ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-130-144

О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях[1]

Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Тер-Гукасова Надежда Константиновна — специалист по кадровому делопроизводству отдела по кадровому администрированию управления персонала НИУ ВШЭ (г. Москва).
e-mail: nadj_nadj@mail.ru
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В теории гиперболической дзета-функции решёток значительную роль играет теорема Бахвалова, в которой величина дзета-функции решётки решений линейного сравнения оценивается через гиперболический параметр решётки.

В монографии Н. М. Коробова 1963 года эта теорема доказывается методом, отличным от первоначальной работы Н. С. Бахвалова. В этом методе центральную роль играет лемма о количестве решений линейного сравнения в прямоугольной области.

В работе даются новые оценки количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях. Это позволяет доказать усиленную теорему Бахвалова об оценки гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения.

Отличия теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях от соответствующей леммы Коробова состоит в том, что вместо одной оценки через отношение объёма прямоугольной области к гиперболическому параметру добавлены ещё два случая и в первом случае уменьшена константа. Использование теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях приводит к необходимости в доказательстве теоремы Бахвалова–Коробова рассматривать различные области применения теоремы о количестве точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, квадратурные формулы, метод оптимальных коэффициентов, количественная мера качества сетки.

Библиография: 26 названий.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:
Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-130-144

On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas

N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Ter-Gukasova Nadezhda Konstantinovna — HR Clerk of the HR Administration Department of the HSE Personnel Department (Moscow).
e-mail: nadj_nadj@mail.ru
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Senior Researcher, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In the theory of the hyperbolic zeta function of lattices, a significant role is played by the Bakhvalov theorem, in which the magnitude of the zeta function of the lattice of linear comparison solutions is estimated through the hyperbolic lattice parameter.

In N. M. Korobov's 1963 monograph, this theorem is proved by a method different from the original work of N. S. Bakhvalov. In this method, the central role is played by the lemma about the number of linear comparison solutions in a rectangular area.

The paper gives new estimates of the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular regions. This allows us to prove the strengthened Bakhvalov theorem on the evaluation of the hyperbolic zeta function of the lattice of solutions of linear comparison.

The difference between the theorem on the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular regions and the corresponding Korobov lemma is that instead of one estimate through the ratio of the volume of a rectangular region to a hyperbolic parameter, two more cases are added and in the first case the constant is reduced. The use of the theorem on the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas leads to the need to prove the Bakhvalov–Korobov theorem to consider various areas of application of the theorem on the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas.

Keywords: parallelepipedal grid, quadrature formulas, method of optimal coefficients, quantitative measure of grid quality

Bibliography: 26 titles.

For citation:
N. K. Ter-Gukasova, M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 130–144.

1. Введение

1.1. Актуальность и цель работы

Актуальность темы состоит в том, что решетка решений соответствующего линейного сравнения возникает при изучении количественной меры качества оптимальных коэффициентов и оценки погрешности приближенного интегрирования периодических функций с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками. Поэтому эта решетка играет важную роль в современных исследованиях по теории теоретико-числового метода приближенного анализа (см. [2] — [5], [11] — [16], [20] — [24]), в которых метод оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова занимает центральное место.

Особое значение параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами объясняется тем фактом, что квадратурные формулы с этими сетками задают ненасыщаемые алгоритмы численного интегрирования на классах E_s^α $(\alpha > 1)$ (см. [1], [19]), для которых порядок убывания погрешности почти наилучший.

Цель работы — получить оценки сверху для количества точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях, которые необходимы для оценки качества оптимальных коэффициентов параллелепипедальных сеток по простому модулю и модулю произведения двух простых, найденных по алгоритму Н. М. Коробова (см. [14], [16]).

1.2. Параллелепипедальные сетки Н. М. Коробова и решетки решений линейного сравнения

В 1959 году профессор Н. М. Коробов предложил новый класс теоретико-числовых сеток — параллелепипедальные сетки:

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где $(a_j, N) = 1$ $(j = 1, \ldots, s)$, и соответствующие квадратурные формулы с равными весами

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

На классе E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье были получены наилучшие результаты

$$|R_N[f]| << \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \quad \text{(Н. С. Бахвалов [2], Н. М. Коробов [15]).}$$

Эти оценки получены на основе изучения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ $(\alpha > 1)$ решетки $\Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N \qquad (1)$$

и

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha) = \sideset{}{'}\sum_{\vec{m}\in\Lambda(\vec{a},N)} \frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \sideset{}{'}\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_N(m_1a_1+\ldots+m_sa_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}, \tag{2}$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключен набор $\vec{m}=\vec{0}$, а символ Коробова $\delta_N(a)$ задается равенством

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a\equiv 0 \pmod N,\\ 0, & \text{если } a\not\equiv 0 \pmod N.\end{cases}$$

1.3. Качество параллелепипедальной сетки

Количественной мерой качества набора коэффициентов $a_1,\ldots, a_s$ параллелепипедальной сетки называется величина

$$H(N,\vec{a}) = \frac{3^s}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{j=1}^{s}\left(1-2\cdot\left\{\frac{a_j\cdot k}{N}\right\}\right)^2, \tag{3}$$

которая равна приближенному значению интеграла от периодической функции

$$h(\vec{x}) = 3^s\prod_{j=1}^{s}(1-2\{x_j\})^2$$

по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой

$$1=\int_0^1\ldots\int_0^1 h(\vec{x})d\vec{x} = \frac{3^s}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\prod_{j=1}^{s}\left(1-2\cdot\left\{\frac{a_j\cdot k}{N}\right\}\right)^2 - R_N[h],$$

где $R_N[h]$ — погрешность приближенного интегрирования.

Выбор функции $h(\vec{x})$ и величины $H(N,\vec{a})$ связан с тем, что функция $h(\vec{x})$ является граничной функцией класса $E_s^\alpha\left(\cdot,\frac{\pi^2}{6}\right)$ (подробности см. [16]).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$H(N,\vec{a}) = \left(1+\frac{2}{N^2}\right)^s + \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\psi(m_1)\ldots\psi(m_s)},$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} \dfrac{N^2}{N^2+2}, & \text{при } m=0;\\[2ex] \dfrac{N^2\sin^2\pi\frac{m}{N}}{6}, & \text{при } m\neq 0,\end{cases} \qquad N_1=\left[\frac{N-1}{2}\right],\quad N_2=\left[\frac{N}{2}\right].$$

Доказательство. См. [26].

Теорема 2. *Пусть для целых z функция $H(z)$ определена равенством*

$$H(z) = \frac{3^s}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(1-2\left\{\frac{k}{p}\right\}\right)^2\ldots\left(1-2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)^2, \tag{4}$$

где p — простое число, большее s.

Если при $z = a$ достигается минимум функции $H(z)$ на интервале $1 \leqslant z \leqslant p-1$, то целые $a_1 \equiv 1$, $a_2 \equiv a$, ..., $a_s \equiv a^{s-1} \pmod p$ $1 \leqslant a_j \leqslant p-1$ $(j = 1, \dots, s)$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p и выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{2}{p^2}\right)^s < H(a) < \left(1+\frac{2}{p^2}\right)^s + \frac{M(p,s)}{p^2} = 1 + O\left(\frac{\ln^{2s-2} p}{p^2}\right), \tag{5}$$

где

$$M(p,s) = \begin{cases} 2s \cdot 3^s \cdot p & \text{при } p < 2s \cdot 3^s \cdot e^{3s}, \\ 6s^2 \cdot 3^s \sum\limits_{r=2}^{s} C_s^r \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^r 2^r m(p,r) \cdot l(t_r, r) & \text{при } p \geqslant 2s \cdot 3^s \cdot e^{3s}, \end{cases}$$

$$m(t,r) = \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \frac{\ln^\nu t}{\nu!}, \quad l(t,r) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{\ln^\nu t}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{r-1-\nu} C_{r-1-\mu}^{\nu} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^\mu,$$

$$t_r = \frac{p}{2(s-1)\cdot 3^s \cdot m(p,r)}.$$

Доказательство. См. [18].

При доказательстве этой теоремы существенную роль играла следующая лемма.

Пусть $p > 2$ — простое, a_1, ..., a_s — фиксированные целые, не кратные p и $2 \leqslant r \leqslant s$. Рассмотрим решения сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p, \qquad |m_j| \leqslant \frac{p-1}{2} \qquad (j = 1, 2, \dots, s),$$

в которых ровно r переменных m_j отличны от нуля и определим величину $q_r = q_r(a_1, \dots, a_s)$ равенством $q_r = \min \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s$, где минимум берется по всем указанным ненулевым решениям сравнения и $\overline{x} = \max(|x|, 1)$ для вещественных x.

Лемма 1. *Существует не менее $(p+1)/2$ значений $z \in [1, p-1]$ таких, что при*

$$a_1 \equiv 1,\ a_2 \equiv z,\ \dots,\ a_s \equiv z^{s-1} \pmod p \tag{6}$$

для величин $q_r = q_r(a_1, \dots, a_s)$ будут выполняться оценки

$$q_r > \frac{p}{2(s-1)\cdot 3^s \cdot m(p,r)} \qquad (r = 2, \dots, s). \tag{7}$$

1.4. Теорема Бахвалова

Гиперболический параметр $q(\Lambda(\vec{a}, N))$ решетки решений сравнения (1) определяется как минимальное значение произведения $\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s$, где $m_1, \dots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N. \tag{8}$$

В следующей теореме, принадлежащей Н. С. Бахвалову [2], устанавливается связь между параметром $q(\Lambda(\vec{a}, N))$ и величиной гиперболической дзета-функции решетки $\Lambda(\vec{a}, N)$ при $N = p$.

Доказательство использует две леммы.

Лемма 2. *При любых целых λ, λ_ν, и $n_\nu \geqslant 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ справедлива оценка*

$$\sum_{k_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+n_1} \ldots \sum_{k_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+n_s} \delta_p(a_1k_1 + \ldots + a_sk_s + \lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n_1 \ldots n_s \leqslant q, \\ \dfrac{4n_1 \ldots n_s}{q} & \text{при} \quad n_1 \ldots n_s > q, \end{cases} \tag{9}$$

где $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки.

Лемма 3. *При любых действительных $\alpha > 1$ и $t \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{m_1 \ldots m_s \geqslant t} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^\alpha} \leqslant \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1, \ldots, m_s$, для которых произведение $m_1 \ldots m_s$ больше или равно t.

Теорема 3. *(Н. С. Бахвалов). Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки. Тогда при $N = p$ гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству*

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \leqslant 4\alpha \left(\frac{3\alpha^2}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln q)^{s-1}}{q^\alpha}. \tag{10}$$

В работе [9] теорема Бахвалова доказана в наиболее общем виде для гиперболической дзета-функции произвольной решетки Λ.

Замечание Легко показать (см. [17]), что существуют параллелепипедальные сетки, для которых при $q \ll p(\ln p)^{-1}$ оценку гиперболической дзета-функции теоремы 3 можно несколько усилить и вместо (10) получить оценку

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \ll \frac{\ln^s p}{pq^{\alpha-1}}. \tag{11}$$

Сравнительно сложно (см. [10]) получается усиление этой оценки:

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \ll \frac{\ln^{s-1} p}{pq^{\alpha-1}} \ln\ln p.$$

Наконец, в книге [16] утверждается, что с помощью соображений, использованных в работе [15], можно получить наиболее сильную оценку:

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) \ll \frac{\ln^{s-1} p}{pq^{\alpha-1}},$$

но этот результат нигде не опубликован.

В следующем разделе мы прежде всего усилим оценку из леммы 2.

2. Число точек решения линейного сравнения в прямоугольной области

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \prod_{\nu=1}^{s} [\lambda_\nu + 1; \lambda_\nu + n_\nu],$$

где $\vec{\lambda} \in \mathbb{Z}^s$, $\vec{n} \in \mathbb{N}^s$. Очевидно, что $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \vec{\lambda} + \Pi(\vec{0}; \vec{n})$.

Лемма 4. *Для любых целых b и λ справедливо равенство*

$$\sum_{m_j=b+1}^{b+N} \delta_N(a_j m_j + \lambda) = 1.$$

Доказательство. Действительно, так как $(a_j, N) = 1$, то $a_j m_j + \lambda$ пробегает полную систему вычетов по модулю N, когда m_j пробегает N последовательных целых значений. Поэтому в сумме ровно одно слагаемое равно 1, а все остальные равны 0 и лемма полностью доказана. □

Обозначим через $T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N)$ число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod N, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}). \end{cases} \tag{12}$$

Ясно, что

$$T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) = T(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \lambda + (\vec{a}, \vec{\lambda}); N). \tag{13}$$

Теорема 4. *Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки и величина n определена равенством $n = \max(n_1, \ldots, n_s)$. Тогда справедлива оценка*

$$T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leqslant \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n_1 \ldots n_s \leqslant q, \\ \dfrac{3n_1 \ldots n_s}{q} & \text{при} \quad n_1 \ldots n_s > q, n \leqslant \dfrac{q}{3}, \\ \dfrac{n_1 \ldots n_s}{n} & \text{при} \quad n_1 \ldots n_s > q, \dfrac{q}{3} < n < N, \\ \dfrac{2n_1 \ldots n_s}{N} & \text{при} \quad n \geqslant N. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство. При $n_1 \ldots n_s = 1$ оценка (14) очевидна.

Пусть $n_1 \ldots n_s > 1$. Утверждение леммы достаточно проверить для суммы

$$S = \sum_{k_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{k_s=1}^{n_s} \delta_N(a_1 k_1 + \ldots + a_s k_s + \mu) = T(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \mu; N), \tag{15}$$

при $\mu = a_1 \lambda_1 + \ldots + a_s \lambda_s + \lambda$ в силу (13).

Рассмотрим сперва случай $n_1 \ldots n_s \leqslant q$. Допустим, что в сумме (15) найдется два слагаемых, отличных от нуля: $\delta_N(a_1 k_1 + \ldots + a_s k_s + \mu) = 1$ и $\delta_N(a_1 k_1' + \ldots + a_s k_s' + \mu) = 1$. Тогда, согласно определению величины $\delta_N(m)$, числа $a_1 k_1 + \ldots + a_s k_s + \mu$ и $a_1 k_1' + \ldots + a_s k_s' + \mu$ будут кратны N. Но тогда и их разность также будет кратна N:

$$a_1(k_1 - k_1') + \ldots + a_s(k_s - k_s') \equiv 0 \pmod N.$$

Так как системы $k_1, \ldots, k_s$ и $k_1', \ldots, k_s'$ различны, то система $k_1 - k_1', \ldots, k_s - k_s'$ будет нетривиальным решением сравнения (1) и, следовательно,

$$q \leqslant \overline{k_1 - k_1'} \ldots \overline{k_s - k_s'} < n_1 \ldots n_s \leqslant q,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает первую из оценок (14).

Пусть теперь $n_1 \ldots n_s > q$. Определим величины r, ρ и l из условий

$$n_{r+1} \ldots n_s < q \leqslant n_r \ldots n_s, \quad q = \rho n_{r+1} \ldots n_s, \quad l[\rho] \leqslant n_r < (l+1)[\rho].$$

Очевидно, здесь $1 \leqslant r \leqslant s$, $1 < \rho \leqslant n_r$ и $l \geqslant 1$. Отметим ещё, что

$$l + 1 = \left[\frac{n_r}{[\rho]}\right] + 1 \leqslant \frac{n_r}{[\rho]} + 1 < \frac{2n_r}{\rho} + 1 \leqslant \frac{3n_r}{\rho} = 3\frac{n_r \ldots n_s}{q}. \tag{16}$$

Разбивая в сумме (15) интервал r–го суммирования на части, получим

$$S \leqslant \sum_{k_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{k_{r-1}=1}^{n_{r-1}} \sum_{\nu=0}^{l} \left[\sum_{k_r=\nu[\rho]+1}^{(\nu+1)[\rho]} \sum_{k_{r+1}=1}^{n_{r+1}} \ldots \sum_{k_s=1}^{n_s} \delta_p(a_1k_1 + \ldots + a_sk_s + \mu) \right].$$

Так как $[\rho]n_{r+1} \ldots n_s \leqslant q$, то согласно первой из оценок (14) сумма, стоящая в квадратных скобках, не превосходит единицы. Следовательно, пользуясь оценкой (16), получим

$$S \leqslant n_1 \ldots n_{r-1}(l+1) < 3\frac{n_1 \ldots n_s}{q},$$

и эта оценка справедлива всегда при $n_1 \ldots n_s \geqslant q$. Таким образом вторая из оценок (14) установлена.

Пусть $n_r = n$ и $n < N$, тогда, делая суммирование по m_r внутренним и пользуясь леммой 4, получим

$$S \leqslant n_1 \ldots n_{r-1}n_{r+1} \ldots n_s = \frac{n_1 \ldots n_s}{n}$$

и третья из оценок (14) установлена. При этом на указанном интервале она точнее чем вторая оценка.

Наконец, если $n_r = n \geqslant N$, то сделаем суммирование по m_r внутренним, получим

$$\sum_{m_r=1}^{n_r} \delta_N(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s + \mu) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{N}\right]} \sum_{m_r=1+kN}^{(k+1)N} \delta_N(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s + \mu) = \left[\frac{n}{N}\right] + 1 \leqslant \frac{2n}{N}$$

и

$$S \leqslant \frac{2n_1 \ldots n_s}{N},$$

чем теорема доказана полностью.

3. Усиленная теорема Бахвалова—Коробова

Теперь мы можем доказать усиленный вариант теоремы Бахвалова—Коробова для произвольного модуля N.

Теорема 5. *Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки. Тогда при $q \geqslant 4$ гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству*

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) <$$
$$< \frac{s2^\alpha}{(N-1)^\alpha}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^s + s\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha} +$$
$$+ \frac{6}{q^\alpha}\left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right)\sum_{r=2}^{s}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-r}\alpha^{r-1}\left(2 + 2\ln\frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6}\right)^{r-1}. \qquad (17)$$

Доказательство. По определению гиперболической дзета-функции решетки Λ имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a}, N)|\alpha) = {\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' \frac{\delta_N(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}. \qquad (18)$$

В силу условия теоремы при $\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<q$ слагаемые суммы (18) равны нулю.

Определим функцию $\varphi(m_1,\ldots,m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1,\ldots,m_s)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<q,\\ \delta_N(a_1m_1+\ldots+a_sm_s), & \text{если}\quad \overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\geqslant q.\end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=$$
$$=\sum_{m_1,\ldots,m_s=1}^{\infty}\prod_{\nu=1}^{s}\left(\frac{1}{m_\nu^\alpha}-\frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha}\right)\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s}\varphi(k_1,\ldots,k_s).$$

Пусть $\lambda=0$, $\lambda_\nu=-(m_\nu+1)$ и $n_\nu=2m_\nu+1$ $(\nu=1,2,\ldots,s)$. Тогда при $m_1\ldots m_s\geqslant q$ утверждение теоремы 4 (с. 136) можно записать в виде

$$\sum_{|k_1|\leqslant m_1}\ldots\sum_{|k_s|\leqslant m_s}\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s)\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases}0 & \text{при}\quad m_1\ldots m_s<q,\\ \dfrac{3(2m_1+1)\ldots(2m_s+1)}{q} & \text{при}\quad {\scriptstyle m_1\ldots m_s>q, \atop \max(2m_1+1,\ldots,2m_s+1)\leqslant\frac{q}{3}},\\ \dfrac{(2m_1+1)\ldots(2m_s+1)}{\max(2m_1+1,\ldots,2m_s+1)} & \text{при}\quad {\scriptstyle m_1\ldots m_s>q, \atop \frac{q}{3}<\max(2m_1+1,\ldots,2m_s+1)<N},\\ \dfrac{2(2m_1+1)\ldots(2m_s+1)}{N} & \text{при}\quad \max(2m_1+1,\ldots,2m_s+1)\geqslant N.\end{cases}$$

Пользуясь этой оценкой, получим

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)\leqslant S_{1,s}+S_2+S_3,$$

где

$$S_{1,s}=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_s=1,\\ m_1\ldots m_s\geqslant q}}^{\frac{q-3}{6}}\prod_{\nu=1}^{s}\left(\frac{1}{m_\nu^\alpha}-\frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha}\right)\frac{3(2m_1+1)\ldots(2m_s+1)}{q},\tag{19}$$

$$S_2=s\sum_{\frac{q-3}{6}<m_s<\frac{N-1}{2}}\ \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_{s-1}=1,\\ m_1\ldots m_s\geqslant q}}^{m_s}\prod_{\nu=1}^{s}\left(\frac{1}{m_\nu^\alpha}-\frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha}\right)\prod_{\nu=1}^{s-1}(2m_\nu+1),\tag{20}$$

$$S_3=\frac{2s}{N}\sum_{m_s\geqslant\frac{N-1}{2}}^{\infty}\ \sum_{m_1,\ldots,m_{s-1}=1}^{m_s}\prod_{\nu=1}^{s}\left(\frac{1}{m_\nu^\alpha}-\frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha}\right)(2m_\nu+1).\tag{21}$$

Прежде всего заметим, что

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m^\alpha}-\frac{1}{(m+1)^\alpha}\right)(2m+1)=\sum_{m=1}^{n}\frac{2m+1}{m^\alpha}-\sum_{m=2}^{n+1}\frac{2m-1}{m^\alpha}=$$
$$=1+2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^\alpha}-\frac{2n+1}{(n+1)^\alpha}<3+\frac{2}{\alpha-1}$$

и, следовательно,

$$S_3 \leqslant \frac{2s}{N}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\sum_{m_s\geqslant\frac{N-1}{2}}^{\infty}\left(\frac{1}{m_s^\alpha}-\frac{1}{(m_s+1)^\alpha}\right)(2m_s+1)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2s}{N}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\left(\frac{N-2}{\left(\frac{N-1}{2}\right)^\alpha}+2\sum_{m\geqslant\frac{N-1}{2}}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2s\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\left(\frac{2^\alpha}{(N-1)^\alpha}+\frac{2^\alpha}{(\alpha-1)N(N-1)^{\alpha-1}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{s2^\alpha}{(N-1)^\alpha}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s}. \tag{22}$$

Аналогично, получаем

$$S_2 \leqslant s\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\sum_{\frac{q-3}{6}<m_s<\frac{N-1}{2}}\left(\frac{1}{m_s^\alpha}-\frac{1}{(m_s+1)^\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant s\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha}. \tag{23}$$

Перейдем к оценке величины $S_{1,s}$:

$$S_{1,s}=\frac{3}{q}\left(\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_{s-1}=1,\\ m_1\ldots m_{s-1}\geqslant q}}^{\frac{q-3}{6}}\prod_{\nu=1}^{s-1}\left(\frac{1}{m_\nu^\alpha}-\frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha}\right)(2m_\nu+1)\cdot\right.$$

$$\cdot\sum_{m_s=1}^{\frac{q-3}{6}}\left(\frac{1}{m_s^\alpha}-\frac{1}{(m_s+1)^\alpha}\right)(2m_s+1)+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_{s-1}=1,\\ m_1\ldots m_{s-1}<q}}^{\frac{q-3}{6}}\prod_{\nu=1}^{s-1}\left(\frac{1}{m_\nu^\alpha}-\frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot(2m_\nu+1)\sum_{m_s\geqslant\frac{q}{m_1\ldots m_{s-1}}}^{\frac{q-3}{6}}\left(\frac{1}{m_s^\alpha}-\frac{1}{(m_s+1)^\alpha}\right)(2m_s+1)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)S_{1,s-1}+S_{4,s}, \tag{24}$$

где

$$S_{4,s}=\frac{3}{q}\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_{s-1}=1,\\ m_1\ldots m_{s-1}<q}}^{\frac{q-3}{6}}\prod_{\nu=1}^{s-1}\left(\frac{1}{m_\nu^\alpha}-\frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha}\right)(2m_\nu+1)\cdot$$

$$\cdot\sum_{m_s\geqslant\frac{q}{m_1\ldots m_{s-1}}}^{\frac{q-3}{6}}\left(\frac{1}{m_s^\alpha}-\frac{1}{(m_s+1)^\alpha}\right)(2m_s+1). \tag{25}$$

Применяя несколько раз неравенство (24), получим

$$S_{1,s}\leqslant\sum_{r=2}^{s}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-r}S_{4,r}. \tag{26}$$

Имеем:

$$\sum_{m_r \geqslant \frac{q}{m_1 \dots m_{r-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_r^\alpha} - \frac{1}{(m_r+1)^\alpha} \right) (2m_r+1) =$$

$$= \sum_{m_r \geqslant \frac{q}{m_1 \dots m_{r-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \frac{2m_r+1}{m_r^\alpha} - \sum_{m_r \geqslant \frac{q}{m_1 \dots m_{r-1}}+1}^{\frac{q+3}{6}} \frac{2m_r-1}{m_r^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant 2\frac{(m_1 \dots m_{r-1})^{\alpha-1}}{q^{\alpha-1}} \left(1 + \frac{1}{\alpha-1}\right) + 2\frac{(m_1 \dots m_{r-1})^{\alpha}}{q^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\frac{(m_1 \dots m_{r-1})^{\alpha-1}}{q^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right).$$

Поэтому

$$S_{4,r} \leqslant \frac{6}{q^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right) \sum_{\substack{m_1,\dots,m_{r-1}=1, \\ m_1 \dots m_{r-1} < q}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{r-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu+1) m_\nu^{\alpha-1}.$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) (2m+1) m^{\alpha-1} < \sum_{m=1}^{\frac{q-3}{6}} \alpha \frac{2m+1}{m^2} <$$

$$< \alpha \left(2 + 2\ln\frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6} \right),$$

то

$$S_{4,r} < \frac{6}{q^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right) \alpha^{r-1} \left(2 + 2\ln\frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6} \right)^{r-1}.$$

Отсюда и из (19) — (26) вытекает, что

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha) < \frac{s2^\alpha}{(N-1)^\alpha} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^s + s\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1} \frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha} +$$

$$+ \sum_{r=2}^{s} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-r} \frac{6}{q^\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right) \alpha^{r-1} \left(2 + 2\ln\frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6} \right)^{r-1}.$$

□

4. Заключение

На наш взгляд перспективно объединить подходы данной статьи и работы В. А. Быковского [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.

4. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 – 223.

6. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 – 90.

7. М. Н. Добровольский Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 – 121.

8. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 – 59.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

10. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41—48.

11. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.

12. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.

13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.

14. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

15. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.

16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

17. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики“. Тула, 2002. С. 39—40.

18. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.

19. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

20. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.

21. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

22. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

23. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

24. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

25. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 — 201.

26. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. В печати.

REFERENCES

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.

4. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 – 223.

6. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 – 90.

7. М. Н. Добровольский Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 1(4) С. 95 – 121.

8. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43 – 59.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

10. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3. Вып. 1 (3) С. 41—48.

11. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.

12. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.

13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. N 5. С. 1009—1012.

14. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

15. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.

16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

17. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики “. Тула, 2002. С. 39—40.

18. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. Тула. 2007. Т. 8, вып. 4(24) С. 105 – 128.

19. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

20. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009 Т. 10, вып. 1(29). С. 65–77.

21. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

22. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

23. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology", Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

24. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

25. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 1293 — 201.

26. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2015. В печати.

Получено: 11.10.2022
Принято в печать: 22.12.2022