ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.35, 517.15 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-145-151

О пересечении двух однородных последовательностей Битти

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин

Бегунц Александр Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Аннотация

Однородными последовательностями Битти называют последовательности вида $a_n = [\alpha n]$, где α — положительное иррациональное число. В 1957 г. Т. Сколем показал, что если числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то последовательности $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ имеют бесконечно много общих членов. Т. Банг усилил этот результат: пусть $S_{\alpha,\beta}(N)$ — количество натуральных чисел k, $1 \leqslant k \leqslant N$, принадлежащих одновременно двум последовательностям Битти $[\alpha n]$ и $[\beta m]$ и числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, тогда $S_{\alpha,\beta}(N) \sim \frac{N}{\alpha\beta}$ при $N \to \infty$.

В работе доказывается уточнение этого результата для случая алгебраических чисел. Пусть $\alpha, \beta > 1$ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{N}{\alpha\beta} + O\big(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big).$$

Ключевые слова: однородная последовательность Битти, тригонометрические суммы, асимптотическая формула.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин. О пересечении двух однородных последовательностей Битти // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 145–151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 5.

UDC 511.35, 517.15 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-145-151

On the intersection of two homogeneous Beatty sequences

A. V. Begunts, D. V. Goryashin

Begunts Alexander Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru
Goryashin Dmitry Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Abstract

Homogeneous Beatty sequences are sequences of the form $a_n = [\alpha n]$, where α is a positive irrational number. In 1957 T. Skolem showed that if the numbers $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are linearly independent over the field of rational numbers, then the sequences $[\alpha n]$ and $[\beta n]$ have infinitely many elements in common. T. Bang strengthened this result: denote $S_{\alpha,\beta}(N)$ the number of natural numbers k, $1 \leqslant k \leqslant N$, that belong to both Beatty sequences $[\alpha n]$, $[\beta m]$, and the numbers $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are linearly independent over the field of rational numbers, then $S_{\alpha,\beta}(N) \sim \frac{N}{\alpha\beta}$ for $N \to \infty$.

In this paper, we prove a refinement of this result for the case of algebraic numbers. Let $\alpha, \beta > 1$ be irrational algebraic numbers such that $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are linearly independent over the field of rational numbers. Then for any $\varepsilon > 0$ the following asymptotic formula holds:

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{N}{\alpha\beta} + O\big(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big), \quad N \to \infty.$$

Keywords: homogeneous Beatty sequence, exponential sums, asymptotic formula.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
A. V. Begunts, D. V. Goryashin, 2022, “On the intersection of two homogeneous Beatty sequences”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 145–151.

Последовательностями Битти называют последовательности вида $a_n = [\alpha n + \beta]$, где α — положительное иррациональное число, $\beta \in \mathbb{R}$. Если $\beta = 0$, то последовательность Битти называется однородной. В случае $\alpha > 1$ такая последовательность строго возрастает.

Хорошо известно (см. [1]), что если $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то однородные последовательности Битти $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ не пересекаются и дают в объединении всё множество натуральных чисел.

В последнее время интерес вызывают задачи о распределении арифметических функций на последовательностях Битти, а также аддитивные задачи с такими числами (см., например, обзор [2] и монографию [3]).

В 1957 г. Т. Сколем показал, что если числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, либо если при некоторых $a, b, c \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = c$, причём числа a и b разных знаков, то последовательности $[\alpha n]$ и $[\beta n]$ имеют бесконечно много общих членов (см. [4], теоремы 5, 6). Т. Банг [5] усилил этот результат следующим образом. Обозначим через $S_{\alpha,\beta}(N)$ количество натуральных чисел k, $1 \leqslant k \leqslant N$, принадлежащих одновременно двум последовательностям Битти $[\alpha n]$ и $[\beta m]$.

Теорема 1 (Т. Банг). *Пусть $\alpha, \beta > 1$ — иррациональные числа. Тогда если числа $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то*

$$S_{\alpha,\beta}(N) \sim \frac{N}{\alpha\beta}, \quad N \to \infty.$$

Целью настоящей работы является доказательство уточнения этого результата для случая алгебраических чисел.

Теорема 2. *Пусть $\alpha, \beta > 1$ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{N}{\alpha\beta} + O\big(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big).$$

Доказательство. Равенства $[\alpha n] = [\beta m] = k$ равносильны одновременному выполенению неравенств $k < \alpha n < k+1$, $k < \beta m < k+1$, или $\frac{k}{\alpha} < n < \frac{k+1}{\alpha}$, $\frac{k}{\beta} < m < \frac{k+1}{\beta}$. Тогда

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \sum_{k\leqslant N} \left(\left[\frac{k+1}{\alpha}\right] - \left[\frac{k}{\alpha}\right] \right) \left(\left[\frac{k+1}{\beta}\right] - \left[\frac{k}{\beta}\right] \right).$$

Поскольку $[x] = x - \{x\} = x - \frac{1}{2} + \rho(x)$, получаем

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \sum_{k\leqslant N} \left(\frac{1}{\alpha} + \rho\Big(\frac{k+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \right) \left(\frac{1}{\beta} + \rho\Big(\frac{k+1}{\beta}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\beta}\Big) \right) =$$

$$= \frac{N}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k\leqslant N} \left(\rho\Big(\frac{k+1}{\beta}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\beta}\Big) \right) + \frac{1}{\beta} \sum_{k\leqslant N} \left(\rho\Big(\frac{k+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \right) +$$

$$+ \sum_{k\leqslant N} \left(\rho\Big(\frac{k+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \right) \left(\rho\Big(\frac{k+1}{\beta}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\beta}\Big) \right) = \frac{N}{\alpha\beta} + O(1) + R(N),$$

где

$$R(N) = \sum_{k\leqslant N} \left(\rho\Big(\frac{k+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) \right) \left(\rho\Big(\frac{k+1}{\beta}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\beta}\Big) \right).$$

Далее применим следующую лемму о приближении функции $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ частичной суммой своего ряда Фурье (см. [6], стр. 440, 601, 607).

Лемма 1. *При любом $M \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\rho(x) = \sum_{1\leqslant|m|\leqslant M} \frac{e^{2\pi imx}}{2\pi im} + O(r_M(x)),$$

где

$$r_M(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2 \sin^2 \pi x}} = \sum_{1\leqslant|m|\leqslant M \ln M} c_m e^{2\pi imx} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right), \quad |c_m| \ll \frac{\ln M}{M} e^{-|m|/M}.$$

Положим $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, $\mu = \frac{1}{\beta}$, $\psi_{\lambda,M}(x) = r_M(x+\lambda) + r_M(x)$ и воспользуемся леммой:

$$\rho\Big(\frac{k+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) = \sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M} \frac{e^{2\pi ikm_1\lambda}}{2\pi im_1} (e^{2\pi im_1\lambda} - 1) + O\left(\psi_{\lambda,M}(\lambda k)\right), \tag{1}$$

$$\rho\Big(\frac{k+1}{\beta}\Big)-\rho\Big(\frac{k}{\beta}\Big)=\sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M}\frac{e^{2\pi ikm_2\mu}}{2\pi im_2}(e^{2\pi im_2\mu}-1)+O\left(\psi_{\mu,M}(\mu k)\right). \tag{2}$$

Поскольку

$$r_M(\lambda(k+1))=\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M\ln M}c_me^{2\pi im\lambda(k+1)}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right)=\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M\ln M}c_me^{2\pi im\lambda}e^{2\pi im\lambda k}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M\ln M}c'_me^{2\pi im\lambda k}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right),$$

где для c'_m справедлива такая же оценка, как для c_m, заключаем, что

$$\psi_{\lambda,M}(\lambda k)=r_M(\lambda(k+1))+r_M(\lambda k)=\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M\ln M}\tilde{c}_me^{2\pi im\lambda k}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right),\quad |\tilde{c}_m|\ll\frac{\ln M}{M}e^{-|m|/M}.$$

Перемножая равенства (1) и (2), получаем

$$R(N)=R_1(N)+R_2(N)+R_3(N)+R_4(N),$$

где

$$R_1(N)=\sum_{k\leqslant N}\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M}\frac{e^{2\pi ikm_1\lambda}}{2\pi im_1}(e^{2\pi im_1\lambda}-1)\sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M}\frac{e^{2\pi ikm_2\mu}}{2\pi im_2}(e^{2\pi im_2\mu}-1)=$$

$$=\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M}\sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M}\frac{(e^{2\pi im_1\lambda}-1)(e^{2\pi im_2\mu}-1)}{2\pi im_1\cdot 2\pi im_2}\sum_{k\leqslant N}e^{2\pi ik(m_1\lambda+m_2\mu)}\ll$$

$$\ll\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M}\sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M}\frac{1}{|m_1||m_2|\|m_1\lambda+m_2\mu\|},$$

$$R_2(N)\ll\ln M\sum_{k\leqslant N}\psi_{\lambda,M}(\lambda k),\;\; R_3(N)\ll\ln M\sum_{k\leqslant N}\psi_{\mu,M}(\mu k),\;\; R_4(N)\ll\sum_{k\leqslant N}\psi_{\lambda,M}(\lambda k)\psi_{\mu,M}(\mu k).$$

Теорема (В. Шмидт, [7], теорема 2). *Пусть λ, μ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1,\lambda,\mu$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует лишь конечное множество пар таких целых чисел $m_1\neq 0$, $m_2\neq 0$, что*

$$\|m_1\lambda+m_2\mu\|<\frac{1}{(m_1m_2)^{1+\varepsilon}}.$$

Лемма 2. *Пусть λ, μ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1,\lambda,\mu$ линейно независимы над полем рациональных чисел, $M\geqslant 2$ и $|m_1|\leqslant M$, $|m_2|\leqslant M$, $(m_1,m_2)\neq(0,0)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $c>0$, что $\|m_1\lambda+m_2\mu\|\geqslant\frac{c}{M^{2+\varepsilon}}$.*

Доказательство. По теореме Шмидта неравенство $\|m_1\lambda+m_2\mu\|<\frac{1}{(m_1m_2)^{1+\varepsilon}}$ справедливо лишь для конечного множества пар целых чисел $m_1\neq 0$, $m_2\neq 0$. Следовательно, существует такое число $c_1>0$, что для всех пар (m_1,m_2) с условиями $1\leqslant|m_1|\leqslant M$, $1\leqslant|m_2|\leqslant M$ выполняется неравенство $\|m_1\lambda+m_2\mu\|\geqslant\frac{c_1}{(m_1m_2)^{1+\varepsilon/2}}\geqslant\frac{c_1}{M^{2+\varepsilon}}$.

Если же одно из чисел m_1, m_2 равно 0, скажем, $m_2=0$, то поскольку число λ алгебраическое, существует такое число $c_2>0$, что $\|m_1\lambda+m_2\mu\|=\|m_1\lambda\|\geqslant\frac{c_2}{m_1^{1+\varepsilon/2}}\geqslant\frac{c_2}{M^{2+\varepsilon}}$. Полагая $c=\min(c_1,c_2)>0$, получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $\delta>0$ и числа $x,y\in\mathbb{R}$ таковы, что $\|x\pm y\|\geqslant\delta$. Тогда $\big|\|x\|-\|y\|\big|\geqslant\delta$.*

Доказательство. В силу 1-периодичности функции $f(x) = \|x\|$ можно без ограничения общности считать, что $x, y \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Более того, если неравенства $\|x \pm y\| \geqslant \delta$ выполнены для чисел x и y, то в силу чётности функции $f(x)$ эти же неравенства справедливы и для чисел $-x$ и y. Таким образом, можно считать, что $x, y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, а тогда $\big|\|x\| - \|y\|\big| = |x - y| \geqslant \|x - y\| \geqslant \delta$.

Лемма 4. *Пусть λ, μ — такие иррациональные алгебраические числа, что $1, \lambda, \mu$ линейно независимы над полем рациональных чисел, $M \geqslant 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеют место оценки*

$$\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M}\ \sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M} \frac{1}{\|m_1\lambda + m_2\mu\|} = O(M^{2+\varepsilon}\ln M),$$

$$\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M}\ \sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M} \frac{1}{|m_1||m_2|\|m_1\lambda + m_2\mu\|} = O(M^{1+\varepsilon}\ln M).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Все числа $\|m_1\lambda + m_2\mu\|$, где $1 \leqslant |m_1| \leqslant M$, $1 \leqslant |m_2| \leqslant M$, различны в силу линейной независимости чисел $1, \lambda, \mu$. Пользуясь леммой 2, покажем, что в каждом из промежутков

$$[0; \delta), \quad [\delta; 2\delta), \quad [2\delta; 3\delta), \quad \ldots, \quad \left[n\delta; \tfrac{1}{2}\right],$$

где $\delta = \frac{c}{(2M)^{2+\varepsilon}}$ и $n = \left[\frac{1}{2\delta}\right]$, лежит не более одного из этих чисел, а в первый из промежутков не попадает ни одного из них. Действительно, если $(m_1, m_2) \neq (m_3, m_4)$, то согласно лемме 2 $\|(m_1\lambda + m_2\mu) \pm (m_3\lambda + m_4\mu)\| = \|(m_1 \pm m_3)\lambda + (m_2 \pm m_4)\mu\| \geqslant \delta$, а тогда в силу леммы 3

$$\big|\|m_1\lambda + m_2\mu\| - \|m_3\lambda + m_4\mu\|\big| \geqslant \delta.$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M}\ \sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M} \frac{1}{\|m_1\lambda + m_2\mu\|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\delta k} = O(M^{2+\varepsilon}\ln M).$$

Докажем теперь второе равенство. Обозначим $a_{m_1,m_2} = \frac{1}{\|m_1\lambda + m_2\mu\|}$. Тогда

$$S(M) = \sum\sum_{\substack{1\leqslant|m_1|\leqslant M\\ 1\leqslant|m_2|\leqslant M}} \frac{a_{m_1,m_2}}{|m_1||m_2|} = \sum\sum_{\substack{M/2<|m_1|\leqslant M\\ M/2<|m_2|\leqslant M}} \frac{a_{m_1,m_2}}{|m_1||m_2|} + \sum\sum_{\substack{1\leqslant|m_1|\leqslant M/2\\ M/2<|m_2|\leqslant M}} \frac{a_{m_1,m_2}}{|m_1||m_2|} +$$

$$+ \sum\sum_{\substack{M/2<|m_1|\leqslant M\\ 1\leqslant|m_2|\leqslant M/2}} \frac{a_{m_1,m_2}}{|m_1||m_2|} + \sum\sum_{\substack{1\leqslant|m_1|\leqslant M/2\\ 1\leqslant|m_2|\leqslant M/2}} \frac{a_{m_1,m_2}}{|m_1||m_2|} \leqslant \frac{2}{M} \sum\sum_{\substack{1\leqslant|m_1|\leqslant M\\ 1\leqslant|m_2|\leqslant M}} a_{m_1,m_2} + S\Big(\frac{M}{2}\Big).$$

Аналогично получаем

$$S\Big(\frac{M}{2}\Big) \leqslant \frac{4}{M} \sum\sum_{\substack{1\leqslant|m_1|\leqslant M/2\\ 1\leqslant|m_2|\leqslant M/2}} a_{m_1,m_2} + S\Big(\frac{M}{4}\Big)$$

и т. д. Применяя оценку из первого равенства в доказываемой лемме, получаем

$$S(M) \ll \frac{2}{M}M^{2+\varepsilon}\ln M + \frac{4}{M}\Big(\frac{M}{2}\Big)^{2+\varepsilon}\ln\frac{M}{2} + \frac{8}{M}\Big(\frac{M}{4}\Big)^{2+\varepsilon}\ln\frac{M}{4} + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant 2M^{1+\varepsilon}\ln M\left(1 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{1+\varepsilon} + \Big(\frac{1}{4}\Big)^{1+\varepsilon} + \ldots\right) \ll M^{1+\varepsilon}\ln M.$$

Лемма 4 доказана.

Замечание. Доказательство первого равенства в утверждении леммы 4 аналогично доказательству леммы 3.3 из [8] (см. также упр. 3.16 этой же книги).

Оценим $R_2(N)$ и $R_3(N)$. Для суммы $R_2(N)$ имеем

$$\sum_{k\leqslant N}\psi_{\lambda,M}(\lambda k)=\sum_{k\leqslant N}\left(\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M\ln M}\tilde{c}_m e^{2\pi i m\lambda k}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right)\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M\ln M}\tilde{c}_m\sum_{k\leqslant N}e^{2\pi i m\lambda k}+O\left(\frac{N\ln M}{M}\right)\ll\frac{\ln M}{M}\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M\ln M}\frac{1}{\|\lambda m\|}+\frac{N\ln M}{M}\ll\left(M^{\varepsilon}+\frac{N}{M}\right)\ln M.$$

Следовательно,

$$R_2(N)\ll\left(M^{\varepsilon}+\frac{N}{M}\right)\ln^2 M,$$

и такая же оценка имеет место и для $R_3(N)$.

Наконец, оценим сумму $R_4(N)$:

$$R_4(N)\ll\sum_{k\leqslant N}\psi_{\lambda,M}(\lambda k)\psi_{\mu,M}(\mu k)=$$

$$=\sum_{k\leqslant N}\left(\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M\ln M}\tilde{c}_{m_1}e^{2\pi i m_1\lambda k}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right)\right)\left(\sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M\ln M}\tilde{c}_{m_2}e^{2\pi i m_2\mu k}+O\left(\frac{\ln M}{M}\right)\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M\ln M}\tilde{c}_{m_1}\sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M\ln M}\tilde{c}_{m_2}\sum_{k\leqslant N}e^{2\pi i k(m_1\lambda+m_2\mu)}+O\left(\frac{N\ln^2 M}{M}\right)\ll$$

$$\ll\frac{\ln^2 M}{M^2}\sum_{1\leqslant|m_1|\leqslant M}\sum_{1\leqslant|m_2|\leqslant M}\frac{1}{\|m_1\lambda+m_2\mu\|}+\frac{N\ln^2 M}{M}.$$

Применение леммы 2 приводит к оценке

$$R_4(N)\ll\left(M^{\varepsilon}+\frac{N}{M}\right)\ln^2 M.$$

Выберем теперь $M=N^{\frac{1}{2}}$. Тогда получим $R(N)=O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. Теорема 2 доказана.

В заключение отметим также, что другим возможным направлением уточнения теоремы Т. Банга может являться задача об асимптотической формуле для $S_{\alpha,\beta}(N)$ с как можно лучшим остаточным членом для почти всех $\alpha,\beta>1$ в смысле меры Лебега. М. Р. Габдуллин сообщил нам, что при помощи вероятностных соображений в этом случае можно получить асимптотическую формулу

$$S_{\alpha,\beta}(N)=\frac{N}{\alpha\beta}+O_{\alpha,\beta,\varepsilon}\big((\ln N)^3(\ln\ln N)^{1+\varepsilon}\big),\quad \varepsilon>0,$$

которая также следует из результатов работы [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beatty S. Problem 3173 // American Mathematical Monthly, **33** (3), 1926, p. 159.

2. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти // Чебышевский сборник. **18**. Вып. 4. 2017. 97—105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105

3. Technau, M., 2018, “On Beatty sets and some generalisations thereof”, Würzburg, Würzburg University Press. doi: 10.25972/WUP-978-3-95826-089-4

4. Skolem, Th. On certain distributions of integers in pairs with given differences // Math. Scand. 5 (1957), 57–68.

5. Bang, T. On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1, 2, 3\ldots$. Supplementary note to the preceding paper by Th. Skolem // Math. Scand. 5 (1957), 69–76.

6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу: 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Дрофа, 2004. 640 с.

7. Шмидт, Вольфганг М. О совместных приближениях двух алгебраических чисел рациональными // Математика, 1971, том 15, выпуск 3, 3–25.

8. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей: Пер. с англ. — М.: Наука, 1985. — 408 с.

9. Beck, J. Probabilistic Diophantine Approximation, I. Kronecker Sequences // Annals of Mathematics, Sep., 1994, Second Series, Vol. 140, No. 2 (Sep., 1994), pp. 449+451-502.

REFERENCES

1. Beatty, S., 1926, “Problem 3173”, *American Mathematical Monthly*, vol. 33, no. 3, p. 159.

2. Begunts, A. V., Goryashin, D. V., 2017, “Topical problems concerning Beatty sequences”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, no. 4, pp. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105

3. Technau, M., 2018, “*On Beatty sets and some generalisations thereof*”, Würzburg, Würzburg University Press. urn:nbn:de:bvb:20-opus-163303

4. Skolem, Th., 1957, “On certain distributions of integers in pairs with given differences”, *Math. Scand.*, vol. 5, pp. 57–68.

5. Bang, T., 1957, “On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1, 2, 3\ldots$. Supplementary note to the preceding paper by Th. Skolem”, *Math. Scand.*, vol. 5, pp. 69–76.

6. Arkhipov, G. I., Sadovnichii, V. A., Chubarikov, V. N., 2004, “*Lectures in mathematical analysis*”, 4-d ed., Moscow, Drofa. 640 p. (In Russian.)

7. Schmidt, Wolfgang M., 1967, “On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals”, *Acta Math.*, vol. 119, no. 1–2 (1967), 27—60.

8. Kuipers, L., Niederreiter, H., 1974, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York.

9. Beck, J., 1994, “Probabilistic Diophantine Approximation, I. Kronecker Sequences”, *Annals of Mathematics*, Second Series, vol. 140, no. 2 (Sep., 1994), pp. 449 + 451–502.

Получено: 15.06.2022
Принято в печать: 22.12.2022