешимость проблемы сопряженности конечно порожденных подгрупп группы $\langle a, t | t^{-1} a^m t = a^n \rangle$. [6]

Пусть Г конечный дерево-граф и каждой его вершине v_i соответствует бесконечная циклическая группа $\langle a_i \rangle$, причем, если вершинам некоторого ребра e графа Г соответствуют образующие a_i и a_j, то самому ребру соответствуют ассоциированные подгруппы $\langle a_i^{m_{ij}} \rangle = \langle a_j^{n_{ji}} \rangle$. Тогда группа G_Γ, соответствующая графу Г называется древесным произведением циклических групп с ассоциированными циклическими подгруппами.

Копредставление группы G_Γ имеет вид:

$$G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^{n} * \langle a_k \rangle | a_i^{m_{ij}} = a_j^{n_{ji}} \rangle, |m_{ij}|, |n_{ji}| \geqslant 1, i, j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $\langle a_i^{m_{ij}} \rangle$ и $\langle a_j^{n_{ji}} \rangle$ ассоциированные подгруппы.

Утверждение 1. *В группе G_Γ разрешима проблема сопряженности слов.*

Лемма 1. [9] *Для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle a_k \rangle$, $k = \overline{1, n}$ существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k \rangle$.*

Лемма 2. [9] *Для любого слова $v \in G_\Gamma$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение смежного класса vH с циклической подгруппой из сомножителя $\langle a_k \rangle$, а именно $vH \cap \langle a_k \rangle$, где $k = \overline{1, n}$.*

Известно также, что в группе G_Γ разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп. [9]

Рассмотрим HNN-расширение группы G_Γ с помощью правильной проходной буквы t:

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel G_\Gamma, t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle, \tag{2}$$

где $U_1 = \langle a_i^{s_{ij}} \rangle, U_{-1} = \langle a_j^{k_{ji}} \rangle, |s_{ij}|, |k_{ji}| \geqslant 1, i, j = \overline{1, n}$.

Далее, рассмотрим HNN-расширение группы G_Γ с помощью конечного числа правильных проходных букв $t_1, t_2, ..., t_m$:

$$\overline{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, t_1, t_2, ..., t_m | rel G_\Gamma, t_s^{-1} U_s t_s = U_{-s} \rangle, \tag{3}$$

где $U_s = \langle a_i^{s_{ij}} \rangle, U_{-s} = \langle a_j^{k_{ji}} \rangle, |s_{ij}|, |k_{ji}| \geqslant 1, i, j = \overline{1, n}, s = \overline{1, m}$.

Наша цель доказать основную теорему

Теорема 1. *В группе $\overline{G}_\Gamma^*$ разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство основной теоремы будем вести индукцией по числу проходных букв.

2. База индукции

Докажем разрешимость проблемы сопряженности слов в группе

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | rel G_\Gamma, t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle,$$

где $U_1 = \langle a_i^{s_{ij}} \rangle, U_{-1} = \langle a_j^{k_{ji}} \rangle, |s_{ij}|, |k_{ji}| \geqslant 1, i, j = \overline{1, n}$.

Известно [13], что каждый элемент $g \in \overline{G}_\Gamma$ может быть единственным образом представлен в виде:

$$g = B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} ... B_k t^{\varepsilon_k} B_{k+1}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, k}$. Слоги $B_j, j = \overline{1, k+1}$ - представители левого класса смежности группы G_Γ по подгруппе U_1, если $\varepsilon_j = 1$, и по подгруппе U_{-1}, если $\varepsilon_j = -1$.

Обозначим X - множество представителей левых смежных классов группы G_Γ по подгруппе U_1, Y - множество представителей левых смежных классов группы G_Γ по подгруппе U_{-1}. Тогда $X^{-1} = \{x | x^{-1} \in X\}$ и $Y^{-1} = \{y | y^{-1} \in Y\}$ - множества представителей правых смежных классов группы G_Γ по подгруппам U_1 и U_{-1} соответственно.

Буквой l будем обозначать элементы из множества представителей левых классов смежности, буквой r - представителей правых смежных классов. Тогда несократимое слово (4), имеющее нечетное число слогов можно представить в виде:

$$g = t^\alpha l_{1g} t^{\varepsilon_1} l_{2g} t^{\varepsilon_2} ... l_{sg} t^{\varepsilon_s} K_g t^{\varepsilon'_s} r_{sg} t^{\varepsilon'_{s-1}} ... t^{\varepsilon'_1} r_{1g} t^\beta, \tag{5}$$

где $\alpha = 0, \pm 1$, $\beta = 0, \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\varepsilon'_i = \pm 1$, $i = \overline{1, s}$, K_g - ядро слова g, причем если $K_g \in U_1$ и $\varepsilon'_s = -1$, то $\varepsilon_s \neq 1$, аналогично, если $K_g \in U_{-1}$ и $\varepsilon_s = 1$, то $\varepsilon'_s \neq -1$.

Несократимое слово, имеющее четное число слогов, может быть представлено в виде:

$$g = t^\alpha l_{1g} t^{\varepsilon_1} l_{2g} t^{\varepsilon_2} ... l_{sg} t^{\varepsilon_s} h t^{\varepsilon'_s} r_{sg} t^{\varepsilon'_{s-1}} ... t^{\varepsilon'_1} r_{1g} t^\beta, \tag{6}$$

где $h \in U_1$, если $\varepsilon_s = 1$ и $h \in U_{-1}$, если $\varepsilon_s = -1$.

Под длиной слова g будем понимать длину несократимого равного ему слова g'. Под длиной слова (5) будем понимать число $l(g) = 2s + 1$, под длиной слова (6) - число $l(g) = 2s$. Представление слова группы $\overline{G}_\Gamma$ в несократимой форме (5) или (6) будем называть каноническим представлением.

Определение 2. [1]*Слова вида* $t^{\alpha}l_{1g}t^{\varepsilon_1}l_{2g}t^{\varepsilon_2}...l_{sg}t^{\varepsilon_s}K_g t^{\varepsilon'_s}r_{sg}t^{\varepsilon'_{s-1}}...t^{\varepsilon'_1}r_{1g}t^{\beta}$, *у которых* $t^{\alpha}l_{1g}t^{\varepsilon_1}l_{2g}t^{\varepsilon_2}...l_{sg}t^{\varepsilon_s} = (t^{\varepsilon'_s}r_{sg}t^{\varepsilon'_{s-1}}...t^{\varepsilon'_1}r_{1g}t^{\beta})^{-1}$ *будем называть трансформами.*

Определение 3. [1] *Слова вида* $t^{\alpha}l_{1g}t^{\varepsilon_1}l_{2g}t^{\varepsilon_2}...l_{sg}t^{\varepsilon_s}K_g t^{\varepsilon'_s}r_{sg}t^{\varepsilon'_{s-1}}...t^{\varepsilon'_1}r_{1g}t^{\beta}$, *не являющиеся трансформами, а так же слова вида*

$$t^{\alpha}l_{1g}t^{\varepsilon_1}l_{2g}t^{\varepsilon_2}...l_{sg}t^{\varepsilon_s}ht^{\varepsilon'_s}r_{sg}t^{\varepsilon'_{s-1}}...t^{\varepsilon'_1}r_{1g}t^{\beta}$$

будем называть нетрансформами. Причем нетрансформы типа (5) *- нетрансформы нечетной длины, а типа* (6) *- нетрансформы четной длины.*

В слове (5) начальный $t^{\alpha}l_{1g}t^{\varepsilon_1}l_{2g}t^{\varepsilon_2}...l_{sg}t^{\varepsilon_s}$ отрезок назовем закрытой левой половиной, конечный отрезок $t^{\varepsilon'_s}r_{sg}t^{\varepsilon'_{s-1}}...t^{\varepsilon'_1}r_{1g}t^{\beta}$ назовем закрытой правой половиной, а отрезки $t^{\alpha}l_{1g}t^{\varepsilon_1}l_{2g}t^{\varepsilon_2}...l_{sg}t^{\varepsilon_s}K_g t^{\varepsilon'_s}$ - закрытым большим начальным отрезком, $t^{\varepsilon_s}K_g t^{\varepsilon'_s}r_{sg}t^{\varepsilon'_{s-1}}...t^{\varepsilon'_1}r_{1g}t^{\beta}$ - закрытым большим конечным отрезком.

У слова вида (6) начальный $t^{\alpha}l_{1g}t^{\varepsilon_1}l_{2g}t^{\varepsilon_2}...l_{sg}t^{\varepsilon_s}$ отрезок назовем закрытой левой половиной, конечный отрезок $t^{\varepsilon'_s}r_{sg}t^{\varepsilon'_{s-1}}...t^{\varepsilon'_1}r_{1g}t^{\beta}$ назовем закрытой правой половиной.

В слове

$$g = t^{\alpha}B_1t^{\varepsilon_1}B_2t^{\varepsilon_2}...t^{\varepsilon_{i-1}}B_it^{\varepsilon_i}...B_kt^{\varepsilon_k}B_{k+1}t^{\beta},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1,n}$ отрезок $t^{\alpha}B_1t^{\varepsilon_1}B_2t^{\varepsilon_2}...t^{\varepsilon_{i-1}}B_i$ назовем начальным открытым отрезком, а $t^{\alpha}B_1t^{\varepsilon_1}B_2t^{\varepsilon_2}...t^{\varepsilon_{i-1}}B_it^{\varepsilon_i}$ - начальным закрытым отрезком. Аналогичные понятия вводятся для конечных отрезков.

Пусть $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ - конечное множество слов группы $\overline{G}_{\Gamma}$, каждое из которых приведено к виду (5) либо (6). Будем говорить, что у слова

$$w_j^{\varepsilon} = t^{\alpha_j}B_1t^{\varepsilon_1}B_2t^{\varepsilon_2}...B_kt^{\varepsilon_k}B_{k+1}t^{\beta_j},$$

где $\alpha_j = 0, \pm 1$, $\beta_j = 0, \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_i = -1$, $i = \overline{1,k}$, $w_j \in W$, закрытый начальный отрезок изолирован в W, если он не является начальным отрезком ни у какого $w_i^{\eta} \in W$, $\eta = \pm 1$, $w_i \in W$.

Определение 4. [1] *Назовем конечное множество слов* $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *группы* $\overline{G}_{\Gamma}$ *специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1) закрытая левая половина слова $w_i \in W$, *являющегося нетрансформой, изолирована в* W; *если* w_i *- нетрансформа четной длины, то ее закрытая левая половина и закрытая правая половина изолированы в* W;

2) длину произвольного элемента $w_j \in W$ *нельзя уменьшить, умножая на слово* $v \in \langle\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}\rangle$, *где* $l(v) < l(w_j)$;

3) пусть

$$w_j^{\varepsilon} = t^{\alpha}l_{1w_j}t^{\varepsilon_1}l_{2w_j}t^{\varepsilon_2}\dots l_{sw_j}t^{\varepsilon_s}K_{w_j}t^{\varepsilon'_s}r_{sw_j}t^{\varepsilon'_{s-1}}\dots t^{\varepsilon'_1}r_{1w_j}t^{\beta},$$

где $\alpha = 0, \pm 1$, $\beta = 0, \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$, w_j *— нетрансформа вида (5) из* W *либо*

$$w_j'^{\varepsilon} = t^{\alpha}l_{1w_j}t^{\varepsilon_1}l_{2w_j}t^{\varepsilon_2}\dots l_{sw_j}t^{\varepsilon_s}ht^{\varepsilon'_s}r_{sw_j}t^{\varepsilon'_{s-1}}\dots t^{\varepsilon'_1}r_{1w_j}t^{\beta},$$

где $\alpha = 0, \pm 1$, $\beta = 0, \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$, w'_j *— нетрансформа вида (6) из* W *и*

$$\{w_y^{\eta_y} = t^{\alpha_y} l_{1w_y} t^{\varepsilon_{1y}} l_{2w_y} t^{\varepsilon_{2y}} \dots l_{sw_t} t^{\varepsilon_{sy}} \dots r_{i+1,w_y} t^{\varepsilon'_i} r_{iw_y} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_j}\},$$

где $\eta_y = \pm 1$, $\alpha_y = 0, \pm 1$;

подмножество нетрансформ из

$$\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j \cup \{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j^{-1},$$

закрытая правая половина которых оканчивается на $t^{\varepsilon'_i} r_{iw_y} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_j}$, *тогда если подгруппа*

$$H = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle \cap t^{-\beta_j} r_{1w_j}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} \dots r_{iw_y}^{-1} t^{-\varepsilon'_i} G_\Gamma t^{\varepsilon'_i} r_{iw_y} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_j} \neq E$$

(E *— единичная подгруппа), то* $l(w_y u) \geqslant l(w_y)$, $l(w_y u w_y^{-1}) \geqslant l(w_y)$, *где* $u \in H$*;*

4) пусть $w_i^{\varepsilon} = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} ... l_{pw_i} t^{\varepsilon_p} ... t^{\varepsilon'_i} r_{iw_i} ... t^{\varepsilon'_1} r_{1w_i} t^{\beta_1}$,

$$w_j^{\eta} = t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} l_{2w_j} t^{\eta_2} ... l_{pw_j} t^{\eta_p} ... t^{\eta'_i} r_{iw_j} ... t^{\eta'_1} r_{1w_j} t^{\beta_2},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, $\alpha_t = 0, \pm 1$, $\beta_t = 0, \pm 1$, $t = 1, 2$ *- слова из множества, не обязательно различные,* $t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} ... l_{pw_i} t^{\varepsilon_p}$ *- начальное подслово левой половины* w_i^{ε}, $t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} l_{2w_j} t^{\eta_2} ... l_{pw_j} t^{\eta_p}$ *- начальное подслово левой половины* w_j^{η}, *если* $t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} ... l_{pw_i} t^{\varepsilon_p} \neq w_i^{\varepsilon}$, $t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} l_{2w_j} t^{\eta_2} ... l_{pw_j} t^{\eta_p}$, *то не существует слова* $w \neq 1$, $l(w) < 2p$, $w \in \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$ *, такого что*

$$w w_j^2 = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} ... t^{\varepsilon_{p-1}} l_{pw_i} t^{\eta_p} {l'}_{p+1,w_j} ... {t'}^{\eta_i} r_{iw_j} ... r_{1w_j} t.$$

Разобьем множество $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ на подмножества следующим образом: трансформы с одинаковыми крыльями объединим в подмножество $M_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, все нетрансформы из $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ объединим в множество M_0. Каждое множество $M_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ порождает подгруппу:

$$(M_i) = t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\varepsilon_{1i}} ... r_{n,i}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,i}} A_i t^{\varepsilon_{n,i}} r_{n,i} ... r_{1i} t^{\alpha_i},$$

где $\alpha_i = 0, \pm 1$, $\varepsilon_{i,j} = \pm 1$, A_i - подгруппа группы G_Γ, порожденная ядрами трансформ с крыльями $t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\varepsilon_{1i}} ... r_{n,i}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,i}}$. Упорядочиваем множество подгрупп (M_i) по длине крыльев порождающих трансформ:

$$(M_{i_1}) \leqslant (M_{i_2}) \leqslant ... \leqslant (M_{i_k}). \tag{7}$$

Лемма 3. [*1*] *Ряд* (7) *можно преобразовать в ряд* (8)

$$(M'_{i_1}) \leqslant (M'_{i_2}) \leqslant ... \leqslant (M'_{i'_k}). \tag{8}$$

со следующими свойствами:

1) $gp((M_0),(M_{i_1}),...,(M_{i_k}))=gp((M'_0),(M'_{i_1}),...,(M'_{i'_k}))$*;*

2) если подгруппе $(M'_j)=t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}t^{-\varepsilon_{1j}}...r_{n,j}^{-1}t^{-\varepsilon_{n,j}}A'_jt^{\varepsilon_{n,j}}r_{n,j}...r_{1j}t^{\alpha_j}$, $\alpha_j=0,\pm1$, *ряда* (8) *принадлежит трансформа*

$$w=t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}t^{-\varepsilon_{1j}}...r_{n,j}^{-1}t^{-\varepsilon_{n,j}}ht^{\varepsilon_{n,j}}r_{n,j}...r_{1j}t^{\alpha_j},$$

где $h\in U_1$, *если* $t^{\varepsilon_{n,j}}=1$ *или* $h\in U_{-1}$, *если* $t^{\varepsilon_{n,j}}=-1$, *то среди подгрупп ряда* (8) *имеется подгруппа*

$$(M'_{i_s})=t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}t^{-\varepsilon_{1j}}...r_{n-1,j}^{-1}t^{-\varepsilon_{n-1,j}}A'_{is}t^{\varepsilon_{n-1,j}}r_{n-1,j}...r_{1j}t^{\alpha_j},$$

содержащая w*;*

3) если для некоторой трансформы $w\in(M'_j)$ *и некоторой нетрансформы* $y\in(M_0)$ *при* $l(y)=2m+1$ *(левая закрытая половина* y *изолирована) и* $l(y^{-1}wy)\leqslant l(y)$, *то существует подгруппа* (M'_{is}) *ряда* (8), *содержащая трансформу* $y^{-1}wy$, *а при* $l(y^\varepsilon wy^{-\varepsilon})<l(y)$ *и* $l(y)=2m+1$ *либо* $l(y)=2m$ *существует* (M'_{is}) *из ряда* (8), *содержащая* $y^\varepsilon wy^{-\varepsilon}$*;*

4) пусть $(M'_j)=t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}t^{-\varepsilon_{1j}}...r_{n,j}^{-1}t^{-\varepsilon_{n,j}}A'_jt^{\varepsilon_{n,j}}r_{n,j}...r_{1j}t^{\alpha_j}$ *- подгруппа из ряда* (8) *и* $v=t^{-\alpha_j}r_{1j}^{-1}t^{-\varepsilon_{1j}}...r_{n,j}^{-1}t^{-\varepsilon_{n,j}}r_{n+1,j}^{-1}t^{-\varepsilon_{n+1,j}}$ *- подслово левой половины* w_i^ε, $w_i^\varepsilon\in\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, *не являющейся изолированной закрытой левой половиной* w_i^ε *в специальном множестве* $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, *тогда, если подгруппе* (M'_j) *принадленит трансформа* $w\in v^{-1}G_\Gamma v$, *то ряду* (8) *принадлежит подгруппа* $(M'_s)=v^{-1}A'_sv$ *и* $w\in(M'_s)$.

Лемма 4. [*1*] *Подгруппа* M_0, *порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.*

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, будем обозначать $gp(M_0,S)$. Она представляет собой HNN - группу с основой S, являющуюся древесным произведением подгрупп ряда (8), правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы (M_0) и (M_j), $j=\overline{1,k}$, из ряда (8) будем называть порождающими подгруппами подгруппы $\langle w_1,\dots w_N\rangle=gp(M_0,S)$.

Определение 5. [*1*] *Произведение* $u_1...u_k$ *назовем словом подгруппы*

$$\langle w_1,\dots,w_N\rangle=gp(M_0,S)$$

группы $\overline{G}_\Gamma$, *если:*

1) $u_i\neq1$*;*

2) $u_i\in\{M_0\cup M_0^{-1}\}$, *либо* u_i *принадлежат некоторой подгруппе из ряда* (8)*;*

3) $u_i\neq u_{i+1}^{-1}$*;*

4) u_i,u_{i+1} *не содержатся в одной подгруппе ряда* (8)*;*

5) в $u_1...u_k$ *нет произведения* $u_iu_{i+1}u_{i+2}(i=\overline{1,k-2})$, *где* $u_i=u_{i+2}^{-1}$, $u_i\in\{M_0\cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1}\in(M_j)$ *и* $u_iu_{i+1}u_{i+2}\in(M_s)$, (M_j), (M_s) *- из ряда* (8).

Лемма 5. [1] *Всякое произведение* $w_{i_1}^{\varepsilon_1}...w_{i_m}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, *где* w_{i_j} *- образующие подгруппы* $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$, *через конечное число шагов можно привести к слову* $u_{i_1}...u_{i_k}$, $k \leqslant m$, *подгруппы* $gp(M_0, S) = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$.

Теорема 2. [1] *Пусть группа*

$$G^* = \langle G, t | t^{-1} U_1 t = \varphi(U_1) \rangle$$

- HNN-расширение группы G *с помощью изоморфных подгупп* U_1 *и* U_{-1} *и фиксированного конструктивного изоморфизма* φ. *Тогда, если подгруппы* U_1 *и* U_{-1} *обладают условием максимальности и в группе* G *разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ *с каждой из подгрупп* U_1 *и* U_{-1}*;*

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ *с любой из выделенных подгрупп* U_1 *и* U_{-1}*,*

то разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G^* *в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.*

Для группы $\overline{G}_\Gamma$ выполняются все условия теоремы 2, следовательно, образующие подгруппы группы $\overline{G}_\Gamma$ можно привести к специальным образующим, порождающим ту же самую подгруппу. Покажем, что в группе $\overline{G}_\Gamma$ будут справедливы утверждения, аналогичные леммам 1 и 2.

Лемма 6. *Для любой конечно порожденной подгруппы* $H < \overline{G}_\Gamma$ *и циклической подгруппы* $\langle a_k \rangle$, $k = \overline{1,n}$, *где* a_k *- образующий группы* G_Γ, *существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения* $H \cap \langle a_k \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H - конечно порожденная подгруппа группы $\overline{G}_\Gamma$, выберем образующий $a_k \in G_\Gamma$, $k = \overline{1,n}$. Приведем образующие подгруппы H к специальным образующим: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (8): $M_1 \leqslant M_2 \leqslant ... \leqslant M_k$. Выясняем существует ли в S подгруппа $(M_{s_1}) < \overline{G}_\Gamma$, состоящая из трансформ длины 1. Далее определяем пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle a_k \rangle$. Таким образом, $(M_{s_1}) \cap \langle a_k \rangle = H \cap \langle a_k \rangle$, $k > 1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого слова* $v \in \overline{G}_\Gamma$ *и любой конечно порожденной подгруппы* $H < \overline{G}_\Gamma$, *существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение* $vH \cap \langle a_k \rangle$, *где* $a_k \in G_\Gamma$ $k = \overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть подгруппа $H < \overline{G}_\Gamma$ и слово $v \in \overline{G}_\Gamma$, причем $v \notin H$, $v = l_1 t^{\eta_1} l_2 t^{\eta_2} ... l_s t^{\eta_s} h t^{\varepsilon_s} r_s ... t^{\varepsilon_1} r_1$, где $l_i, r_i \in G_\Gamma, \eta_i, \varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1,n}$. Найдем пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$. Перепишем образующие подгруппы H в виде специального множества: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (8).

Возьмем произвольное слово $u \in H$, пусть $u = u_1u_2...u_n$. Выясним, в каких случаях в произведении vu будут проходить сокращения:

а) Пусть слог u_1 является трансформой. Выделим в слове v справа подслово $v_\Pi = t^{\varepsilon_i}r_i...t^{\varepsilon_1}r_1$ максимальной длины, которое совпадает с крыльями одной из подгрупп ряда (8): $(M_i) = (v_\Pi^{-1}A_iv_\Pi)$. Тогда в слове

$$v = l_1t^{\eta_1}l_2t^{\eta_2}...l_st^{\eta_s}ht^{\varepsilon_s}r_s...r_{i+1}t^{\varepsilon_i}r_i...t^{\varepsilon_1}r_1,$$

обозначив $r_{i+1} = K_0$, получим $v = v_\Lambda K_0v_\Pi$. Среди трансформ подгруппы (M_i) определяем трансформу $v_\Pi^{-1}K_1v_\Pi$ удовлетворяющую условиям:

$$vu = v_\Lambda K_0v_\Pi v_\Pi^{-1}K_1v_\Pi u_2...u_n = v_\Lambda(K_0K_1)v_\Pi u_2...u_n,$$

$$vu = l_1t^{\eta_1}...t^{\eta_s}ht^{\varepsilon_s}r_s...t^{\varepsilon_{i+1}}(K_0K_1)t^{\varepsilon_i}r_i...t^{\varepsilon_1}r_1u_2...u_n.$$

Выясняем, принадлежит ли произведение K_0K_1 ассоциированной подгруппе, т.е. $K_0K_1 \in U_1$, если $\varepsilon_{i+1} = -1$ и $\varepsilon_i = 1$, либо $K_0K_1 \in U_{-1}$, если $\varepsilon_{i+1} = 1$ и $\varepsilon_i = -1$. Случай сводится к пересечению $K_0\langle A_i\rangle \cap U_\varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$.

б) Пусть u_1 — нетрансформа с неизолированной левой половиной: $u_1 = v_\Pi^{-1}K_2v'$, где $v' = t^{\varepsilon'_i}r'_i...t^{\varepsilon'_1}r'_1$, а подслово v_Π^{-1} является крылом одной из трансформ ряда (8): $(M_i) = (v_\Pi^{-1}A_iv_\Pi)$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_i) такая $v_\Pi^{-1}K_1v_\Pi$, что произведение $K_0K_1K_2 \in U_1$, если $\varepsilon_{i+1} = -1$ и $\varepsilon'_i = 1$, либо $K_0K_1K_2 \in U_{-1}$, если $\varepsilon_{i+1} = 1$ и $\varepsilon'_i = -1$. Случай сводится к пересечению $K_0K_2(K_2^{-1}\langle A_i\rangle K_2) \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$.

в) если u_1 — нетрансформа с изолированной левой половиной: $u_1 = v_\Pi^{-1}Kv'$, v_Π^{-1} — изолирована и среди подгрупп ряда (8) содержится подгруппа $(M_j) = (v'^{-1}A_jv')$, а так же среди нетрансформ содержится $u_2 = v'^{-1}K_2v''$, $v'' = t^{\varepsilon''_i}r''_i \dots \dots t^{\varepsilon''_1}r''_1$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_j) такая $v'^{-1}K_1v'$, что произведения $K_0KK_1 \in U_1$ или $K_0KK_1K_2 \in U_1$, если $\varepsilon_{i+1} = -1$ и $\varepsilon'_i = 1$, либо $K_0KK_1 \in U_{-1}$ или $K_0KK_1K_2 \in U_{-1}$, если $\varepsilon_{i+1} = 1$ и $\varepsilon''_i = -1$. Случай сводится к пересечению $K_0K\langle A_i\rangle \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ или $K_0KK_2(K_2^{-1}\langle A_i\rangle K_2) \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$.

В результате через конечное число шагов построим приведенное слово vu. Положительное решение проблемы возможно лишь в том случае, когда $l(vw) = 1$ и слово vw не содержит t. Тогда выясняем, существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1}A_ig_i$ ряда (8) подгруппа $(M_{s_1}) = A_{s1}$ и рассматриваем $vu(M_{s_1}) \cap \langle a_k\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 8. *[11] (Коллинза) Пусть $G^* = \langle G, t; t^{-1}At = B, \varphi\rangle$ - некоторое HNN-расширение. Пусть $u = g_0t^{\varepsilon_1}...t^{\varepsilon_n}$ и v - сопряженные циклически приведенные элементы из G^*. Тогда длины $l(u) = l(v)$, а элемент u можно получить из v, беря подходящую циклическую перестановку элемента v, оканчивающуюся на t^{ε_n}, и сопрягая затем элементом $z \in A$, если $\varepsilon_n = -1$, и $z \in B$, если $\varepsilon_n = 1$.*

Утверждение 2. *Пусть* $w_1 \in G_\Gamma, w_2 \in G_\Gamma$, *причем* w_1 *и* w_2 *одновременно не сопряжены ассоциированной подгруппе* $U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$. *Слова* w_1 *и* w_2 *сопряжены в группе* $\overline{G}_\Gamma$ *тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе* G_Γ.

Теорема 3. *В группе* $\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | t^{-1}U_1 t = U_{-1}\rangle, U_1 = \langle a_i^{s_{ij}}\rangle, U_{-1} = \langle a_j^{k_{ji}}\rangle$, *разрешима проблема сопряженности слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $w, v \in G_\Gamma$ и не сопряжены ассоциированной подгруппе, то по утверждению 2 слова w, v сопряжены в $\overline{G}_\Gamma$ тогда и только тогда когда они сопряжены в группе G_Γ.

Пусть теперь $w, v \in \overline{G}_\Gamma$ - циклически несократимые слова. В соответствии с леммой 8 слово w может быть получено из некоторой циклической перестановки v^* слова v сопряжением элементом h из ассоциированной подгруппы, $h \in U_\varepsilon$, т.е. $hwh^{-1} = v^*$. Пусть $w = t^{\varepsilon_1}B_1 t^{\varepsilon_2}B_2 t^{\varepsilon_3}B_3 ... t^{\varepsilon_k}B_k$ и $v^* = t^{\eta_1}A_1 t^{\eta_2}A_2 t^{\eta_3}A_3 ... t^{\eta_k}A_k$, - нормальные формы слов w, v^*, такие что $\varepsilon_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1,$, $B_i, A_i \in G_\Gamma$, $B_i \neq 1, A_i \neq 1$, $i = \overline{1,k}$. Следует отметить, что для положительного решения проблемы сопряженности необходимо, чтобы $l(w) = l(v^*)$ и $\varepsilon_i = \eta_i$, $i = \overline{1,k}$. Таким образом $v^* = t^{\varepsilon_1}A_1 t^{\varepsilon_2}A_2 t^{\varepsilon_3}A_3 ... t^{\varepsilon_k}A_k$. Причем,

если $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $B_i, A_i \notin U_1$;

если $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $B_i, A_i \notin U_{-1}$.

Найдем такое $h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, что

$$hw = v^* h. \tag{9}$$

Слово h будем строить последовательно из $h_1, h_2, ..., h_k$, таких что каждое принадлежит ассоциированной подгруппе, причем h_1 переводит B_1 в A_1, h_2 переводит B_2 в A_2 и A_1 оставляет без изменения и т.д.

1) Пусть $h_1 \in U_{\varepsilon_1}$ и так как с помощью элемента h_1 слог B_1 переходит в A_1, то должно выполняться равенство:

$$h_1 t^{\varepsilon_1} B_1 = t^{\varepsilon_1} A_1 \overline{h}_1, \tag{10}$$

где $\overline{h}_1 \in U_{\varepsilon_2}$. Из разрешимости проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической в группе $\overline{G}_\Gamma$ выясняем разрешимость равенства (10):

$$B_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} U_{\varepsilon_1} t^{\varepsilon_1} B_1 \cap B_1^{-1} A_1 U_{\varepsilon_2}.$$

Из пересечения находим подходящее h_1. Если существует $h_1' \in U_{\varepsilon_1}$, такое что и для него выполняется равенство (10): $h_1' t^{\varepsilon_1} A_1 = t^{\varepsilon_1} A_1 \overline{h'}_1$, то

$$t^{\varepsilon_1} A_1 \overline{h}_1 (\overline{h'}_1)^{-1} A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} = h_1 (h_1')^{-1}.$$

Решая проблему пересечения конечно порожденной подгруппы с циклической из сомножителя, находим пересечение

$$t^{\varepsilon_1} A_1 U_{\varepsilon_2} A_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1}. \tag{11}$$

Если пересечение (11) равно единичной подгруппе, то h_1 единственно, проверяем для него равенство (9); в противном случае, так как

$$t^{\varepsilon_1}A_1\tilde{h}_0A_1^{-1}t^{-\varepsilon_1} = h_0 \in U'_{\varepsilon_1} \subset U_{\varepsilon_1}, h_0 = h_1(h_1')^{-1}, \tilde{h}_0 = \overline{h}_1(\overline{h'}_1)^{-1}$$

определяем подгруппу $U'_{\varepsilon_1} = t^{\varepsilon_1}A_1U_{\varepsilon_2}A_1^{-1}t^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1}$.

2) После преобразований имеем слово $w = t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}\tilde{B}_2t^{\varepsilon_3}B_3...t^{\varepsilon_k}B_k$, где $\tilde{B}_2 = \overline{h}_{-1}B_2$. Все элементы погруппы U'_{ε_1} переходят через слог A_1 и оставляют его без изменения. Рассмотрим элемент $h_2 \in U'_{\varepsilon_1}$, который слог $\tilde{B}_2$ переводит в A_2. Тогда должно выполняться равенство $h_2t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}\tilde{B}_2 = t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2\overline{h}_2$, где $\overline{h}_2 \in U_{\varepsilon_3}$. Решая проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической:

$$(\tilde{B}_2{}^{-1}t^{-\varepsilon_2}A_1^{-1}t^{-\varepsilon_1})U_{\varepsilon_1}(t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}\tilde{B}_2) \cap \tilde{B}_2{}^{-1}A_2U_{\varepsilon_3}$$

находим подходящий элемент h_2.

Если $(t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2)U_{\varepsilon_3}(A_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}A_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}) \cap U'_{\varepsilon_1} = E$, то h_2 - единственный, проверяем равенство (9) для элемента h_2h_1, в противном случае находим подгруппу $U''_{\varepsilon_1} = (t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2)U_{\varepsilon_3}(A_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}A_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}) \cap U'_{\varepsilon_1}$, все элементы которой оставляют без изменения слоги A_1 и A_2.

3) Продолжая этот процесс, на $(k-1)$ шаге получим слово

$$w = t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2t^{\varepsilon_3}A_3...t^{\varepsilon_k}\tilde{B}_k,$$

где $\tilde{B}_k = \overline{h}_{-k+1}B_k$ и определена подгруппа $U_{\varepsilon_1}^{(k-1)}$, элементы которой оставляют без изменения слоги $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$. Рассмотрим $h_k \in U_{\varepsilon_1}^{(k-1)}$, так как h_k переводит $\tilde{B}_k$ в A_k, то должно выполняться равенство

$$h_kw = h_kt^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2t^{\varepsilon_3}A_3...t^{\varepsilon_k}\tilde{B}_k = t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2t^{\varepsilon_3}A_3...t^{\varepsilon_k}A_k\overline{\overline{h}},$$

которое, как показано выше, алгоритмически разрешимо, причем $\overline{\overline{h}} \in U_{\varepsilon_1}$. Таким отразом, мы получили слово $h_kh_{k-1}...h_2h_1$, которое переводит слово w в слово v^*. Далее отпределяем подгруппу

$$(t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2...t^{\varepsilon_k}A_k)U_{\varepsilon_1}(A_k^{-1}t^{-\varepsilon_k}...A_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}A_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}) \cap U_{\varepsilon_1}^{(k-1)} = U_{\varepsilon_1}^{(k)}.$$

Если $U_{\varepsilon_1}^{(k)} = E$, то проверяем равенство (9) для элемента $h_kh_{k-1}...h_2h_1$. В противном случае подбираем такую степень элемента a_i, который уравняет левую и правую части равенства (9).

Из вышеизложенного следует, что существует минимальная степень r, такая что

$$a_i^{rs_{ij}}(v^*) = (v^*)a_i^{qs_{ij}}, \tag{12}$$

где $a_i^{rs_{ij}} \in U_{\varepsilon_1}^{(k)}$.

Тогда подбираем такую степень X, чтобы с одной стороны

$$a_i^{rs_{ij}X}(v^*)a_i^{p_0} = (v^*)a_i^{p_0}a_i^{qs_{ij}X}, \tag{13}$$

а с другой должно выполняться равенство

$$a_i^{rs_{ij}X}(v^*)a_i^{p_0} = (v^*)a_i^{q_0}a_i^{rs_{ij}X}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) имеем:

$$a_i^{rs_{ij}X}(v^*)a_i^{p_0} = (v^*)a_i^{q_0}a_i^{rs_{ij}X}, \tag{15}$$

которое справедливо вследствие разрешимости уравнения

$$p_0 + qs_{ij}X = q_0 + rs_{ij}X$$

в целых числах. Теорема доказана

3. Индуктивный шаг

Для дальнейших рассуждений представим группу

$$\overline{G}_\Gamma^* = \langle G_\Gamma, t_1, t_2, ..., t_m | relG_\Gamma, t_s^{-1}U_st_s = U_{-s}\rangle,$$

где $U_s = \langle a_i^{s_{ij}}\rangle, U_{-s} = \langle a_j^{k_{ji}}\rangle, |s_{ij}|, |k_{ji}| \geqslant 1, i, j = \overline{1,n}, s = \overline{1,m}$, в виде HNN-расширения с одной проходной буквой. Выделим некоторую проходную букву t_m (для удобства возьмем последнюю), тогда группа $\overline{G}_\Gamma^*$ будет иметь представление

$$\overline{G}^*{}_\Gamma = \langle \overline{G}^*_{\Gamma m-1}, t_m | t_m^{-1}U_mt_m = U_{-m}\rangle,$$

где $\overline{G}^*_{\Gamma m-1} = \langle G_\Gamma, t_1, t_2, ..., t_{m-1} | relG_\Gamma, t_s^{-1}U_st_s = U_{-s}\rangle$, $s = \overline{1, m-1}$.

Предположим, что для группы с меньшим числом проходных букв: $\overline{G}^*_{\Gamma m-1} = \langle G_\Gamma, t_1, t_2, ..., t_{m-1} | relG_\Gamma, t_s^{-1}U_st_s = U_{-s}\rangle$, $s = \overline{1, m-1}$, проблема сопряженности слов разрешима, а также справедливы утверждения леммы 6 и леммы 7, а следовательно образующие некоторой подгруппы $H < \overline{G}^*_{\Gamma m-1}$ можно привести к специальным образующим, порождающим ту же самую подгруппу.

Докажем подобные утверждения для группы $\overline{G}_\Gamma^*$.

Лемма 9. *Для любой конечно порожденной подгруппы $H < \overline{G}_\Gamma^*$ и циклической подгруппы $\langle a_k\rangle$, $k = \overline{1,n}$, где a_k - образующий группы G_Γ существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k\rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H < \overline{G}_\Gamma$ - конечно порожденная подгруппа. Представляем образующие подгруппы H в виде специальных образующих: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (8): $(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant ... \leqslant (M_k)$. Выясняем существует ли в S подгруппа $(M_{s_1}) < \overline{G}_\Gamma$, состоящая из трансформ длины 1. Далее определяем пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle a_k\rangle$. Таким образом $(M_{s_1}) \cap \langle a_k\rangle = H \cap \langle a_k\rangle$, $k > 1$. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 10. *Для любого слова $v \in \overline{G}^*{}_\Gamma$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < \overline{G}^*{}_\Gamma$ существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$, где $a_k \in G_\Gamma$ $k = \overline{1,n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подгруппа $H < \overline{G}^*{}_\Gamma$ и слово $v \in \overline{G}^*{}_\Gamma$, причем $v \notin H$. Пусть $v = l_1 t_m^{\eta_1} l_2 t_m^{\eta_2} ... l_s t_m^{\eta_s} h t_m^{\varepsilon_s} r_s ... t_m^{\varepsilon_1} r_1$, где $l_i, r_i \in G_\Gamma, \eta_i, \varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1,n}$. Найдем пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$. Перепишем образующие подгруппы H в виде специального множества: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порожденго подгруппами ряда (8).

Пусть $u \in H$, перепишем его в u-символах $u = u_1 u_2 ... u_n$. Как в пунктах а)-в) леммы 7, выясним, в каких случаях в произведении vu будут проходить сокращения.

В результате через конечное число шагов построим приведенное слово vu. Если $l(vw) = 1$ и vw не содержит t_m. Тогда выясняем, существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда (8) подгруппа $(M_{s_1}) = A_{s1}$ и рассматриваем $vu(M_{s_1}) \cap \langle a_k \rangle$. Лемма доказана.

Вывод: Для группы $\overline{G}^*{}_\Gamma$ выполняются все условия теоремы 2, следовательно образующие подгруппы $H < \overline{G}^*{}_\Gamma$ можно привести к специальным образующим.

4. Доказательство основной теоремы

Приступим к доказательству теоремы 1 для группы

$$\overline{G}^*_\Gamma = \langle \overline{G}^*_{\Gamma m-1}, t_m | t_m^{-1} U_m t_m = U_{-m} \rangle,$$

где

$$\overline{G}^*_{\Gamma m-1} = \langle G_\Gamma, t_1, t_2, ..., t_{m-1} | rel G_\Gamma, t_s^{-1} U_s t_s = U_{-s} \rangle,$$
$$U_s = \langle a_i^{s_{ij}} \rangle, \quad U_{-s} = \langle a_j^{k_{ji}} \rangle, \quad |s_{ij}|, |k_{ji}| \geqslant 1, i, j = \overline{1,n}, s = \overline{1, m-1}.$$

Из индуктивного предположения следует, что в группе $\overline{G}^*_{\Gamma m-1}$ разрешима проблема сопряженности слов.

Пусть $w, v \in \overline{G}^*_\Gamma$ - циклически несократимые слова. Если w и v сопряжены, то $hwh^{-1} = \overline{v}$, где $l(w) = l(\overline{v})$, $\overline{v}$ - циклическая перестановка слова v; $h \in U_{\varepsilon m}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Пусть $w = t_m^{\varepsilon_1} B_1 t_m^{\varepsilon_2} B_2 t_m^{\varepsilon_3} B_3 ... t_m^{\varepsilon_k} B_k$. В словах w и $\overline{v}$ векторы степеней $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\}$ совпадают. Значит $\overline{v} = t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2 t_m^{\varepsilon_3} A_3 ... t_m^{\varepsilon_k} A_k$. Причем w и $\overline{v}$ представлены в нормальной форме; $B_i, A_i \in \overline{G}^*{}_{\Gamma m-1}$.

Найдем такое $h \in U_{\varepsilon m}, \varepsilon = \pm 1$, что

$$hw = \overline{v}h. \tag{16}$$

Слово h будем строить последовательно из $h_1, h_2, ..., h_k$, таких что каждое h_iпринадлежит ассоциированной подгруппе, причем h_1 переводит B_1 в A_1, h_2 переводит B_2 в A_2 и A_1 оставляет без изменения и т.д.

1) Пусть $h_1 \in U_{\varepsilon_1 m}$ и должно выполняться равенство:

$$h_1 t_m^{\varepsilon_1} B_1 = t_m^{\varepsilon_1} A_1 \overline{h}_1, \tag{17}$$

где $\overline{h}_1 \in U_{\varepsilon_2 m}$.

Как показано в лемме 10, находим пересечение

$$B_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} U_{\varepsilon_1 m} t^{\varepsilon_1} B_1 \cap B_1^{-1} A_1 U_{\varepsilon_2 m}.$$

Из пересечения находим подходящее h_1. Если существует $h'_1 \in U_{\varepsilon_1 m}$, такое что и для него выполняется равенство (17): $h'_1 t_m^{\varepsilon_1} A_1 = t_m^{\varepsilon_1} A_1 \overline{h'}_1$, то

$$t_m^{\varepsilon_1} A_1 \overline{h}_1 (\overline{h'}_1)^{-1} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1} = h_1 (h'_1)^{-1}.$$

По алгоритму, указанному в лемме 9, находим пересечение

$$t_m^{\varepsilon_1} A_1 U_{\varepsilon_2 m} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1 m}. \tag{18}$$

Если пересечение (18) равно единичной подгруппе, то h_1 единственно, проверяем для него равенство (16); в противном случае, так как

$$t_m^{\varepsilon_1} A_1 \tilde{h_0} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1} = h_0 \in U'_{\varepsilon_1 m} \subset U_{\varepsilon_1 m}, h_0 = h_1 (h'_1)^{-1}, \tilde{h_0} = \overline{h}_1 (\overline{h'}_1)^{-1}$$

определяем подгруппу $U'_{\varepsilon_1 m} = t_m^{\varepsilon_1} A_1 U_{\varepsilon_2 m} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_1 m}$.

2) После преобразований имеем слово $w = t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2 t_m^{\varepsilon_3} B_3 ... t_m^{\varepsilon_k} B_k$, где $\tilde{B}_2 = \overline{h}_{-1} B_2$. Все элементы подгруппы $U'_{\varepsilon_1 m}$ переходят через слог A_1 и оставляют его без изменения. Рассмотрим элемент $h_2 \in U'_{\varepsilon_1 m}$, который слог $\tilde{B}_2$ переводит в A_2. Тогда должно выполняться равенство $h_2 t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2 = t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2 \overline{h}_2$, где $\overline{h}_2 \in U_{\varepsilon_3 m}$. По лемме 10 находим пересечение:

$$(\tilde{B_2}^{-1} t_m^{-\varepsilon_2} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}) U_{\varepsilon_1 m} (t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} \tilde{B}_2) \cap \tilde{B_2}^{-1} A_2 U_{\varepsilon_3 m}$$

находим подходящий элемент h_2.

Если $(t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2) U_{\varepsilon_3 m} (A_2^{-1} t_m^{-\varepsilon_2} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}) \cap U'_{\varepsilon_1 m} = E$, то h_2 - единственный, проверяем равенство (16) для элемента $h_2 h_1$, в противном случае находим подгруппу $U''_{\varepsilon_1 m} = (t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2) U_{\varepsilon_3 m} (A_2^{-1} t_m^{-\varepsilon_2} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}) \cap U'_{\varepsilon_1 m}$, все элементы которой оставляют без изменения слоги A_1 и A_2.

3) Продолжая этот процесс, на $(k-1)$ шаге получим слово

$$w = t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2 t_m^{\varepsilon_3} A_3 ... t_m^{\varepsilon_k} \tilde{B}_k,$$

где $\tilde{B}_k = \overline{h}_{-k+1} B_k$ и определена подгруппа $U_{\varepsilon_1 m}^{(k-1)}$, элементы которой оставляют без изменения слоги $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$. Рассмотрим $h_k \in U_{\varepsilon_1 m}^{(k-1)}$, так как h_k переводит $\tilde{B}_k$ в A_k, то должно выполняться равенство

$$h_k w = h_k t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2 t_m^{\varepsilon_3} A_3 ... t_m^{\varepsilon_k} \tilde{B}_k = t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2 t_m^{\varepsilon_3} A_3 ... t_m^{\varepsilon_k} A_k \overline{\overline{h}},$$

которое, как показано выше, алгоритмически разрешимо, причем $\overline{\overline{h}} \in U_{\varepsilon_1 m}$. Таким образом, мы получили слово $h_k h_{k-1} ... h_2 h_1$, которое переводит слово w в слово $\overline{v}$. Далее определяем подгруппу

$$(t_m^{\varepsilon_1} A_1 t_m^{\varepsilon_2} A_2 ... t_m^{\varepsilon_k} A_k) U_{\varepsilon_1 m} (A_k^{-1} t_m^{-\varepsilon_k} ... A_2^{-1} t_m^{-\varepsilon_2} A_1^{-1} t_m^{-\varepsilon_1}) \cap U_{\varepsilon_1 m}^{(k-1)} = U_{\varepsilon_1 m}^{(k)}.$$

Если $U_{\varepsilon_1 m}^{(k)} = E$, то проверяем равенство (16) для элемента $h_k h_{k-1} ... h_2 h_1$. В противном случае подбираем такую степень элемента a_i, который уравняет левую и правую части равенства (16).

Из вышеизложенного следует, что существует минимальная степень r, такая что

$$a_i^{r s_{ij}} \overline{v} = \overline{v} a_i^{q s_{ij}}, \tag{19}$$

где $a_i^{r s_{ij}} \in U_{\varepsilon_1 m}^{(k)}$.

Тогда подбираем такую степень X, чтобы с одной стороны

$$a_i^{r s_{ij} X} \overline{v} a_i^{p_0} = \overline{v} a_i^{p_0} a_i^{q s_{ij} X}, \tag{20}$$

а с другой должно выполняться равенство

$$a_i^{r s_{ij} X} \overline{v} a_i^{p_0} = \overline{v} a_i^{q_0} a_i^{r s_{ij} X}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) имеем равенство:

$$\overline{v} a_i^{p_0} a_i^{q s_{ij} X} = \overline{v} a_i^{q_0} a_i^{r s_{ij} X}, \tag{22}$$

которое справедливо вследствие разрешимости уравнения

$$p_0 + q s_{ij} X = q_0 + r s_{ij} X$$

в целых числах.

Основная теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. Межвузовский сборник научных трудов. Тула,1983. С. 50–80.

2. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1972. С. 3–86.

3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II // Современная алгебра: межвузовский сборник. Л., 1977. Вып. 6. С. 16–32.

4. Безверхний В. Н. О пересечении конечно-порожденных подгрупп свободной группы // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. Тульский политехнический институт, 1974. Вып. 2. С. 51–56.

5. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в некоторых классах групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1990. С. 103–152.

6. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Известия ТулГУ Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Том 12, вып. 1. С. 83–101.

7. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 1(49). С. 32–44.

8. Логачева Е. С. Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1(45). С. 61–70.

9. Логачева Е. С. Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 2., Ч. 1. С. 19–40.

10. Логачева Е. С. Проблема сопряженности в древесном произведении групп // Алгебра и теория чисел: материалы XII Междунар. конф. 2014. С. 85–88.

11. Lipshutz S. Nhe congugacy problem and cyclic amalgamations. Bull. Amer. Math. Soc., 1973. P. 114–116.

12. Фридман А. А. Решение проблемы сопряженности в одном классе групп // Труды МИАН. 1973. Т. 133. С. 233–242.

13. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная терия групп. М: Мир, 1980.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 24.04.2014