

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 15 Выпуск 2 (2014)

УДК 511.512

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ АДДИТИВНОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л. Н. Куртова (г. Белгород)

Аннотация

В теории чисел важную роль играют аддитивные задачи. Одной из них является проблема делителей Ингама о представлении натурального числа в виде разности произведений натуральных чисел. Уточнением остаточного члена в асимптотической формуле для числа решений данного уравнения занимались такие математики как Т. Эстерман, Д. И. Исмоилов, Д. Р. Хиз-Браун, Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков, Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец.

В настоящей работе рассматривается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей Ингама. Пусть d — отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ — мнимое квадратичное поле, δ_F — дискриминант поля F ; $Q_1(\bar{m})$, $Q_2(\bar{k})$ — бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_1 , A_2 , $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число; $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$.

Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$ с весами $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$. В данной асимптотической формуле дискриминант поля δ_F — фиксированное число, а остаточный член имеет оценку $O(h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon})$, которая не зависит от δ_F . Кроме того, с ростом основного параметра n параметр h может расти как $O(n)$.

Доказательство асимптотической формулы основано на круговом методе, когда сумма, являющаяся числом решений рассматриваемого уравнения, представляется в виде интеграла; разбиении отрезка интегрирования числами ряда Фарея, при этом выбранные веса позволяют использовать функциональное уравнение для двумерного тета-ряда. Кроме того, представляет важность оценка одной суммы, содержащей суммы Гаусса. За счет явных формул для некоторого произведения сумм Гаусса от числа, взаимно простого с дискриминантом поля, удастся представить данную сумму как сумму Kloostermana и применить к ней оценку А. Вейля.

Ключевые слова: аддитивные задачи, число решений, асимптотическая формула, сумма Kloostermana, квадратичная форма.

Библиография: 16 названий.

ABOUT ONE ANALOG OF THE ADDITIVE DIVISOR PROBLEM WITH QUADRATIC FORMS

L. N. Kurtova

Abstract

In the number theory additive problems is very important. One of them is the Ingham binary additive divisor problem on the representation of natural number as the difference of product of numbers. Many mathematician like T. Esterman, D. I. Ismoilov, D. R. Heath-Brown, G. I. Arkhipov and V. N. Chubarikov, J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec improved the remainder term in the asymptotic formula of the number of solution of this diophantine equation.

In present paper one problem with quadratic forms is considered. This problem is analog of the Ingham binary additive divisor problem. Let d — negative square-free number, $F = Q(\sqrt{d})$ — imaginary quadratic field, δ_F — discriminant of field F , $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ — binary positive defined primitive quadratic forms with matrixes A_1 , A_2 , $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$, $\varepsilon > 0$ — arbitrarily small number; $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$.

The asymptotical formula of the number of solution of diophantine equation $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = h$ with weight coefficient $\exp(-(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k}))/n)$ is received. In this asymptotical formula discriminant of field δ_F is fixed and the remainder term is estimating as $O(h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon})$, which not depend of δ_F . Moreover the parameter h grow as $O(n)$ with growing on the main parameter n .

Proof of the asymptotical formula based on circular method when sum, which is solution of diophantine equation, may be representing as integral. Interval of integration divided by numbers of Farey series. The taking weight coefficient allow to use the functional equation of the theta-function. Moreover the estimation of one sum with Gauss sums is important. Using the evident formula of some product of Gauss sums of the number which coprimes of discriminant of field this sum represented of Kloosterman's sum which estimate by A. Weil.

Keywords: additive problems of number theory, asymptotic formula, Kloosterman's sum, quadratic form.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

В 1927 году А. Е. Ингам [1] поставил и решил элементарными методами задачу получения асимптотической формулы для числа решений $J(n)$ уравнения:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \leq n;$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$.

Эта задача получила название бинарной аддитивной проблемы делителей.

Пусть $\tau(x)$ — число натуральных делителей x , тогда

$$J(n) = \sum_{x \leq n} \tau(x)\tau(x+1).$$

А. Е. Ингам доказал, что

$$J(n) = \frac{6}{\pi^2} n \ln^2 n + O(n \ln n).$$

В 1931 году Т. Эстерман [2], применив к задаче Ингама круговой метод, вывел для $J(n)$ асимптотическую формулу, остаточный член которой имеет степенное понижение по сравнению с главным. Им получен следующий результат:

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n),$$

где $P_2(x)$ — многочлен 2-ой степени, а

$$R(n) = O(n^{11/12} \ln^{17/3} n).$$

В 1979 году Д. И. Исмоилов [3], дополнив элементарный метод Т. Эстермана оценками А. Вейля [4, 5] суммы Клоостермана, получил следующую оценку остатка:

$$R(n) \ll n^{5/6+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

В 1979 году другим методом ту же оценку получил Д. Р. Хиз-Браун [6].

В 2006 году Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков [7] вывели новую оценку остатка $R(n)$:

$$R(n) \ll n^{3/4} \ln^4 n.$$

В 1980 году Н. В. Кузнецов [8] представил сумму сумм Клоостермана через билинейные формы коэффициентов Фурье собственных функций оператора Лапласа и показал, что между суммами Клоостермана существует интерференция.

В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [9], используя формулу Н. В. Кузнецова, доказали, что

$$R(n) \ll n^{2/3+\varepsilon}.$$

Другое направление исследований, касающееся данной тематики, связано с рассмотрением различных аналогов проблемы делителей Ингама.

Используя дисперсионный метод, Ю. В. Линник [10] нашел полное решение неопределенной аддитивной проблемы делителей:

$$xy - x_1x_2 \dots x_k = 1, \quad xy \leq n,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_k, x, y \in \mathbb{N}$.

Им получена асимптотическая формула:

$$\sum_{x \leq n} \tau(x) \tau_k(x+1) = n P_k(\ln n) + O(n(\ln n)^{\alpha_0}),$$

где $\tau_k(x)$ — число представлений x в виде произведения k делителей, $P_k(\ln n)$ — многочлен k -ой степени от $\ln n$, α_0 — константа.

В настоящей работе рассматривается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей Ингама.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть d — отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ — мнимое квадратичное поле, δ_F — дискриминант поля F ; $Q_i(\bar{m}) = \frac{1}{2} \bar{m}^t A_i \bar{m}$ — бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i , $\det A_i = -\delta_F$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$I(n, h) = \sum_{Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h} e^{-\frac{Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})}{n}}.$$

Целью статьи является получение асимптотической формулы для суммы $I(n, h)$. Данная задача для случая $h = 1$ рассматривалась в работе [11].

Круговым методом с использованием оценки А. Вейля для суммы Клоостермана доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, δ_F — дискриминант поля F , $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $h \ll n$ справедлива асимптотическая формула

$$I(n, h) = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} e^{-h/n} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon}),$$

$G_i(q, l, \bar{0}) = \sum_{\bar{m} \pmod{q}} \exp(2\pi i l Q_i(\bar{m})/q)$ — двойные суммы Гаусса ($i = 1, 2$). Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.

2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. (Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда). Пусть $\text{Im} \tau > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $\theta(\tau, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i \tau Q(\bar{n} + \bar{x}))$. Тогда

$$\theta(\tau, \bar{x}) = \frac{i}{\tau \sqrt{|\delta_F|}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left(-\frac{\pi i}{\tau} \bar{n}^t A^{-1} \bar{n} + 2\pi i \bar{n}^t \bar{x} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [12, глава VI]. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $q, q', q'' \leq N$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')^{-1}]} \frac{e^{-2\pi i h x}}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} dx = \frac{n}{2} e^{-h/n} + O(qN).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

(см. в [13, глава V]) и оценки

$$\int_{[q(q+q')^{-1}]^{-1}}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i h x}}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} dx \ll \int_{[qN]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int_{[qN]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qN$$

следует требуемое равенство. $\square$

ЛЕММА 3. (Равенства для произведений сумм Гаусса). Пусть d — отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ — мнимое квадратичное поле, δ_F — дискриминант поля F , $D = -\delta_F$. Пусть $Q_1(\bar{m})$, $Q_2(\bar{k})$ — бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с первыми коэффициентами a_1 и a_2 соответственно; $(l, q) = 1$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $(q, D) = 1$, $l^* \equiv 1 \pmod{q}$, $DD^* \equiv 1 \pmod{q}$. Тогда

$$G_1(q, l, \bar{m}) G_2(q, -l, \bar{k}) = q^2 \exp \left(-2\pi i \frac{l^*}{q} D^* (Q'_1(\bar{m}) - Q'_2(\bar{k})) \right).$$

2. При любых q и D справедливо неравенство:

$$|G_1(q, l, \bar{m}) G_2(q, -l, \bar{k})| \leq c D q^2,$$

где c — постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $(q, D) = 1$. Введем обозначения: $q = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $r_j = q/p_j^{\alpha_j}$, $l^* \equiv 1 \pmod{q}$, $r_j r_j^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, $DD_j^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ ($j = 1 \dots s$), $DD^* \equiv 1 \pmod{q}$.

Если $2 \mid q$, то полагаем $p_1 = 2$. Заметим, что в этом случае $2 \nmid D$, следовательно, $\delta_F \equiv 1 \pmod{4}$. Если $2 \mid D$, то $\alpha_1 = 0$. Тогда

$$G_1(q, l, \overline{m}) = \prod_{j=1}^s G_1(p_j^{\alpha_j}, l r_j, \overline{m}).$$

Для $G_1(p_j^{\alpha_j}, l r_j, \overline{m})$ известны точные формулы (см., например, [14, лемма 1]). Можем утверждать, что

$$\begin{aligned} G_1(q, l, \overline{m}) &= \\ &= q \exp \left(-2\pi i \frac{l^*}{q} Q'_1(\overline{m}) (r_1 r_1^* D_1^* + \dots + r_s r_s^* D_s^*) \right) (-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/4} \left(\frac{\delta_F}{p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}} \right). \end{aligned}$$

Докажем сравнение

$$r_1 r_1^* D_1^* + \dots + r_s r_s^* D_s^* \equiv D^* \pmod{q}.$$

Так как $(q, D) = 1$ и $DD_j^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ ($j = 1 \dots s$), $DD^* \equiv 1 \pmod{q}$, то

$$D(r_1 r_1^* D_1^* + \dots + r_s r_s^* D_s^*) \equiv DD^* \equiv 1 \pmod{q},$$

и достаточно доказать сравнение $r_1 r_1^* + \dots + r_s r_s^* \equiv 1 \pmod{q}$, которое эквивалентно системе сравнений

$$\begin{cases} r_1 r_1^* + \dots + r_s r_s^* \equiv r_1 r_1^* \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \\ \dots \\ r_1 r_1^* + \dots + r_s r_s^* \equiv r_s r_s^* \equiv 1 \pmod{p_s^{\alpha_s}}. \end{cases}$$

Тогда $G_1(q, l, \overline{m}) = q \exp \left(-2\pi i \frac{l^*}{q} D^* Q'_1(\overline{m}) \right) (-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/4} \left(\frac{\delta_F}{p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}} \right)$.

Аналогичное равенство справедливо и для $G_2(q, -l, \overline{k})$. Запишем произведение сумм Гаусса:

$$G_1(q, l, \overline{m}) G_2(q, -l, \overline{k}) = \exp \left(-2\pi i D^* (l^* Q'_1(\overline{m}) + (-l)^* Q'_2(\overline{k})) / q \right) (-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/2} q^2.$$

Так как или $\delta_F \equiv 1 \pmod{4}$, или $\alpha_1 = 0$, то $(-1)^{(1-\delta_F)\alpha_1/2} = 1$. Кроме того, справедливо сравнение $(-l)^* \equiv -l^* \pmod{q}$. Следовательно,

$$G_1(q, l, \overline{m}) G_2(q, -l, \overline{k}) = q^2 \exp \left(-2\pi i \frac{l^*}{q} D^* (Q'_1(\overline{m}) - Q'_2(\overline{k})) \right).$$

2. В случае, когда $(q, D) = 1$ неравенство следует из полученной выше формулы для произведений сумм Гаусса. В остальных случаях, требуемая оценка следует из точных формул для сумм Гаусса от степени простого числа, полученных С. А. Гриценко в работе [14]. $\square$

ЛЕММА 4. (Оценка суммы Kloostermana). Пусть $K(q, u, v)$ — сумма Kloostermana. Справедлива оценка

$$K(q, u, v) \ll \tau(q)q^{1/2}(u, v, q)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, в [5]. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть $q = q_1q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $(q_1, D) = 1$; q_2 — либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят D . Пусть

$$V(q, h, \overline{m}, \overline{k}) = \sum_{\substack{l=1, \\ (l, q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \overline{m}) G_2(q, -l, \overline{k}).$$

Справедливы следующие оценки:

$$V(q_1q_2, h, \overline{0}, \overline{0}) \ll Dq_1^2 \sum_{s|(q_1, h)} s\mu\left(\frac{q_1}{s}\right) q_2^3,$$

$$V(q_1q_2, h, \overline{m}, \overline{k}) \ll Dq_1^{5/2+\varepsilon}(h, q_1)^{1/2} q_2^3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как сумма Гаусса являются вполне мультипликативной функцией, т.е.

$$G(q_1q_2, l, \overline{m}) = G(q_1, l_1q_2^2, \overline{m})G(q_2, l_2q_1^2, \overline{m}),$$

то и функция $V(q, h, \overline{m}, \overline{k})$ мультипликативна. Тогда

$$V(q_1q_2, h, \overline{m}, \overline{k}) = V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k})V_2(q_2, h, q_1, \overline{m}, \overline{k}).$$

Оценим каждую из функций $V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k})$ и $V_2(q_2, h, q_1, \overline{m}, \overline{k})$. Воспользуемся леммой 3.

Так как $(q_1, D) = 1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем:

$$V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k}) \ll q_1^2 \sum_{\substack{l_1=1, \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} \exp\left(-2\pi i h \frac{l_1}{q_1} - 2\pi i \frac{l_1^*}{q_1} D^*(q_2^2)^*(Q'_1(\overline{m}) + Q'_2(\overline{k}))\right).$$

К сумме Kloostermana применим оценку А. Вейля из леммы 4; при любом q_1 получим:

$$V_1(q_1, h, q_2, \overline{m}, \overline{k}) \ll q_1^{2+1/2+\varepsilon}(h, q_1)^{1/2}.$$

В случае, когда $\overline{m} = \overline{0}$, $\overline{k} = \overline{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1, h, q_2, \overline{0}, \overline{0}) \ll q_1^2 \left| \sum_{\substack{l_1=1, \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i h l_1 / q_1} \right| \ll q_1^2 \sum_{s|(q_1, h)} s\mu\left(\frac{q_1}{s}\right).$$

Оценим тривиально $V_2(q_2, h, q_1, \bar{m}, \bar{k})$. Используем неравенство из леммы 3. Тогда

$$V_2(q_2, h, q_1, \bar{m}, \bar{k}) \ll Dq_2^2 \left| \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i h l_2 / q_2} \right| \ll Dq_2^3,$$

и доказательство леммы завершено. $\square$

3. Доказательство теоремы

1. Запишем $I(n, h)$ в виде интеграла

$$I(n, h) = \int_0^1 S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha h} d\alpha,$$

где

$$S_1(\alpha) = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n + 2\pi i \alpha) Q_1(\bar{m})}, \quad S_2(\alpha) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n - 2\pi i \alpha) Q_2(\bar{k})}.$$

Пусть $N = [\sqrt{n}]$, $\xi_{0,1} = [-\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$. Разобьем промежутки $[\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N})$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N (см. [15]). Пусть $\frac{l''}{q''} < \frac{l}{q} < \frac{l'}{q'}$ — соседние дроби Фарея, $1 \leq l, q \leq N$, $q' \leq N$, $q'' \leq N$.

Определим промежутки

$$\xi_{l,q} = \left[\frac{l}{q} - \frac{1}{q(q+q'')}, \frac{l}{q} + \frac{1}{q(q+q')} \right).$$

По построению имеем:

$$\left[-\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N} \right) = \bigcup_{q=1}^N \bigcup_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} \xi_{l,q},$$

причем $\xi_{l,q} \cap \xi_{l',q'} = \emptyset$ при $(l, q) \neq (l', q')$.

Тогда

$$\begin{aligned} I(n, h) &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} \int_{\xi_{l,q}} S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i h \alpha} d\alpha = \\ &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} \int_{- [q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} S_1(l/q + x) S_2(l/q + x) e^{-2\pi i h x} dx. \end{aligned}$$

2. Преобразуем суммы $S_1(l/q + x)$ и $S_2(l/q + x)$.

$$S_1(l/q + x) = \sum_{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left((-n^{-1} + 2\pi i l/q + 2\pi i x) Q_1(\overline{m}) \right).$$

Разобьем сумму по $\overline{m}$ по арифметическим прогрессиям с разностью q :

$$\begin{aligned} S_1(l/q + x) &= \sum_{\substack{\overline{s} \\ (\bmod q)}} e^{2\pi i l/q Q_1(\overline{s})} \sum_{\substack{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \overline{m} \equiv \overline{s} \pmod{q}}} e^{(-n^{-1} + 2\pi i x) Q_1(\overline{m})} = \\ &= \sum_{\substack{\overline{s} \\ (\bmod q)}} e^{2\pi i l/q Q_1(\overline{s})} \sum_{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-n^{-1} + 2\pi i x) q^2 Q_1(\overline{m} + \overline{s}/q)} = \\ &= \sum_{\substack{\overline{s} \\ (\bmod q)}} e^{2\pi i l/q Q_1(\overline{s})} \theta \left(\left(x + \frac{i}{2\pi n} \right) q^2, \overline{s}/q \right), \end{aligned}$$

где $\theta \left(\left(x + \frac{i}{2\pi n} \right) q^2, \overline{s}/q \right)$ — двумерный тета-ряд.

Используем функциональное уравнение для тета-ряда из леммы 1. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \theta \left(\left(x + \frac{i}{2\pi n} \right) q^2, \overline{s}/q \right) &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} - 2\pi i x)} \times \\ &\times \sum_{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1} - 2\pi i x)} + 2\pi i \overline{m}^t \overline{s}/q \right), \end{aligned}$$

где $Q'_1(\overline{m}) = \frac{1}{2} \overline{m}^t D A_1^{-1} \overline{m}$ — квадратичная форма с матрицей $D A_1^{-1}$.

Тогда для $S_1(l/q + x)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} S_1\left(\frac{l}{q} + x\right) &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} - 2\pi i x)} \sum_{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1} - 2\pi i x)} \right) \times \\ &\times \sum_{\substack{\overline{s} \\ (\bmod q)}} \exp \left(2\pi i (l Q_1(\overline{s}) + \overline{m}^t \overline{s})/q \right). \end{aligned}$$

Сумма по $\overline{s}$ представляет собой сумму Гаусса $G_1(q, l, \overline{m})$, соответствующую квадратичной форме $Q_1(\overline{s})$.

Выделим слагаемое, которое отвечает вектору $\overline{m} = \overline{0}$. Тогда

$$S_1(l/q + x) = \varphi_1 + \Phi_1,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} - 2\pi i x)} G_1(q, l, \overline{0}), \\ \Phi_1 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} - 2\pi i x)} \sum_{\substack{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \overline{m} \neq \overline{0}}} \exp \left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\overline{m})}{Dq^2(n^{-1} - 2\pi i x)} \right) G_1(q, l, \overline{m}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем равенство для $S_2(l/q + x)$:

$$S_2(l/q + x) = \varphi_2 + \Phi_2,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} + 2\pi i x)} G_2(q, -l, \bar{0}), \\ \Phi_2 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} + 2\pi i x)} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{Dq^2(n^{-1} + 2\pi i x)}\right) G_2(q, -l, \bar{k}). \end{aligned}$$

3. Подставляем полученные для функций $S_1(l/q + x)$ и $S_2(l/q + x)$ представления в равенство для $I(n, h)$ из пункта 1. Имеем

$$I(n, h) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4\pi^2}{D} \sum_{q \leq N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2}, \\ I_2 &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx, \\ I_3 &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2 \Phi_1 e^{-2\pi i h x} dx, \\ I_4 &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx. \end{aligned}$$

Интеграл I_1 вычислим асимптотически, а интегралы I_2, I_3, I_4 оценим сверху.

4. Начнем с I_1 . Согласно равенству из леммы 2, получаем:

$$I_1 = \frac{2\pi^2 n}{D} e^{-h/n} \sum_{q \leq N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(I_{1,1}),$$

где

$$I_{1,1} = \frac{N}{D} \sum_{q \leq N} q^{-3} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) = \frac{N}{D} \sum_{q \leq N} q^{-3} V(q, h, \bar{0}, \bar{0}).$$

Используя оценку для функции $V(q, h, \bar{0}, \bar{0})$ из леммы 5, будем иметь

$$\begin{aligned} I_{1,1} &\ll \frac{N}{D} \sum_{q_1 q_2 \leq N} q_1^{-3} q_2^{-3} |V(q_1 q_2, h, \bar{0}, \bar{0})| \ll \\ &\ll N \sum'_{q_2 \leq N} \sum_{q_1 \leq N/q_2} q_1^{-1} \sum_{s|(q_1, h)} s \mu\left(\frac{q_1}{s}\right) \ll \\ &\ll N \sum'_{q_2 \leq N} \sum_{s|h} \sum_{q \leq \frac{N}{q_2 s}} \mu(q) q^{-1} \ll n^{1/2+\varepsilon} \tau(h) \ll h^\varepsilon n^{1/2+\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $'$ в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D числам. Так как D — фиксированное число, то можно показать, что количество таких чисел q_2 не больше чем n^ε .

Оценим сумму

$$\begin{aligned} R &= \frac{n}{D} e^{-h/n} \sum_{q > N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) = \\ &= \frac{n}{D} e^{-h/n} \sum_{q > N} q^{-4} V(q, h, \bar{0}, \bar{0}). \end{aligned}$$

Снова используем лемму 5. Получаем, что

$$\begin{aligned} R &\ll \frac{n}{D} e^{-h/n} \sum_{q_1 q_2 > N} q_1^{-4} q_2^{-4} |V(q_1 q_2, h, \bar{0}, \bar{0})| \ll \\ &\ll n \sum'_{q_2 \leq N} q_2^{-1} \sum_{q_1 > N/q_2} q_1^{-2} \sum_{s|(q_1, h)} s \mu\left(\frac{q_1}{s}\right) \ll \\ &\ll n \sum'_{q_2 \leq N} q_2^{-1} \sum_{s|h} s^{-1} \sum_{q > \frac{N}{q_2 s}} \mu(q) q^{-2} \ll n^{1/2+\varepsilon} \tau(h) \ll h^\varepsilon n^{1/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{2\pi^2 n}{D} e^{-h/n} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(h^\varepsilon n^{1/2+\varepsilon}).$$

5. Рассуждения об оценивании I_2, I_3, I_4 не сильно отличаются друг от друга. Приведем полное доказательство для интеграла I_4 :

$$I_4 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx.$$

Вместо Φ_1, Φ_2 подставим их значения, полученные в пункте 2. Имеем

$$I_4 = \frac{4\pi^2}{D} \sum_{q \leq N} q^{-4} \int_{-[q(q+q'')^{-1}]^{-1}}^{[q(q+q')^{-1}]^{-1}} \frac{e^{2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \times$$

$$\times \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D(n^{-1} - 2\pi i x)}\right) \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D(n^{-1} + 2\pi i x)}\right) \times$$

$$\times V(q, h, \bar{m}, \bar{k}).$$

Пусть θ – сколь угодно малое положительное число. Разобьем интеграл $\int_{-[q(q+q'')^{-1}]^{-1}}^{[q(q+q')^{-1}]^{-1}}$ на сумму интегралов.

$$\int_{-[q(q+q'')^{-1}]^{-1}}^{[q(q+q')^{-1}]^{-1}} = \int_{-[q(q+q'')^{-1}]^{-1}}^{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')^{-1}]^{-1}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_4 = I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}.$$

6. Оценим $I_{4,2}$. Используя оценку

$$V(q_1 q_2, h, \bar{m}, \bar{k}) \ll D q_1^{5/2+\varepsilon} q_2^3 (h, q_1)^{1/2}$$

из леммы 5, будем иметь:

$$I_{4,2} \ll \sum_{\substack{q \leq N \\ q=q_1 q_2}} q_1^{-3/2+\varepsilon} (h, q_1)^{1/2} q_2^{-1} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^2 \sum_{\substack{\bar{m}_j \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{m}_j \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_j(\bar{m}_j)}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right).$$

Проведем разбиение суммы по q :

$$I_{4,2} \ll \sum_{q \leq n^{1/2-\theta}} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta} < q \leq N} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} = \sum_{41} + \sum_{42}.$$

Рассмотрим сумму $\sum_{41}$. Так как $q \leq n^{1/2-\theta}$ и $0 \leq x \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_j(\overline{m}_j)}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp(-cn^{2\theta}),$$

где c – постоянная, $j = 1, 2$. Тогда

$$\prod_{j=1}^2 \sum_{\substack{\overline{m}_j \in \mathbb{Z}^2 \\ \overline{m}_j \neq \overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_j(\overline{m}_j)}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O(\exp(-cn^{2\theta})).$$

Учтем также, что при тех же ограничениях на q :

$$\int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2} + t^2} \ll n^{3/2-\theta} q^{-1}.$$

После проведенных рассуждений получаем оценку:

$$\sum_{41} \ll n^{3/2-\theta+\varepsilon} \exp(-cn^{2\theta}) \sum_{q_1 q_2 \leq n^{1/2-\theta}} q_1^{-5/2} (h, q_1)^{1/2} q_2^{-2} \ll \tau(h) n^{3/4+\varepsilon} \ll h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon}.$$

Перейдем к оценке $\sum_{42}$. Так как $q \leq N$ и $0 \leq x \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_j(\overline{m}_j)}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp(-cQ'_j(\overline{m}_j)),$$

где c – постоянная, $j = 1, 2$. Тогда

$$\prod_{j=1}^2 \sum_{\substack{\overline{m}_j \in \mathbb{Z}^2 \\ \overline{m}_j \neq \overline{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_j(\overline{m}_j)}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O(1).$$

Интеграл оценим тривиально:

$$\int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \ll n.$$

В итоге получаем следующую оценку для суммы $\sum_{42}$:

$$\begin{aligned} \sum_{42} &\ll n^{1+\varepsilon} \sum_{n^{1/2-\theta} < q_1 q_2 \leq N} q_1^{-3/2} (h, q_1)^{1/2} q_2^{-1} \ll \\ &\ll n^{1+\varepsilon} \sum'_{q_2 \leq N} q_2^{-1} \sum_{q_1 > n^{1/2-\theta}/q_2} q_1^{-3/2} (h, q_1) \ll \tau(h) n^{3/4+\varepsilon} \ll h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon}, \end{aligned}$$

где ' в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D числам.

Таким образом, было показано, что

$$I_{4,2} = O(h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon}).$$

7. Интегралы $I_{4,1}$ и $I_{4,3}$ оцениваются одинаково. Все рассуждения проведем для $I_{4,3}$. Будем использовать оценку

$$V(q_1 q_2, h, \overline{m}, \overline{k}) \ll D q_1^{5/2+\varepsilon} q_2^3(h, q_1)^{1/2}$$

из леммы 5.

Так как $q \leq N$ и $[qn^{1/2+\theta}]^{-1} \leq x \leq [q(q+q')]^{-1}$, то

$$\left| \sum_{\substack{\overline{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \overline{m} \neq \overline{0}}} \exp \left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\overline{m})}{q^2 D(n^{-1} - 2\pi i x)} \right) \right| = O(1),$$

$$\left| \sum_{\substack{\overline{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \overline{k} \neq \overline{0}}} \exp \left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\overline{k})}{q^2 D(n^{-1} + 2\pi i x)} \right) \right| = O(1).$$

Кроме того, при тех же ограничениях на q можем утверждать, что

$$\int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qn^{1/2+\theta}.$$

Получена следующая оценка для интеграла $I_{4,3}$:

$$I_{4,3} \ll n^{1/2+\theta+\varepsilon} \sum_{q_1 q_2 \leq N} q_1^{-1/2}(h, q_1)^{1/2} \ll$$

$$\ll n^{1/2+\theta+\varepsilon} \sum_{q_2 \leq N} ' \sum_{q_1 \leq N/q_2} q_1^{-1/2}(h, q_1) \ll h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon}.$$

Объединяем полученные для I_4 оценки. В итоге имеем:

$$I_4 = O(h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon}).$$

8. Пусть

$$\Phi(q) = q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} G_1(q, l, \overline{0}) G_2(q, -l, \overline{0}).$$

В лемме 5 было показано, что функции $\Phi(q)$ мультипликативна. Следовательно, сумму особого ряда можно представить в виде произведения

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Phi(q) = \prod_{p \nmid q} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \dots).$$

В зависимости от того, делится ли δ_F и h на p , следует выделить четыре случая. Для каждого из них требуется вычислить произведение сумм Гаусса $G_1(p^\alpha, l, \bar{0})G_2(p^\alpha, -l, \bar{0})$, $a \geq 1$ (точные формулы см. в [14]) и сумму Клоостермана $K(p^\alpha, h, 0)$ (см. [16, с. 38–43]). После проведенных рассуждений получим следующее представление:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{+\infty} \Phi(q) &= \prod_{\substack{p \nmid \delta_F \\ p \nmid h}} (1 - 1/p^2) \prod_{\substack{p \nmid \delta_F \\ p \nmid h}} (1 + 1/p - 1/p^{\alpha+1} - 1/p^{\alpha+2}) \times \\ &\times \prod_{\substack{p \mid \delta_F \\ p \nmid h}} \left(1 - \left(\frac{a_1 a_2}{p}\right) / p\right) \prod_{\substack{p \mid \delta_F \\ p \mid h}} \left(1 + \left(\frac{a_1 a_2}{p}\right) (1 - 1/p^\alpha - 1/p^{\alpha+1})\right), \end{aligned}$$

где $h = p^\alpha h_1$, $(h_1, p) = 1$; a_1, a_2 — первые коэффициенты квадратичных форм $Q_1(\bar{m}), Q_2(\bar{k})$.

Каждый из множителей, записанных выше, больше $1/2$, и положительность суммы особого ряда асимптотической формулы доказана.

4. Заключение

Круговым методом с использованием оценки А. Вейля для суммы Клоостермана получена асимптотическая формула с остаточным членом порядка $h^\varepsilon n^{3/4+\varepsilon}$ для суммы

$$\sum_{Q_1(\bar{m})-Q_2(\bar{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\bar{m})+Q_2(\bar{k})}{n}},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$.

Она верна, если с ростом основного параметра n параметр h удовлетворяет неравенству $h \ll n$.

В полученной асимптотической формуле дискриминант поля δ_F — фиксированное число, а остаточный член не зависит от δ_F .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ingham, A.E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers / A. Ingham // J. London Math. Soc. — 1927. — Vol. 2(7). — P. 202–208.

2. Estermann, T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten / T. Estermann // J. Reine Angew. Math. — 1931. — Vol. 164. — P. 173–182.
3. Исмоилов, Д.И. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН Тадж. ССР. 1979. Т. 22, №2. С. 75–79.
4. Weil, A. On some exponential sums / A. Weil // Proc. Nat. Acad. of Sci. — 1948. — 34. — P. 204–207.
5. Estermann, T. On Kloostermann's sum / T. Estermann // Mathematika. — 1961. — 8. — P. 83–86.
6. Heath-Brown, D.R. The fourths power moment of the Riemann zeta-function / D.R. Heath-Brown // Proc. London Math. Soc. — 1979. — Vol. 38. — №3. — P. 385–422.
7. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме делителей Ингама // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2006. №5. С. 32–35.
8. Кузнецов Н. В. Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана // Мат. сборник. 1980. Т. 111(153), №3. С. 334–383.
9. Deshouillers, J.-M. An additive divisor problem / J.-M. Deshouillers, H. Iwaniec // J. London Math. Soc. — 1982. — Vol. 26(2). — P. 1–14.
10. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. 208 с.
11. Куртова, Л.Н. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика. 2007. №7 (57). С. 107–121.
12. Ogg, A.P. Modular Forms and Dirichlet Series. / A.P. Ogg. — N.-Y.: W.A. Benjamin Inc., 1969. — 211 p.
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для студентов механических специальностей механико-математических факультетов государственных университетов. М.: Физматлит, 1958. 678 с.
14. Гриценко С. А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, вып. 2. С. 53–67.
15. Виноградов И. М. Основы теории чисел. СПб-М: Лань, 2004. 167 с.

16. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 65. С. 3–212.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Получено 15.05.2014