

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-117-129

**Метод Рунге решения дифференциальных уравнений
в частных производных с применением
теоретико-числовых сеток¹**

А. В. Родионов

Родионов Александр Валерьевич — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} Lu(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ u(\vec{x})|_{\partial G_s} &= g(\vec{x}), \end{aligned}$$

где $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, G_s — единичный куб $[0; 1]^s$.

Её решение сводится к отысканию минимума функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int \dots \int_{G_s} F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s$$

при заданных граничных условиях.

Значения функционала $v(u(\vec{x}))$ в методе Рунге рассматриваются не на множестве всех допустимых функций $u(\vec{x})$, а на линейных комбинациях

$$u(\vec{x}) = W_0(\vec{x}) + \sum_{k=1}^n w_k W_k(\vec{x}),$$

где $W_k(\vec{x})$ — некоторые базисные функции, которые будем находить с помощью теоретико-числовой интерполяции, причём $W_0(\vec{x})$ — функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, а остальные $W_k(\vec{x})$ удовлетворяют однородным граничным условиям.

На этих полиномах данный функционал превращается в функцию $\varphi(\vec{w})$ от коэффициентов $w_1, \dots, w_n$. Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция $\varphi(\vec{w})$ достигала экстремума. При некоторых ограничениях на функционал $v(u(\vec{x}))$ и базисные функции $W_k(\vec{x})$ получим приближённое решение краевой задачи.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационные методы.

Библиография: 10 названий.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:

А. В. Родионов. Метод Ритца решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением теоретико-числовых сеток // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 117–129.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-117-129

The Ritz method for solving partial differential equations using number-theoretic grids

A. V. Rodionov

Rodionov Alexander Valer'evich — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Abstract

Consider the problem

$$\begin{aligned} Lu(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ u(\vec{x})|_{\partial G_s} &= g(\vec{x}), \end{aligned}$$

where $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, L is a linear differential operator with constant coefficients, G_s is the unit cube $[0; 1]^s$.

Its solution is reduced to finding the minimum of the functional

$$v(u(\vec{x})) = \int_{G_s} \dots \int F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s$$

under given boundary conditions.

The values of the functional $v(u(\vec{x}))$ in the Ritz method are considered not on the set of all admissible functions $u(\vec{x})$, but on linear combinations

$$u(\vec{x}) = W_0(\vec{x}) + \sum_{k=1}^n w_k W_k(\vec{x}),$$

where $W_k(\vec{x})$ are some basic functions that we will find using number-theoretic interpolation, and $W_0(\vec{x})$ is a function that satisfies the given boundary conditions, and the rest $W_k(\vec{x})$ satisfy homogeneous boundary conditions.

On these polynomials, this functional turns into a function $\varphi(\vec{w})$ of the coefficients $w_1, \dots, w_n$. These coefficients are chosen so that the function $\varphi(\vec{w})$ reaches an extremum. Under some restrictions on the functional $v(u(\vec{x}))$ and the basis functions $W_k(\vec{x})$, we obtain an approximate solution of the boundary value problem.

Keywords: number-theoretic method, partial differential equations, variational methods.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

A. V. Rodionov, 2022, "The Ritz method for solving partial differential equations using number-theoretic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 117–129.

1. Введение

В середине прошлого века Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение класс E_s^α , $\alpha > 1$. Это класс функций $f(x_1, \dots, x_s)$, которые имеют период равный единице по каждой из переменных и для коэффициентов Фурье этой функции $C(m_1, \dots, m_s)$ выполняется оценка

$$|C(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{C}{(\bar{m}_1 \cdot \dots \cdot \bar{m}_s)^\alpha},$$

где $\bar{m} = \max(|x|, 1)$.

Класс периодических функций E_s^α относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha| \quad (1)$$

является несепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_0 — пространству всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.

В 1959 году в работе [2] Н. М. Коробов предложил квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

где целые $a_1, \dots, a_s$ — специально выбранные числа — оптимальные коэффициенты.

Для этих формул на классе E_s^α выполняется оценка погрешности $|R_N[f]| = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ зависит только от α и s .

Точность найденных формул численного интегрирования значительно превосходит точность как классических, так и вероятностных формул при определенном соотношении между величинами N , α и s . Более того, полученная оценка тем точнее, чем больше гладкость рассматриваемой функции.

Использование параллелепипедальных сеток не ограничивается только численным интегрированием.

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [8] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) u(t, \vec{x}), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s), \\ u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \quad (4)$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \dots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \dots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$).

В своей работе В. С. Рябенький предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные

условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

В работе [6] Н. М. Коробов рассмотрел решение частной задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона с правой частью из класса E_s^α :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(\vec{x}), \quad (5)$$

$$u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \quad (6)$$

$$f(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_s) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_s) \quad (j = 1, \dots, s),$$

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ при } x_1(1 - x_1) \cdot \dots \cdot x_s(1 - x_s) = 0. \quad (7)$$

Таким образом,

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = 0, \quad G_s = [0; 1]^s.$$

Метод Н. М. Коробова состоял в получении с помощью параллелепипедальных сеток $M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right)$ ($k = 0, \dots, N-1$) приближенного решения указанной задачи Дирихле на основании точного решения в виде ряда Фурье, которое легко выписать по ряду Фурье периодической функции $f(\vec{x})$. Необходимость приближенного решения обусловлена тем, что, как правило, явного вида ряда Фурье неизвестно, а потому, точное решение имеет только теоретическое значение.

Другой подход к решению дифференциальных уравнений в частных производных использовали Я. М. Жилейкин [4, 5] и В. Т. Стоянец [9]. В своих работах они сводили задачу решения дифференциального уравнения к задаче вычисления интегралов, которые, в свою очередь, находили с помощью параллелепипедальных сеток.

В 1980 году Л. А. Книжнерман [1] применил вариационный метод решения задач для уравнений в частных производных. Суть его заключается в следующем.

Рассматривается задача $Lu = f$, где u — элемент линейного нормированного пространства решений U , f — элемент гильбертова пространства правых частей F , $L : U \rightarrow F$ — линейный дифференциальный оператор. Аппроксимируем все переменные компоненты оператора L и правой части f рядами по многочленам Лежандра с использованием теоретико-числовых сеток. Полученная приближённая задача $\tilde{L}u = \tilde{f}$ решается на конечномерном подпространстве $U' \subset U$. В качестве приближённого решения берётся функция u , минимизирующая квадрат нормы невязки $\|\tilde{L}u - \tilde{f}\|_F^2$.

В данной работе будем использовать прямой вариационный метод — метод Ритца. Рассмотрим задачу

$$Lu(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (8)$$

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = g(\vec{x}), \quad (9)$$

где $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, G_s — единичный куб $[0; 1]^s$.

Её решение сводится к отысканию минимума функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int_{G_s} \dots \int F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s \quad (10)$$

при заданных граничных условиях (см. напр. [10]).

Значения функционала $v(u(\vec{x}))$ в методе Рунге рассматриваются не на множестве всех допустимых функций $u(\vec{x})$, а на линейных комбинациях

$$u(\vec{x}) = W_0(\vec{x}) + \sum_{k=1}^n w_k W_k(\vec{x}),$$

где $W_k(\vec{x})$ — некоторые базисные функции, которые будем находить с помощью теоретико-числовой интерполяции, причём $W_0(\vec{x})$ — функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям, а остальные $W_k(\vec{x})$ удовлетворяют однородным граничным условиям.

На этих полиномах функционал (10) превращается в функцию $\varphi(\vec{w})$ от коэффициентов $w_1, \dots, w_n$. Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция $\varphi(\vec{w})$ достигала экстремума. При некоторых ограничениях на функционал $v(u(\vec{x}))$ и базисные функции $W_k(\vec{x})$ получим приближённое решение задачи (8).

2. Интерполяционные полиномы по параллелепипедальным сеткам

В 2005 году в работе [3] Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян, О. В. Андреева и Н. В. Зайцева предложили способ построения интерполяционного полинома периодической функции многих переменных, заданной в узлах параллелепипедальной сетки.

Их подход заключается в выборе полной решётки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^s$. Данной решётке ставятся в соответствие параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ и конечное множество целочисленных векторов $M^*(\Lambda)$ — полная система вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно Λ . Тогда, если известны значения периодической функции $f(\vec{x})$ в узлах сетки $M(\Lambda)$, то тригонометрический полином

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad c_{\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

Данный раздел посвящён описанию фактов, необходимых для построения интерполяционных многочленов по параллелепипедальной сетке.

Пусть $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^s$. Совокупность λ всех векторов вида

$$a_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + a_s \vec{\lambda}_s,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется решеткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — базисом этой решетки.

Взаимной решеткой к решетке Λ называется множество Λ^* , заданное равенством

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}. \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Пусть базис $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s})$ ($\nu = 1, \dots, s$) решетки Λ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Величина $\det A$ называется детерминантом решётки $\det \Lambda$ и не зависит от выбора базиса решётки.

Тогда базис взаимной решётки Λ^* задаётся матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det \Lambda} & \cdots & \frac{A_{1s}}{\det \Lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{s1}}{\det \Lambda} & \cdots & \frac{A_{ss}}{\det \Lambda} \end{pmatrix}, \quad \det \Lambda \neq 0,$$

где $A_{\nu,\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu,\mu}$.

Тогда сетка $M(\Lambda)$ имеет вид

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \mid 0 \leq x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \cdots + k_s A_{s\nu}}{\det \Lambda} < 1; \nu = 1, \dots, s; \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Рассмотрим теперь линейное сравнение

$$x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_s x_s \equiv 0 \pmod{N}, \quad (12)$$

где $(a_j, N) = 1$ для всех $j = 1, \dots, s-1$.

Решение этого сравнение представляет собой решётку Λ . Её базисная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_s & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Детерминант этой решётки равен N , а соответствующая ей сетка $M(\Lambda)$ имеет вид

$$M(\Lambda) = \left\{ \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{ka_2}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{ka_s}{N} \right\} \right) \mid k = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Усеченной нормой вектора $\vec{x}$ называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} q(\vec{x}).$$

Он имеет простой геометрический смысл: гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ при $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{ \vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T \},$$

а величина T — его параметром.

r -й компонентой гиперболического креста $K(T)$ называется подмножество

$$K_r(T) = \{ \vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq T, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0 \}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K(T) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_r(T) \right) \cup \{ \vec{0} \}.$$

Если $M \subset \Lambda$ — подрешетка решетки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешетки M решетки Λ . Два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ решетки Λ сравнимы по подрешетке M (находятся в одном классе относительно подрешетки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$. В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешетки M решетки Λ равен числу классов решетки Λ относительно M .

ЛЕММА 1. Если решётка Λ является решёткой линейного сравнения (12), то два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{Z}^s$ сравнимы по подрешётке Λ тогда и только тогда, когда

$$x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_s x_s \equiv y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_s y_s \pmod{N}.$$

Произвольное множество векторов решетки Λ по одному из каждого класса относительно решетки M называется полной системой вычетов решетки Λ относительно M .

Обычно полную систему вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ называется минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ , состоящая из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, называется абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.

Такая полная система вычетов обозначается через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решетки $N\mathbb{Z}$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 3. В s -мерном случае таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f(\vec{x})$ на $M(\Lambda)$ полином

$$I_\Lambda(f(\vec{x})) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (13)$$

где

$$c_{\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} \quad (14)$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3] $\square$

ЛЕММА 2. Пусть значения функции $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$, при $\vec{x} \in M(\Lambda)$ и множество $M^*(\Lambda)$ симметрично относительно начала координат. Тогда интерполяционный многочлен $I_\Lambda(f(\vec{x}))$ — действительнoзначная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь тем, что $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ и $(e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})})^{-1} = \overline{e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}}$ получим

$$c_{-\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(-\vec{m}, \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} \right)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \overline{e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})}} = \bar{c}_{\vec{m}}.$$

Из равенства $c_{-\vec{m}} = \bar{c}_{\vec{m}}$ следует утверждение леммы. $\square$

Тригонометрический полином (13) зависит от полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ . Выбор $M^*(\Lambda)$ зависит от класса функций, для которого рассматривается данная задача.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Третьим гиперболическим параметром целочисленной решетки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ . Другими словами все целые точки этого креста несравнимы по модулю Λ .

Для класса E_s^α верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для любой целочисленной решетки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ для любой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3] $\square$

3. Решение задачи в общем случае

Опишем построение функций $W_k(\vec{x})$ ($k = 0, \dots, n$).

Пусть $S \subset \mathbb{Z}^s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$, симметричное относительно начала координат.

Обозначим через $\mathbb{T}(S)$ пространство всех тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами

$$\mathbb{T}(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid c_{\vec{m}} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Также обозначим через $\mathbb{T}_0(S) \subset \mathbb{T}(S)$ пространство всех функций, принимающих значение нуль на границе s -мерного единичного куба $\overline{G_s} = [0; 1]^s$.

Найдём сначала на пространстве $\mathbb{T}(S)$ множество функций удовлетворяющих граничному условию

$$u(\vec{x})|_{\partial \overline{G_s}} = g(\vec{x}), \quad g(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (16)$$

Обозначим через $J_{s,t}^*$ множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_{s,t} = (j_1, \dots, j_s)$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел $1, 2, \dots, s$ такую, что $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq s$, $1 \leq j_{t+1} < \dots < j_s \leq s$. Таким образом $|J_{s,t}^*| = C_s^t$ и $J_{s,0}^* = J_{s,s}^* = \{(1, 2, \dots, s)\}$. Также обозначим

$$S(\vec{j}_{s,t}) = \{(m_{j_1}, \dots, m_{j_t}) | (m_1, \dots, m_s) \in S\}.$$

Для дальнейшего потребуется явный вид $J_{s,s-1}^*$:

$$J_{s,s-1}^* = \{(2, \dots, s, 1), (1, 3, \dots, s, 2), \dots, (1, \dots, s-2, s, s-1), (1, \dots, s)\}, \\ |J_{s,s-1}^*| = s.$$

В работе [7] доказана следующая лемма.

ЛЕММА 3. Для $u(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{T}(S)$:

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

граничное условие

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \partial \overline{G_S}) \quad (17)$$

выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*$ и

$$(m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1})$$

выполняются соотношения

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} = \sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}}. \quad (18)$$

Заметим, что коэффициенты функции $\varphi(\vec{x})$ являются решением этой системы, а решение соответствующей однородной системы

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in S, \\ (n_{j_1}, \dots, n_{j_{s-1}}) = (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}})}} c_{\vec{n}} = 0, \quad \vec{j}_{s,s-1} \in J_{s,s-1}^*, \quad (m_{j_1}, \dots, m_{j_{s-1}}) \in S(\vec{j}_{s,s-1}) \quad (19)$$

зависит только от множества S .

ТЕОРЕМА 3. Множество функций на пространстве $\mathbb{T}(S)$ удовлетворяющих граничному условию (16) представляет собой линейное многообразие и имеет вид

$$u(\vec{p}, \vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}}(\vec{p}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad c_{\vec{m}}(\vec{p}) = \sum_{t=1}^r p_t w_{\vec{m}}^{(t)} + d_{\vec{m}}, \quad (20)$$

где r — размерность пространства решений системы (19), $w_{\vec{m}}^{(t)}$ — некоторый его базис ($t = 1, \dots, r$, $\vec{m} \in S$), $p_t \in \mathbb{C}$ — произвольные коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$W_t(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} w_{\vec{m}}^{(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad t = 1, \dots, r$$

— базис пространства $\mathbb{T}_0(S)$.

Тогда множество функций, удовлетворяющих граничному условию (16) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(\vec{p}, \vec{x}) &= \sum_{t=1}^r p_t W_t(\vec{x}) + \varphi(\vec{x}) = \sum_{t=1}^r p_t \sum_{\vec{m} \in S} w_{\vec{m}}^{(t)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in S} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \\ &= \sum_{\vec{m} \in S} \left(\sum_{t=1}^r p_t w_{\vec{m}}^{(t)} + d_{\vec{m}} \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\vec{p}$ — произвольный вектор комплексных чисел. $\square$

Обозначим $S^+ \subset S$ — подмножество векторов в S , первая ненулевая координата которых положительна.

Пусть теперь через $\mathbb{TR}(S) \subset \mathbb{T}(S)$ — пространство вещественнозначных функций пространства $\mathbb{T}(S)$. Поскольку для таких функций выполнено условие $c_{-\vec{m}} = \bar{c}_{\vec{m}}$, $\vec{m} \in S$, то

$$\mathbb{TR}(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S^+} \left[\alpha_{\vec{m}} \cos(2\pi(\vec{m}, \vec{x})) + \beta_{\vec{m}} \sin(2\pi(\vec{m}, \vec{x})) \right] \mid \alpha_{\vec{m}}, \beta_{\vec{m}} \in \mathbb{R} \right\},$$

где $\alpha_{\vec{m}} = 2 \operatorname{Re} c_{\vec{m}}$, $\beta_{\vec{m}} = -2 \operatorname{Im} c_{\vec{m}}$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int_{G_s} \dots \int F(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_s}) dx_1 \dots dx_s \quad (22)$$

на пространстве функций $\mathbb{TR}(S)$.

Подставим в (22) тригонометрические полиномы $u(\vec{p}, \vec{x})$, найденные в предыдущем разделе. В этом случае $v(u(\vec{x}))$ превращается в функцию $\varphi(\vec{p})$. Далее задача сводится к отысканию коэффициентов p_t , при которых достигается минимум этой функции. Метод нахождения этих коэффициентов зависит от вида функционала $v(u(\vec{x}))$.

4. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

В качестве примера использования описанного метода рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (23)$$

$$u(\vec{x})|_{\partial G_s} = g(\vec{x}). \quad (24)$$

Решение этой задачи сводится к отысканию минимума функционала

$$v(u(\vec{x})) = \int_{G_s} \dots \int \left(\sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + 2u(x)f(x) \right) dx_1 \dots dx_s \quad (25)$$

с граничным условием $u(\vec{x})|_{\partial G_s} = g(\vec{x})$.

Выберем решётку Λ и построим интерполяционные полиномы $I_\Lambda f(\vec{x})$ и $I_\Lambda g(\vec{x})$ функций $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ соответственно. Тогда множество $S = M^*(\Lambda)$ и эти интерполяционные полиномы будут принадлежать пространству $\mathbb{TR}(M^*(\Lambda))$. Заменим задачу поиска минимума функционала (25) на пространстве всех допустимых функций задачей поиска минимума данного функционала на пространстве $\mathbb{TR}(M^*(\Lambda))$.

ТЕОРЕМА 4. Для функций $u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in \mathbb{TR}(S)$, заданных тригонометрическими многочленами

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

верно равенство

$$v(u(\vec{x})) = 4\pi^2 \sum_{\vec{m} \in S} |c_{\vec{m}}|^2 \vec{m}^2 + 2 \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} \bar{b}_{\vec{m}}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k} &= 2\pi i \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} m_k e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 = -4\pi^2 \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} c_{\vec{m}} c_{\vec{n}} m_k n_k e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}, \quad k = 1, \dots, s, \\ u(\vec{x}) f(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} b_{\vec{m}} c_{\vec{n}} e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})}, \end{aligned} \quad (27)$$

то из равенства

$$\int_{G_s} \dots \int_{G_s} e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} dx_1 \dots dx_s = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{n} = -\vec{m}, \\ 0, & \text{при } \vec{n} \neq -\vec{m}, \end{cases} \quad \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \quad (28)$$

найдем интеграл:

$$\begin{aligned} v(u(\vec{x})) &= \int_{G_s} \dots \int_{G_s} \left(-4\pi^2 \sum_{k=1}^s \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} c_{\vec{m}} c_{\vec{n}} m_k n_k e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} + 2 \sum_{\vec{m}, \vec{n} \in S} b_{\vec{m}} c_{\vec{n}} e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} \right) dx_1 \dots dx_s = \\ &= -4\pi^2 \sum_{k=1}^s \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} c_{-\vec{m}} m_k (-m_k) + 2 \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} b_{-\vec{m}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку функции $u(\vec{x}), f(\vec{x}) \in \mathbb{TR}(S)$, то $\vec{m} \in S$ $c_{-\vec{m}} = \bar{c}_{\vec{m}}$ и $b_{-\vec{m}} = \bar{b}_{\vec{m}}$, из чего следует утверждение теоремы. $\square$

Так как, из условия (20) коэффициенты $c_{\vec{m}} = c_{\vec{m}}(\vec{p})$, то, обозначив $p_k = \alpha_k + i\beta_k$, получим многочлен

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 4\pi^2 \sum_{\vec{m} \in S} |c_{\vec{m}}(\vec{p})|^2 \vec{m}^2 + 2 \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}}(\vec{p}) \bar{b}_{\vec{m}}, \quad c_{\vec{m}}(\vec{p}) = \sum_{t=1}^r p_t w_{\vec{m}}^{(t)} + d_{\vec{m}}.$$

Коэффициенты $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, при которых достигается данного многочлена находятся из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

5. Заключение

В работе рассмотрен подход к решению первой краевой задачи на классах периодических функций E_s^α в s -мерном кубе. Дело в том, что параллелепипедальные сетки наиболее эффективны именно для таких функций. Однако, от условия периодичности можно избавиться, если воспользоваться одним из вариантов периодизации, предложенных Н. М. Коробовым (см. напр. [6]).

Теоретико-числовые сетки также используются для вычисления интегралов на областях отличных от куба. Отдельный интерес представляет использование данного подхода к решению дифференциальных уравнений в таких областях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Книжнерман, Л. А. Приложение метода оптимальных коэффициентов к численному решению уравнений в частных производных: Дис. ... канд. физико-математические науки: 01.01.06, 01.01.07. - М.: РГБ, 2006.

2. Коробов, Н. М. О приближённом вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С. 1207–1210.
3. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004 Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 — 143.
4. Жилейкин Я. М. О приближённом решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа.- докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 5, с. 999-1002.
5. Жилейкин Я. М. О методе приближённого решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде.- Журн. вычислительной математики и матем. физики, 1965, т. 5, № 2, с. 345-347.
6. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
7. А. В. Родионов. О методе Н. М. Коробова приближенного решения задачи Дирихле // Чебышевский сборник, 15:3 (2014), 48–85.
8. Рябенский В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретико-числовых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232–237.
9. Стоянец В. Т. Решение задачи Коши для параболического уравнения методом квази Монте-Карло.- Журн. вычислительной математики и матем. физики, 1973, т. 13, № 5, с. 1153-1160.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 425 с.
11. W. Ritz. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1909, vol. 135, pages 1–61.

REFERENCES

1. Knizhnerman, L. A. “Application of the method of optimal coefficients to the numerical solution of partial differential equations”: Dis. ... cand. physical and mathematical sciences: 01.01.06, 01.01.07. - М.: RGB, 2006.
2. N. M. Korobov, 1959, “On the approximate calculation of multiple integrals”, DAN SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
3. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, “Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation”, Chebyshevskii sbornik, vol. 5, iss. 1(9), pp. 122–143.
4. Zhileikin Ya. M. “On the approximate solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation”. - Dokl. AN SSSR, 1964, vol. 155, no. 5, p. 999-1002.
5. Zhileikin Ya. M. “On the method of approximate solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a rectangular parallelepiped”.- Zh. Computational Mathematics and Mathematics. Physics, 1965, vol. 5, no. 2, p. 345-347.
6. N. M. Korobov, 1963, “Number-theoretic methods in approximate analysis”, Moscow: Fizmatgiz.

7. A. V. Rodionov, 2014, "About N. M. Korobov's method of approximate solution of the Dirichlet problem", vol. Chebyshevskii sbornik, vol. 15:3, pp. 48–85.
8. V. S. Ryabenky, 1961, "On one method for obtaining difference schemes and on the use of number-theoretic grids for solving the Cauchy problem by the finite difference method", Tr. matem. V. A. Steklov Institute, vol. 60, p. 232–237.
9. V. T. Stoyantsev, "Solution of the Cauchy problem for a parabolic equation by the quasi Monte Carlo method", Zh. Computational Mathematics and Mathematics. Physics, 1973, vol. 13, no. 5, p. 1153-1160.
10. Elsgol'ts L. E. Differential Equations and the Calculus of Variations. M.: Nauka, 1969. 425 p.
11. W. Ritz. "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1909, vol. 135, pages 1–61.

Получено: 24.07.2022

Принято в печать