ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 5.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-87-100

О совместных приближениях логарифмов простых чисел[1]

М. А. Королёв, И. С. Резвякова

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru
Резвякова Ирина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: rezvyakova@mi-ras.ru

Аннотация

В первой части статьи модификация элементарного метода Э. Ч. Титчмарша применяется к доказательству локальной теоремы Кронекера. Для произвольной конечной последовательности $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ вещественных чисел, линейно независимых над полем $\mathbb{Q}$, и для любого $\varepsilon > 0$ этот метод даёт явную верхнюю оценку величины $h = h(\varepsilon, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ такой, что для всякой последовательности $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ любой интервал длины h содержит точку t такую, что $\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant s \leqslant r$. Эта оценка уступает по точности наилучшей известной на сегодняшний день, однако проста в выводе и в приложениях приводит, по сути, к результатам той же точности, что и наилучшая.

Во второй части помещены воспоминания авторов об академике Алексее Николаевиче Паршине.

Ключевые слова: локальная теорема Кронекера, совместные приближения, логарифмы простых чисел, бесквадратные числа.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
М. А. Королёв, И. С. Резвякова. О линейных комбинациях логарифмов простых чисел // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 87–100.

[1]Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00001) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 5.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-87-100

On simultaneous approximations to the logarithms of primes

M. A. Korolev, I. S. Rezvyakova

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru
Rezvyakova Irina Sergeevna — candidate of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: rezvyakova@mi-ras.ru

Abstract

In the first part of the paper, a modification of elementary Titchmarsh's method is applied to the proof of the local Kronecker's theorem. For any finite real sequence $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ of linearly independent (over $\mathbb{Q}$) numbers and for any $\varepsilon > 0$, this method leads to the explicit upper bound of the value $h = h(\varepsilon, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ with the following property: for any real sequence $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, any interval of the length h contains a point t such that $\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant s \leqslant r$. Such estimate is weaker than the best known, but it's proof is quite simple and leads to the same (in essence) results in the applications.

The second part contains the short memoirs concerning the academician Alexey Nikolaevich Parshin who passed away on June, 18 this year.

Keywords: local Kronecker's theorem, simultaneous approximations, logarithms of primes, squarefree numbers.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
M. A. Korolev, I. S. Rezvyakova, 2022, "On simultaneous approximations to the logarithms of primes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 87–100.

Светлой памяти академика Алексея Николаевича Паршина (07.11.1942 - 18.06.2022)

1. Введение

Простейший вариант классической теоремы Л. Кронекера о приближениях (1884; см. [1], а также [2, с. 47-110], [3, Ch. XXIII]) утверждает следующее.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *- произвольные вещественные числа, линейно независимые над полем* $\mathbb{Q}$ *рациональных чисел,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *- произвольные вещественные числа. Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 0.5$, *существует* t *такое, что* $\|t\lambda_s - \alpha_s\| < \varepsilon$ *для каждого* s, $1 \leqslant s \leqslant r$ (здесь $\|x\|$, как обычно, означает расстояние от x до ближайшего целого числа).

Со временем появились доказательства этой теоремы, дающие верхнюю оценку величины h такой, что искомое значение t найдётся в интервале вида $(y, y + h)$, где y - произвольное вещественное число. Всякое утверждение такого рода называется локальной теоремой Кронекера. Локальные теоремы Кронекера используют информацию о распределении значений линейной формы $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r$ для случая, когда переменные x_s принимают целочисленные значения с условиями $|x_s| \leqslant X_s$ $(s = 1, \ldots, r)$, не все одновременно равные нулю. В частности, для доказательства локальных теорем важно знать, насколько близки к нулю могут быть значения такой линейной формы с указанными ограничениями на переменные.

Один из наиболее точных вариантов локальной теоремы Кронекера, принадлежащий С.М. Гонеку и Х.Л. Монтгомери, формулируется следующим образом.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *и* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ *- наборы вещественных чисел, причём* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *линейно независимы над полем рациональных чисел и* $0 < \varepsilon_s < 0.5$ *для* $s = 1, \ldots, r$. *Пусть, далее,*

$$\delta = \min |\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r| > 0,$$

где минимум берётся по всем ненулевым целочисленным векторам $(x_1, \ldots, x_r)$ *с условиями*

$$|x_s| \leqslant X_s, \quad X_s = \left[\frac{1}{\varepsilon_s} \ln \frac{r}{\varepsilon_s} \right], \quad s = 1, \ldots, r.$$

Тогда для всякого набора вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *любой интервал вида* $(y, y+h)$, $h = 4\delta^{-1}$, *содержит число* t, *для которого* $\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leqslant \varepsilon_s$, $s = 1, \ldots, r$.

Доказательство этого утверждения методом, восходящим к П. Турану [4], а также обзор, посвящённый локальной теореме Кронекера, можно найти в работе [5].

Настоящая статья преследует, по большей части, методологическую цель: показать, что достаточно грубый и элементарный метод, применённый Э.Ч. Титчмаршем [6, гл. VIII, §8] к важному частному случаю (когда в качестве λ_s берутся логарифмы простых чисел) и восходящий к Г. Бору [7], позволяет и в общем случае получить вполне удовлетворительные оценки величины h (хотя и не столь точные, которые следуют из теоремы Гонека и Монтгомери). Имеет место

Теорема. *Пусть* $r \geqslant 2$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ *- набор вещественных чисел, линейно независимых над полем* $\mathbb{Q}$, *и пусть* $0 < \varepsilon < 0.25$. *Пусть, далее,*

$$\delta(X) = \min |(x_1 - y_1)\lambda_1 + \ldots + (x_r - y_r)\lambda_r|,$$

где минимум берётся по всем векторам $\bar{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_r)$ *и* $\bar{\boldsymbol{y}} = (y_1, \ldots, y_r)$ *с неотрицательными целочисленными компонентами, таким, что*

$$\bar{\boldsymbol{x}} \neq \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \sum_{s=1}^{r} x_s \leqslant X, \quad \sum_{s=1}^{r} y_s \leqslant X.$$

Пусть, наконец,

$$h = h(\varepsilon, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{4}{3\pi\delta(k)} \binom{k+r}{r}, \quad \text{где} \quad k = k(\varepsilon, r) = \left[3\left(\frac{r}{4\varepsilon}\right)^2 \left(\ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} + \ln\ln \frac{er}{(4\varepsilon)^2} \right) \right] + 1.$$

Тогда для всякого набора вещественных чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *любой интервал вида* $(y, y+h)$ *содержит точку* t, *для которой*

$$\|t\lambda_s - \alpha_s\| < \varepsilon, \quad s = 1, \ldots, r.$$

2. Доказательство вспомогательных утверждений и основной теоремы

При доказательстве основной теоремы будем следовать рассуждениям Титчмарша и лишь на последних шагах подберём необходимые параметры оптимально.

Лемма 1. *Пусть $r \geqslant 2$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ - произвольные вещественные числа,*

$$F = 1 + \sum_{s=1}^{r} e^{2\pi i\lambda_s},$$

и пусть $|F| \geqslant r + 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда $\|\lambda_s\| \leqslant \sqrt{\varepsilon/8}$ для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant r$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\sqrt{\varepsilon/8} < \|\lambda_r\| \leqslant 0.5. \tag{1}$$

В этом случае имеем:

$$|F| = \left|\sum_{s=1}^{r-1} e^{2\pi i\lambda_s} + 1 + e^{2\pi i\lambda_r}\right| \leqslant r - 1 + \left|1 + e^{2\pi i\lambda_r}\right| = r - 1 + 2|\cos(\pi\lambda_r)| =$$
$$= r + 1 - 4\sin^2\bigl(0.5\pi\|\lambda_r\|\bigr).$$

Поскольку $|\sin x| \geqslant 2\sqrt{2}|x|/\pi$ при $|x| \leqslant \pi/4$, то ввиду неравенства (1) получим:

$$4\sin^2\bigl(0.5\pi\|\lambda_r\|\bigr) \geqslant 4\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi\|\lambda_r\|}{2}\right)^2 = 8\|\lambda_r\|^2 > \varepsilon,$$

откуда $|F| < r + 1 - \varepsilon$. Последнее противоречит условию леммы.

Лемма 2 (полиномиальная формула). *Пусть $k, r \geqslant 2$ - целые числа. Тогда для любых чисел $x_0, x_1, \ldots, x_r$ справедливы равенства*

$$\left(\sum_{s=0}^{r} x_s\right)^k = \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}})\, x_0^{\mu_0}\, x_1^{\mu_1}\, \ldots\, x_r^{\mu_r}, \quad c(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{k!}{\mu_0!\,\mu_1!\,\ldots\,\mu_r!},$$

где суммирование ведётся по всем наборам $\overline{\boldsymbol{\mu}} = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ неотрицательных целых чисел с условием $\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_r = k$. При этом

$$\text{(a)} \quad \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}}) = (r+1)^k, \quad \text{(b)} \quad \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} c^2(\overline{\boldsymbol{\mu}}) \geqslant \frac{(r+1)^{2k}}{\dbinom{k+r}{r}}.$$

Доказательство. Равенство (a) получим, положив $x_0 = x_1 = \ldots = x_r = 1$. Число слагаемых в правой части полиномиальной формулы совпадает с числом решений уравнения $\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_r = k$ в неотрицательных целых числах и потому равно $\binom{k+r}{r}$. Поэтому, возводя обе части (a) в квадрат и применяя неравенство Коши, будем иметь:

$$(r+1)^{2k} = \left(\sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}})\right)^2 \leqslant \binom{k+r}{r} \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} c^2(\overline{\boldsymbol{\mu}}),$$

откуда и следует (b). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Положим

$$F(t) = 1 + \sum_{s=1}^{r} e^{2\pi i(t\lambda_s - \alpha_s)} = 1 + \sum_{s=1}^{r} \overline{\omega}_s e^{2\pi i t\lambda_s},$$

где $\omega_s = e^{2\pi i\alpha_s}$, и зададимся целым числом $k \geqslant 2$, которое в дальнейшем выберем оптимально. Имеем тогда:

$$F^k(t) = \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}})\,\overline{\omega}_1^{\mu_1}\ldots\overline{\omega}_r^{\mu_r} e^{2\pi it(\mu_1\lambda_1+\ldots+\mu_r\lambda_r)}, \quad |F(t)|^{2k} = \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}})c(\overline{\boldsymbol{\nu}})\omega(\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}})e^{2\pi it\Lambda},$$

где

$$\overline{\boldsymbol{\nu}} = (\nu_0,\ldots,\nu_r), \quad \overline{\boldsymbol{\mu}} = (\mu_0,\ldots,\mu_r), \quad \sum_{s=0}^{r}\mu_s = \sum_{s=0}^{r}\nu_s = k,$$

$$\omega(\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}}) = \omega_1^{\mu_1}\ldots\omega_r^{\mu_r}\,\overline{\omega}_1^{\nu_1}\ldots\overline{\omega}_r^{\nu_r}, \quad |\omega(\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}})| = 1,$$

$$\Lambda = \Lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}}) = (\mu_1-\nu_1)\lambda_1+\ldots+(\mu_r-\nu_r)\lambda_r.$$

Поскольку $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$, величины $\Lambda(\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}})$ обращаются в ноль лишь в случае $\overline{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{\nu}}$. Следовательно,

$$|F(t)|^{2k} = \sum_{\overline{\boldsymbol{\nu}}} c^2(\overline{\boldsymbol{\nu}}) + \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}\neq\overline{\boldsymbol{\nu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}})c(\overline{\boldsymbol{\nu}})\omega(\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}})e^{2\pi it\Lambda}.$$

Задавшись произвольными y и $h > 0$, получим:

$$I = \int_y^{y+h}|F(t)|^{2k}dt = h\sum_{\overline{\boldsymbol{\nu}}} c^2(\overline{\boldsymbol{\nu}}) + \sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}\neq\overline{\boldsymbol{\nu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}})c(\overline{\boldsymbol{\nu}})\omega(\overline{\boldsymbol{\mu}},\overline{\boldsymbol{\nu}})\cdot\frac{1}{2\pi i\Lambda}\left(e^{2\pi i(y+h)\Lambda} - e^{2\pi iy\Lambda}\right).$$

Поскольку

$$\sum_{s=1}^{r}\mu_s = k-\mu_0 \leqslant k, \quad \sum_{s=1}^{r}\nu_s = k-\nu_0 \leqslant k,$$

то в силу условия теоремы $|\Lambda| \geqslant \delta(k)$. Пользуясь п. (a) леммы 2, заключаем, что сумма по $\overline{\boldsymbol{\mu}} \neq \overline{\boldsymbol{\nu}}$ не превосходит по модулю величины

$$\frac{1}{\pi\delta(k)}\biggl(\sum_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} c(\overline{\boldsymbol{\mu}})\biggr)^2 = \frac{(r+1)^{2k}}{\pi\delta(k)}.$$

Так в силу п. (b) леммы 2 приходим к оценке

$$I \geqslant \frac{h(r+1)^{2k}}{\binom{k+r}{r}} - \frac{(r+1)^{2k}}{\pi\delta(k)} = \frac{h(r+1)^{2k}}{\binom{k+r}{r}}(1-\Delta),$$

где обозначено:

$$\Delta = \frac{1}{\pi h\delta(k)}\binom{k+r}{r}.$$

Если M - максимум $|F(t)|$ на промежутке $y \leqslant t \leqslant y+h$, то $I \leqslant hM^{2k}$, откуда

$$M^{2k} \geqslant \frac{I}{h} \geqslant (r+1)^{2k}\,\frac{1-\Delta}{\binom{k+r}{r}}.$$

Предположим, что $0 < \Delta < 1$. Тогда

$$M \geqslant (r+1)\left((1-\Delta)\binom{k+r}{r}^{-1}\right)^{1/(2k)}.$$

Положим теперь

$$q = \frac{er}{(4\varepsilon)^2} \quad (\text{так что } q > er \geqslant 2e), \quad k = k(\varepsilon, r) = \left[3\left(\frac{r}{4\varepsilon}\right)^2 (\ln q + \ln\ln q)\right] + 1,$$

и покажем, что выполняется неравенство

$$\left((1-\Delta)\binom{k+r}{r}^{-1}\right)^{1/(2k)} > 1 - \frac{8\varepsilon^2}{r+1}.$$

Заметим сначала, что

$$\binom{k+r}{r} = \frac{(k+1)\ldots(k+r)}{r!} < \frac{(k+r)^r}{(r/e)^r} = \left(\frac{e(k+r)}{r}\right)^r = \left(\frac{ek}{r}\right)^r \left(1 + \frac{r}{k}\right)^r,$$

откуда

$$\binom{k+r}{r}^{1/(2k)} < \left(\frac{ek}{r}\right)^{r/(2k)} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{r/(2k)} < \exp\left(\frac{r}{2k} \ln \frac{ek}{r}\right) \exp\left(\frac{r^2}{2k^2}\right).$$

Далее, несложно проверить, что

$$\frac{ek}{r} > \frac{3er}{2\varepsilon}(\ln q + \ln\ln q) = 3q(\ln q + \ln\ln q) > e.$$

Так как функция $y(x) = (\ln x)/x$ убывает при $x > e$, то

$$\frac{r}{2k} \ln \frac{ek}{r} = \frac{e}{2} \frac{\ln(ek/r)}{ek/r} \leqslant \frac{e}{2} \frac{\ln(3q(\ln q + \ln\ln q))}{3q(\ln q + \ln\ln q)} =$$
$$= \frac{8\varepsilon^2}{3r} \frac{\ln(3q(\ln q + \ln\ln q))}{\ln q + \ln\ln q} \leqslant \frac{c_1\varepsilon^2}{r}, \quad c_1 = 4.311802.$$

Аналогично,

$$\frac{r^2}{2k^2} = \frac{e^2}{2}\left(\frac{r}{ek}\right)^2 < \frac{e^2}{2} \frac{1}{(3q(\ln q + \ln\ln q))^2} =$$
$$= \frac{e^2}{18q} \frac{1}{q(\ln q + \ln\ln q)^2} = \frac{\varepsilon^2}{r} \cdot \frac{8e}{9} \frac{1}{q(\ln q + \ln\ln q)^2} \leqslant \frac{c_2\varepsilon^2}{r}, \quad c_2 = 0.090202.$$

Следовательно,

$$\binom{k+r}{r}^{1/(2k)} < e^{c_3\varepsilon^2/r}, \quad \binom{k+r}{r}^{-1/(2k)} > e^{-c_3\varepsilon^2/r} > 1 - \frac{c_3\varepsilon^2}{r}, \tag{2}$$

где $c_3 = c_1 + c_2 < 4.402004$. Положим теперь

$$h = h(\varepsilon, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{4}{3\pi\delta(k)} \binom{k+r}{r}.$$

Тогда $\Delta = 3/4$ и

$$(1-\Delta)^{1/(2k)} = 4^{-1/(2k)} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{k}\right) > 1 - \frac{\ln 2}{k} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{r} \cdot \frac{r\ln 2}{k\varepsilon^2}.$$

Заметим, что

$$k > \frac{3r^2}{16\varepsilon^2}(\ln q + \ln\ln q).$$

Принимая во внимание неравенство $q \geqslant 2e$, находим:

$$\frac{r\ln 2}{k\varepsilon^2} < \frac{16\ln 2}{3r(\ln q + \ln\ln q)} \leqslant \frac{8\ln 2}{3(\ln q + \ln\ln q)} \leqslant c_4 = 0.8327082.$$

Поэтому

$$\left((1-\Delta)\binom{k+r}{r}^{-1}\right)^{1/(2k)} > \left(1-\frac{c_3\varepsilon^2}{r}\right)\left(1-\frac{c_4\varepsilon^2}{r}\right) > 1-\frac{c_5\varepsilon^2}{r}, \quad c_5 = c_3+c_4 < 5.2348 < \frac{16}{3}.$$

Таким образом,

$$\frac{c_5\varepsilon^2}{r} = \frac{c_5\varepsilon^2}{r+1}\left(1+\frac{1}{r}\right) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{r+1}\cdot\frac{3}{2}c_5 < \frac{8\varepsilon^2}{r+1}.$$

Отсюда заключаем:

$$\left((1-\Delta)\binom{k+r}{r}^{-1}\right)^{1/(2k)} > 1-\frac{8\varepsilon^2}{r+1}, \quad M = \max_{y\leqslant t\leqslant y+h}|F(t)| > (r+1)\left(1-\frac{8\varepsilon^2}{r+1}\right) = r+1-8\varepsilon^2.$$

В силу леммы 1, для точки t, в которой достигается максимум M, при каждом s, $1 \leqslant s \leqslant r$, выполнено неравенство

$$\|t\lambda_s - \alpha_s\| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

3. Несколько частных случаев

В этом разделе мы выведем несколько следствий, важных для приложений.

Пусть $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ - последовательность логарифмов простых чисел p, $p \leqslant N$, так что $r = \pi(N)$. Тогда их линейная независимость следует из основной теоремы арифметики. Для оценки величины $\delta(X)$ рассмотрим произвольные наборы неотрицательных целых чисел $\bar{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_r)$, $\bar{\boldsymbol{y}} = (y_1, \ldots, y_r)$ с условиями

$$\bar{\boldsymbol{x}} \neq \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \sum_{s=1}^{r} x_s \leqslant X, \quad \sum_{s=1}^{r} y_s \leqslant X$$

и заметим, что

$$(x_1-y_1)\ln p_1 + \ldots + (x_r-y_r)\ln p_r = \ln\frac{A}{B}, \quad \text{где} \quad A = p_1^{x_1}\ldots p_r^{x_r} \quad B = p_1^{y_1}\ldots p_r^{y_r}.$$

Пусть $A > B$ (случай $A < B$ рассматривается аналогично). Если $B = 1$, то $A \geqslant 2$ и поэтому $\ln(A/B) = \ln A \geqslant \ln 2 = (\ln 2)/B$. Если же $B \geqslant 2$, то

$$\ln\frac{A}{B} \geqslant \ln\frac{B+1}{B} = \ln\left(1+\frac{1}{B}\right) > \frac{1}{B} - \frac{1}{2B^2} \geqslant \frac{3}{4B} > \frac{\ln 2}{B}.$$

Итак, в каждом из случаев имеем $\ln(A/B) \geqslant (\ln 2)/B$. Несложно видеть, что

$$B \leqslant N^{y_1+\ldots+y_r} \leqslant N^X.$$

Поэтому $\delta(X) \geqslant (\ln 2)N^{-X}$. Соответственно, определяя $k = k(\varepsilon, r)$ по формуле из условия теоремы и пользуясь оценкой

$$\binom{k+r}{r} < e^{2c_3k\varepsilon^2/r} < e^{(3\varepsilon)^2k/r},$$

которая следует из (2), получаем

Следствие 1. *Пусть* $N \geqslant 3$, $0 < \varepsilon < 0.25$ *- произвольные числа,* $r = \pi(N)$ *- количество простых чисел* p*, не превосходящих* N*, и пусть*

$$h(\varepsilon, N) = \exp\left\{\left(3\left(\frac{r}{4\varepsilon}\right)^2\left(\ln\frac{er}{(4\varepsilon)^2} + \ln\ln\frac{er}{(4\varepsilon)^2}\right) + 1\right)\left(\ln N + \frac{(3\varepsilon)^2}{r}\right)\right\}.$$

Тогда для любого набора из r *вещественных чисел* α_p*,* $p \leqslant N$ *на всяком промежутке* $(y, y+h)$ *найдётся точка* t*, для которой при каждом простом* p*,* $p \leqslant N$*, будет выполнено неравенство:*

$$\|t\ln p - \alpha_p\| \leqslant \varepsilon.$$

Замечание. Пользуясь тем, что $r = \pi(N) = (1 + o(1))N/\ln N$ при $N \to +\infty$, несложно проверить, что при достаточно большом N и ε с условием $1/\varepsilon \leqslant \sqrt[4]{\ln N}$ оценку величины $h(\varepsilon, N)$ после небольшого огрубления можно записать в виде

$$h(\varepsilon, N) \leqslant \exp\left\{\frac{3}{16}\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)^2\left(1 + \frac{3\ln(1/\varepsilon)}{\ln N}\right)\right\}.$$

В частности, при фиксированном ε получаем:

$$h(\varepsilon, N) \leqslant \exp\left\{\frac{3}{16}\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)^2(1 + o(1))\right\}.$$

В этой же ситуации теорема Гонека и Монтгомери приводит к оценке вида

$$h(\varepsilon, N) \leqslant \exp\left\{\frac{N}{\varepsilon}\left(\ln\frac{N}{\varepsilon}\right)(1 + o(1))\right\}.$$

Однако ввиду того, что в ряде приложений ключевую роль играет не сама величина h, а итерации её логарифма (не ниже второй), применение оценки из следствия 1 приводит к результатам, сравнимым по силе с теми, что даёт применение теоремы Гонека и Монтгомери (пример такой задачи, связанной с существованием больших по модулю значений дзета-функции Римана на критической прямой, см. в [8]).

Пусть теперь $n_1, \ldots, n_r$ - все бесквадратные числа, не превосходящие N, занумерованные по возрастанию (так что $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 5$ и т.д.), и пусть $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ - последовательность чисел вида $\lambda_s = \sqrt{n_s}$, $s = 1, \ldots, r$. Согласно теореме А.С. Безиковича [9] (также см. [10, гл. VIII, §6]), эти числа линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. Чтобы оценить $\delta(X)$ в этом случае, рассмотрим величину

$$\Lambda = m_1\sqrt{n_1} + \ldots + m_r\sqrt{n_r},$$

где m_s - целые числа с условием

$$\sum_{s=1}^{r}|m_s| \leqslant 2X,$$

не равные нулю одновременно. Будем следовать рассуждениям А. Сельберга, содержащимся в его неопубликованной рукописи [11] (также см. лемму 5 из [12]). Рассмотрим произведение

$$P = \prod_{(c_2,\ldots,c_r)}\left(m_1\sqrt{n_1} + c_2m_2\sqrt{n_2} + \ldots + c_rm_r\sqrt{n_r}\right),$$

где каждая из величин c_s независимо от других принимает значения ±1. В силу теоремы Безиковича, все сомножители этого произведения отличны от нуля. Очевидно, сомножитель, отвечающий набору $c_2 = \ldots = c_r = 1$, совпадает с Λ. Далее, произведение P не меняется от замены $\sqrt{n_s}$ на $(-\sqrt{n_s})$ для любого s. Действительно, если $s \geqslant 2$, то это очевидно, поскольку наряду с множителем, отвечающим набору $(c_2, \ldots, c_s, \ldots, c_r)$, в произведении присутствует и множитель, отвечающий набору $(c_2, \ldots, -c_s, \ldots, c_r)$. Если же $s = 1$, то произведение P', получившееся после такой замены, преобразуется к виду

$$P' = \prod_{(c_2,\ldots,c_r)} \bigl(-m_1\sqrt{n_1} + c_2 m_2\sqrt{n_2} + \ldots + c_r m_r\sqrt{n_r}\bigr) =$$
$$= (-1)^{2^{r-1}} \prod_{(c_2,\ldots,c_r)} \bigl(m_1\sqrt{n_1} - c_2 m_2\sqrt{n_2} - \ldots - c_r m_r\sqrt{n_r}\bigr).$$

Но набор $(-c_2, \ldots, -c_r)$ при изменении компонент пробегает то же множество, что и набор $(c_2, \ldots, c_r)$. Поэтому последнее произведение совпадает с P.

Следовательно, всякое слагаемое, возникающее при раскрытии скобок в P, содержит каждую из величин $\sqrt{n_s}$ в чётной степени. Значит, P - целое число. Так как $P \neq 0$, то необходимо $|P| \geqslant 1$. С другой стороны,

$$\bigl|m_1\sqrt{n_1} + c_2 m_2\sqrt{n_2} + \ldots + c_r m_r\sqrt{n_r}\bigr| \leqslant \sqrt{N}\sum_{s=1}^{r}|m_s| \leqslant 2X\sqrt{N}.$$

Таким образом, $1 \leqslant |P| \leqslant |\Lambda|(2X\sqrt{N})^{2^{r-1}-1}$, откуда $|\Lambda| \geqslant (2X\sqrt{N})^{1-2^{r-1}}$. Поэтому и

$$\delta(X) \geqslant (2X\sqrt{N})^{1-2^{r-1}}.$$

В частности, положив $X = 2k$, где $k = k(\varepsilon, r)$ определено в условии теоремы, получаем

Следствие 2. *Пусть $N \geqslant 5$, $0 < \varepsilon < 0.25$ - произвольные числа, r - количество бесквадратных чисел n, не превосходящих N, и пусть*

$$h = h(\varepsilon, N) = \frac{4}{3\pi}\,(4k\sqrt{N})^{2^{r-1}-1}e^{(3\varepsilon)^2 k/r}, \quad k = k(\varepsilon, r).$$

Тогда для произвольного набора из r вещественных чисел α_n, $n \leqslant N$, на всяком промежутке $(y, y+h)$ найдётся точка t, для которой при каждом бесквадратном n, $n \leqslant N$, будет выполнено неравенство:

$$\|t\sqrt{n} - \alpha_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Замечание. Несложно проверить, что

$$\frac{(3\varepsilon)^2 k}{r} \leqslant \frac{27r}{16}\left(\ln\frac{er}{(4\varepsilon)^2} + \ln\ln\frac{er}{(4\varepsilon)^2}\right) + \frac{(3\varepsilon)^2}{r} < \frac{27}{16}r\ln\left\{\frac{r}{\varepsilon^2}\ln\frac{r}{\varepsilon^2}\right\},$$

$$4k \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2\ln\left\{\frac{r}{\varepsilon^2}\ln\frac{r}{\varepsilon^2}\right\},$$

$$\ln(4k) \leqslant \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2 + \ln\ln\left\{\frac{r}{\varepsilon^2}\ln\frac{r}{\varepsilon^2}\right\} - \ln\frac{4}{3} \leqslant \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2\left(1 + \frac{\ln\ln\{(r/\varepsilon)^2\ln(r/\varepsilon)^2\} - \ln(4/3)}{\ln(r/\varepsilon)^2}\right) <$$
$$< 2.7\ln\frac{r}{\varepsilon},$$

$$\ln(4k\sqrt{N}) < 2.7\ln\frac{r}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln N < 2.7\ln\frac{N}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln N < 3.2\ln\frac{N}{\varepsilon}.$$

Так для величины $h(\varepsilon, N)$ получаем менее точную, но более удобную для приложений оценку

$$h(\varepsilon, N) < \exp\left(3.2\cdot 2^{r-1}\ln\frac{N}{\varepsilon} + \frac{27r}{16}\ln\left\{\frac{r}{\varepsilon^2}\ln\frac{r}{\varepsilon^2}\right\}\right) < \exp\left(\frac{16}{5}\cdot 2^{r}\ln\frac{N}{\varepsilon} + \frac{27r}{16}\ln\left\{\frac{r}{\varepsilon^2}\ln\frac{r}{\varepsilon^2}\right\}\right)$$

(по поводу приложений следствия 2 см., например, [13]). Последнюю оценку также можно упростить, заменив в ней r на N (отметим, что $r = r(N) = (6/\pi^2)N + O(\sqrt{N})$ при неограниченном возрастании N; см., например, [14, гл. 34, §3]).

Пусть, наконец, $\ell \geqslant 3$ - фиксированное целое число, и пусть $n_1, \ldots, n_r$ - все числа, свободные от ℓ-х степеней и не превосходящие N, занумерованные по возрастанию. Возьмём в качестве $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ последовательность чисел вида $\lambda_s = \sqrt[\ell]{n_s}$, $s = 1, \ldots, r$. Как и в предыдущем примере, линейная независимость этих чисел над полем $\mathbb{Q}$ следует из теоремы Безиковича. Чтобы оценить $\delta(X)$ снизу, рассмотрим величину

$$\Lambda = m_1 \sqrt[\ell]{n_1} + \ldots + m_r \sqrt[\ell]{n_r},$$

где m_s - целые числа с условием

$$\sum_{s=1}^{r} |m_s| \leqslant 2X,$$

не равные нулю одновременно. Далее, положим

$$P = \prod_{(c_2,\ldots,c_r)} \bigl(m_1 \sqrt[\ell]{n_1} + c_2 m_2 \sqrt[\ell]{n_2} + \ldots + c_r m_r \sqrt[\ell]{n_r}\bigr),$$

где каждая из величин c_s независимо от других принимает значения $e^{2\pi i j/\ell}$, $j = 1, \ldots, \ell$. Теперь необращение в нуль каждого из сомножителей следует из теоремы Л.Дж. Морделла [15]. Подобно тому, как это делалось выше, доказывается, что значение произведения не меняется при замене $\sqrt[\ell]{n_s}$ на $e_s \sqrt[\ell]{n_s}$, где e_s - произвольный корень ℓ-й степени из единицы, и что P - целое число. Замечая, что

$$\bigl|m_1 \sqrt[\ell]{n_1} + c_2 m_2 \sqrt[\ell]{n_2} + \ldots + c_r m_r \sqrt[\ell]{n_r}\bigr| \leqslant 2XN^{1/\ell},$$

будем иметь:

$$1 \leqslant |P| \leqslant |\Lambda| \bigl(2XN^{1/\ell}\bigr)^{\ell^{r-1}-1}, \quad |\Lambda| \geqslant \bigl(2XN^{1/\ell}\bigr)^{1-\ell^{r-1}}, \quad \delta(X) \geqslant \bigl(2XN^{1/\ell}\bigr)^{1-\ell^{r-1}}.$$

Положив $X = 2k$, где $k = k(\varepsilon, r)$ определено в условии теоремы, получаем

Следствие 3. *Пусть $\ell \geqslant 3$ - фиксированное целое число, $N \geqslant 5$, $0 < \varepsilon < 0.25$ - произвольные числа, r - количество чисел n, свободных от ℓ-х степеней и не превосходящих N, и пусть*

$$h = h(\varepsilon, N) = \frac{4}{3\pi} \bigl(4kN^{1/\ell}\bigr)^{\ell^{r-1}-1} e^{(3\varepsilon)^2 k/r}.$$

Тогда для произвольного набора из r вещественных чисел α_n, $n \leqslant N$, на всяком промежутке $(y, y+h)$ найдётся точка t, для которой при каждом целом n, $1 \leqslant n \leqslant N$, свободном от ℓ-х степеней, будет выполнено неравенство:

$$\|t \sqrt[\ell]{n} - \alpha_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Оценку следствия 3 можно упростить за счёт некоторого огрубления. Пользуясь установленными выше неравенствами, несложно заключить, что

$$h(\varepsilon, N) < \exp\left(\ell^{r-1}(2.7 + 1/\ell) \ln \frac{N}{\varepsilon} + \frac{27r}{16} \ln\left\{\frac{r}{\varepsilon^2} \ln \frac{r}{\varepsilon^2}\right\}\right)$$

(следует заметить, что $r = r(N) = N/\zeta(\ell) + O(N^{1/\ell})$ при $N \to +\infty$, где $\zeta(w)$ - дзета-функция Римана; см., например: [16, гл. 7, §48]).

4. Краткое слово об Алексее Николаевиче Паршине

(М.А.Королёв)

18 июня 2022 года отошёл в путь всея земли великий учёный, мудрый наставник и замечательный человек. Дело будущего — всесторонне, вдумчиво, неторопливо изучить то наследие, которое оставил по себе Алексей Николаевич. Но сейчас вспоминается иное — его забота и любовь, которые он являл своим родным, ученикам, коллегам, в числе которых посчастливилось оказаться и мне. Алексей Николаевич взял под своё крыло отдел теории чисел Математического института, оказавшийся в нелёгкой ситуации после безвременной кончины Анатолия Алексеевича Карацубы и Василия Алексеевича Исковских. Остановив тогда в коридоре нас с Ирой Резвяковой, он, помнится, огорошил известием, что «теперь у нас в отделе будет всё строго», но тут же, улыбнувшись, добавил: «Но это только на бумаге!»

Его заботу мы ощущали на себе: помогая словом и делом, где-то покрывая наши недостатки своим тактом и любовью, он бережно сохранил наш отдел до лучших времён. Не раз и не два приходилось обращаться к Алексею Николаевичу за советом, особенно когда дело касалось сложных, трудноразрешимых ситуаций. Готовность помочь, принять участие, войти в суть твоих трудностей, отложив свои дела — всё это было присуще Алексею Николаевичу.

Много значила для нас и его общественная позиция — особенно в тот памятный год, когда проводилась реформа РАН (2013). Опыт, трезвомыслие, рассудительность и одновременно смелость, решительность остаются для меня непревзойдённым образцом.

Осталась далеко позади работа под началом Алексея Николаевича в диссертационном совете МИАН, выступления на отдельском семинаре и многое другое из того, что принято называть «официальным общением»... Но я чётко помню тот момент, когда это общение перестало быть лишь формальным. В январе 2015 года нам с супругой Мариной довелось оказаться на конференции «Православие, наука и современность», проводимой ежегодно в рамках «Рождественских чтений» в Институте физики Земли на Большой Грузинской улице. Для нас обоих это был, пожалуй, первый опыт такого рода. С тем большим удивлением обнаружили мы в числе докладчиков профессора Юрия Валентиновича Нестеренко, который предложил тогда — ни много ни мало — проект новоюлианской пасхалии. Буквально через несколько дней Алексей Николаевич при встрече в МИАН поинтересовался впечатлением, которое произвела эта конференция, и предложил — если будет желание — обращаться к нему для обсуждения вопросов такого рода. Вскоре (к моей огромной радости!) была презентована и ставшая ныне библиографической редкостью книга Алексея Николаевича «Путь. Математика и иные миры».

Увы... предложенной возможностью я так и не воспользовался. Видимо, чувствовал, что моего кругозора, мягко говоря, недостаточно для подобных дискуссий. Но с тех пор как-то сама собой появилась возможность звонить Алексею Николаевичу «не по работе»: поздравить с днём рождения, с очередным праздником, да и просто узнать, как дела, как здоровье. Вроде бы мелочь, но я очень дорожил этой возможностью.

Вспоминается весна первого «пандемийного года» (2020). Часть Великого Поста и Светлое Христово воскресение случились в ту весну в дни всеобщего карантина, когда полстраны сидело взаперти. Так случилось, что мне довелось быть тогда — невиданная для москвича роскошь! — на Пасхальном богослужении. Это было незабываемое переживание: когда под пение «Воскресение Твое, Христе Спасе, ангели поют на Небеси» крестный ход выстроился на ступенях храма, все вдруг осознали, что кругом стоит полная тишина. И где — в Москве! Через минуту в этой звенящей тиши раздались вечные глаголы пасхального тропаря: «Христос воскресе из мертвых, смертию смерть поправ и сущим во гробех живот даровав!». Тогда-то и поверилось, что жизнь всегда сильнее смерти. И совсем иначе звучало огласительное слово Иоанна Златоуста: «Смерть! где твое жало? Ад! где твоя победа? Воскрес Христос, и ты низвергся еси! Воскрес Христос, и пали демоны! Воскрес Христос, и радуются ангелы! Воскрес Христос, и жизнь жительствует!»

Вот этой радостью я и поспешил поделиться тогда — как смог, как сумел — с Алексеем Николаевичем. Почти сразу же получил от него ответ: «Спасибо! Примите и мои поздравления Вам и Марине с праздником Святой Пасхи! Желаю вам в это трудное время твердости духа и крепости тела. Тяжело видеть пустые храма, но это не везде. Я знаю храмы в Подмосковье, которые были забиты народом и сотни причащались.»

Алексей Николаевич обладал великим даром — поддержать тогда, когда у тебя опускались руки. Вспоминаю один из последних телефонных разговоров с ним — в день рождения, 7 ноября 2021 года. После положенных поздравлений и обмена новостями разговор свернул на окружавшую тогда действительность: пандемию, изоляцию, qr-коды, дистанционку и прочее. В ответ на моё пожелание сохранить свой внутренний мир и душевное равновесие в условиях мертвящей цифровизации Алексей Николаевич ответил с юмором: «Вы знаете, цифровизация и те, кто за ней стоит — это такая страшная вещь, что есть надежда, что она сожрёт саму себя».

До последних дней своей жизни Алексей Николаевич, несмотря на недуг, продолжал — так или иначе, насколько это было возможно — опекать других, и опять мне, уж не знаю за что, довелось оказаться в их числе. «Раздарил всем по сердцу, себе ничего не оставил. . . » — наверное, таково условие сдачи нашего последнего, самого важного экзамена перед переходом в Вечность. Вечная память вам, дорогой Алексей Николаевич!

5. Воспоминания об Алексее Николаевиче Паршине

(И.С. Резвякова)

Моё близкое знакомство с Алексеем Николаевичем случилось в то время, когда он стал заведующим объединённого отдела алгебры и теории чисел (в 2010 году), и первое моё общение с ним произошло на отчёте отдела в конце года. До этого в практике немногочисленного отдела теории чисел существовала традиция совместного заседания во время отчёта, когда каждый сотрудник выступал перед остальной аудиторией и рассказывал о своих результатах, полученных за год. Алексей Николаевич же назначил каждому сотруднику присоединённого отдела теории чисел индивидуальную встречу. Мои страхи первого общения с Алексеем Николаевичем рассеялись в первую же минуту разговора. Его обычно серьёзное лицо осенила добродушная улыбка и я уже общалась не со строгим заведующим, а с душевным человеком, интересующимся разными направлениями математики. Личное общение Алексея Николаевича с новыми сотрудниками давало и ему, и нам возможность познакомиться, разглядеть друг в друге личность и наладить доверительные отношения. С тех пор, при встрече со своими новыми «подопечными», лицо Алексея Николаевича мгновенно озаряла улыбка.

К своим («алгебраистам»), Алексей Николаевич относился строже, но эта строгость преследовала единственную цель – разбудить максимальный (на текущий момент) потенциал ученика и вдохновить его на большее. Алексей Николаевич безусловно радовался успехам своих учеников и подопечных и заботился об их благополучии и развитии. Именно стараниями Алексея Николаевича после консультаций со своими младшими коллегами отдел алгебры в 2016 году разделился на три, породив отдел теории чисел и новый отдел алгебраической геометрии. Это оказалось действительно важным вкладом Алексея Николаевича в развитие разных направлений математики в Математическом институте. Все в отделе с радостью приняли новые изменения. Сам же Алексей Николаевич был очень обрадован тем, что Д.О. Орлову так подошла должность заведующего новым отделом, как он и не мог даже подумать.

Во время реформы РАН Алексей Николаевич взял на себя огромный труд по анализу нововведений оценки вклада учёного. Благодаря своим организаторским способностям, исключительному аналитическому уму и большому чувству ответственности он в самые кратчайшие сроки написал чёткий и доказательный манускрипт, прочитав который, человек, даже не имеющий отношения к науке, сможет понять суть новых требований и их эффект для научной деятельности.

Наверное, реформа РАН и все последующие глобальные события в мире отразились на улыбчивом и доброжелательном математике. Но я всегда буду помнить ту его улыбку, которая мгновенно превращает серьёзного математика в добродушного, открытого, приятного, внимательного и тактичного собеседника.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kronecker L., Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen // Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. 1884. S. 1179-1193, 1271-1299.

2. Leopold Kronecker's Werke, Hensel K. (ed.), Vol. III, Teubner, Leipzig, 1899.

3. Hardy G. H., Wright E. M., An introduction to the theory of numbers (4th ed.). Clarendon Press, Oxford, 1975.

4. Turán P., A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta-function // Acta Sci. Math. (Szeged). 1960. Vol. 21. P. 311-318.

5. Gonek S. M., Montgomery H. L., Kronecker's approximation theorem // Indag. Math. (N.S.) 2016. Vol. 27. № 2. P. 506–523.

6. Титчмарш Е.К., Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

7. Bohr H., Again the Kronecker Theorem, // J. Lond. Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 5–6.

8. Конягин С. В., Королёв М. А., О явлении Титчмарша в теории дзета-функции Римана // Теория приближений, функциональный анализ и приложения, Сборник статей. К 70-летию академика Бориса Сергеевича Кашина, Труды МИАН, 318, МИАН, М., 2022. С. 182-201.

9. Besikovitch A. S., On the linear independence of fractional powers of integers // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15. P. 3-6.

10. Чандрасекхаран К., Арифметические функции. М.: Наука, 1975.

11. Selberg A., On the remainder term in the lattice point problem of the circle. Manuscript. `http://publications.ias.edu/selberg/section/2494`

12. Heath-Brown D. R., The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem // Acta Arith. 1992. Vol. 60. № 4. P. 389-415.

13. Королёв М. А., Попов Д. А., Об интеграле Ютилы в проблеме круга // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Vol. 86. № 3. P. 3-46.

14. Бухштаб А. А., Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1960.

15. Mordell L. J., On the linear independence of algebraic numbers // Pacific J. Math. 1953. Vol. 3. № 3. P. 625-630.

16. Хуа Л.-К., Метод тригонометрических сумм и его применение в теории чисел. М.: Мир, 1964.

REFERENCES

1. Kronecker L. 1884, “Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen”, *Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin.* S. 1179-1193, 1271-1299.
2. Hensel K. (ed.) 1899, Leopold Kronecker's Werke, Vol. III, Teubner, Leipzig.
3. Hardy G. H., Wright E. M. 1975, An introduction to the theory of numbers (4th ed.). Clarendon Press, Oxford.
4. Turán P. 1960, “A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta-function”, *Acta Sci. Math. (Szeged).*, vol. 21. P. 311-318.
5. Gonek S. M., Montgomery H. L. 2016, “Kronecker's approximation theorem”, *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 27, № 2. P. 506–523.
6. Titchmarsh E. C. 1986, The Theory of the Riemann Zeta-function. 2nd ed. (revised by D.R. Heath-Brown). Clarendon Press, Oxford.
7. Bohr H. 1934, “Again the Kronecker Theorem”, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 9. P. 5–6.
8. Konyagin S. V., Korolev M. A. 2022, “On the Titchmarsh's phenomenon in the theory of the Riemann zeta-function”, Approximation Theory, Functional Analysis, and Applications, Collected papers. On the occasion of the 70th birthday of Academician Boris Sergeevich Kashin, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 318, Steklov Math. Inst., Moscow. P. 182-201.
9. Besikovitch A. S. 1940, “On the linear independence of fractional powers of integers”, *J. London Math. Soc.*, vol. 15. P. 3-6.
10. Chandrasekharan K. 1970, Arithmetical Functions. Springer-Verlag, Berlin.
11. Selberg A., “On the remainder term in the lattice point problem of the circle”. Manuscript. `http://publications.ias.edu/selberg/section/2494`
12. Heath-Brown D. R. 1992, “The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem”, *Acta Arith.*, vol. 60, № 4. P. 389-415.
13. Korolev M. A., Popov D. A. 2022, “On Jutila's integral in the circle problem”, *Izv. Math.*, vol. 86, № 3. P. 413-455.
14. Buhshtab A. A. 1960, Number Theory (in Russian). Uchpedgiz, Moscow.
15. Mordell L. J. 1953, “On the linear independence of algebraic numbers”, *Pacific J. Math.*, vol. 3, № 3. P. 625-630.
16. Hua L.-K. 1959, Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. Teubner-Verlag., Leipzig.

Получено: 25.10.2022
Принято в печать: 22.12.2022