

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 514

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-72-86

**Проблема Ферма — Торричелли в случае трёх точек
в нормированных плоскостях¹**

Д. А. Илюхин

Илюхин Даниил Александрович — студент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

Аннотация

В статье изучается проблема Ферма — Торричелли: задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до некоторых заданных точек в нормированном пространстве. Рассмотрены различные обобщения данной задачи, а также изложены актуальные методы решения и некоторые последние результаты в этой области. Целью работы является поиск ответа на следующий вопрос: в каких нормах на плоскости решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любых трёх точек. В работе сформулирован и доказан критерий единственности, кроме того показано применение полученного критерия на нормах, задаваемых правильными многоугольниками, так называемых лямбда-плоскостях.

Ключевые слова: проблема Ферма — Торричелли, нормирующий функционал, лямбда-плоскость.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Д. А. Илюхин. Проблема Ферма — Торричелли в случае трёх точек в нормированных плоскостях // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 72–86.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 514

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-72-86

**The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets
in normed planes**

D. A. Ilyukhin

Ilyukhin Daniil Alexandrovich — student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: daniil.ilukhin@math.msu.ru

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00355 в МГУ имени М. В. Ломоносова

Abstract

In the paper the Fermat–Torricelli problem is considered. The problem asks a point minimizing the sum of distances to arbitrarily given points in d -dimensional real normed spaces. Various generalizations of this problem are outlined, current methods of solving and some recent results in this area are presented. The aim of the article is to find an answer to the following question: in what norms on the plane is the solution of the Fermat–Torricelli problem unique for any three points. The uniqueness criterion is formulated and proved in the work, in addition, the application of the criterion on the norms set by regular polygons, the so-called lambda planes, is shown.

Keywords: Fermat–Torricelli problem, norming functional, lambda-plane.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

D. A. Ilyukhin 2022, “The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 72–86.

1. Введение

Задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до заданного множества точек в метрическом пространстве, впервые упоминается в 17 веке. В 1643 году Ферма поставил задачу для трёх точек на евклидовой плоскости, и в том же веке Торричелли предложил решение этой проблемы ([4]).

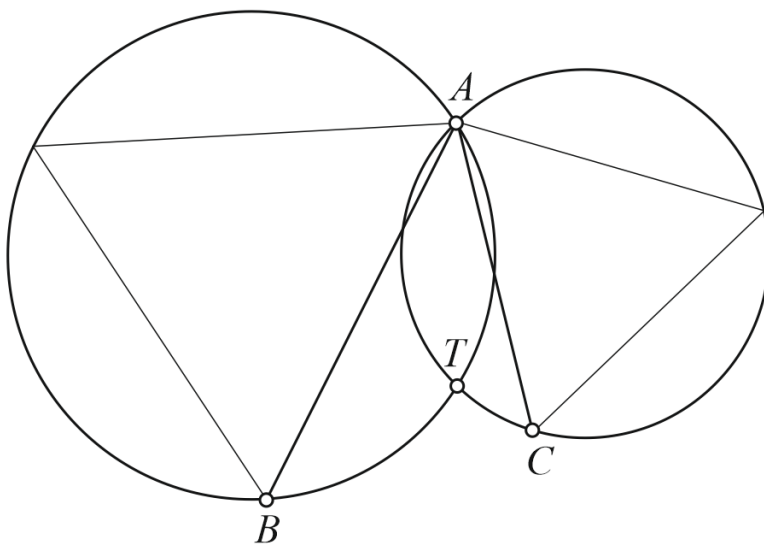


Рис. 1: Конструкция, предложенная Торричелли. Точка T является решением задачи для заданных точек A, B, C ([20])

С тех пор были рассмотрены различные обобщения этой проблемы. Задача была сформулирована для произвольных количества точек, размерности пространства, а также нормы, заданной в этом пространстве. Простота формулировки позволяет рассматривать задачу даже в произвольном метрическом пространстве. К примеру, задача для четырёх точек на евклидовой плоскости решена Д. Фаньяно ([3], [16]). А для случая пяти точек было доказано, что задача неразрешима в радикалах, доказательство приведено в [1] и [6]. Кроме того, существует обобщённая задача, в которой вершины рассматриваются вместе с некоторыми положительными величинами, называемых весами. О развитии взвешенной задачи можно прочитать в

работах [21], [22], [19]. В частности, были доказаны существование и единственность решения такой задачи для трёх точек на евклидовой плоскости ([16]).

В 1934 году Ярником и Кесслером [15] была поставлена задача о поиске графа минимальной длины, соединяющего конечное число точек на евклидовой плоскости, а в 1941 году она обсуждалась в книге Куранта и Роббинса “Что такое математика?” ([7]), авторы которой называли рассматриваемую проблему *задачей Штейнера* в честь Якоба Штейнера. Теория проблемы Штейнера изложена в монографиях [9] и [14], а в книге “Теория экстремальных сетей” ([13]) Ивановым и Тужилиным были предложены различные обобщения задачи и новые направления исследований. Про изучение экстремальных сетей в нормированных пространствах можно прочитать в [17], [2].

В этой статье будет рассматриваться классический вариант задачи: поиск точки, для которой достигается минимум суммы расстояний до элементов подмножества метрического пространства. Такую формулировку будем называть *обобщённой проблемой Ферма — Торричелли* (или просто *проблемой Ферма — Торричелли*). Работа опирается на статью [18], в ней описано применение геометрического подхода к задаче и изложены некоторые новые результаты, которые получены в рамках вещественных конечномерных нормированных пространств, называемых *пространствами Минковского*. В частности, авторы приводят следующий результат:

ТЕОРЕМА 1 ([18]). *В пространстве Минковского решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любого конечного множества точек, не лежащих на одной прямой, тогда и только тогда, когда норма строго выпукла.*

Целью данной работы является решение задачи с более слабым условием: будем искать нормы на плоскости, в которых решение единственно для любых трёхточечных границ. В этом случае появляются новые примеры норм, обладающих свойством единственности решения для любого множества, например, манхэттенская плоскость.

Во втором разделе изложены основные определения, а также описан геометрический метод поиска решения задачи Ферма — Торричелли. В разделе три дан ответ на поставленный вопрос: приведено доказательство критерия единственности. Последняя часть посвящена применению полученного критерия на нормах, задаваемых правильными многоугольниками.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Все утверждения этого раздела будут сформулированы для пространства Минковского, поэтому это не будет уточняться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Точка x_0 называется точкой Ферма — Торричелли для точек $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^n |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $ft(A)$.*

Из свойств функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$ можно получить следующее утверждение про множество решений задачи Ферма — Торричелли, см. например [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве. Тогда $ft(A)$ — непустое, компактное и выпуклое множество.*

Приведём два примера решения задачи Ферма — Торричелли на плоскости. На рисунке 2 изображены вершины равностороннего треугольника сначала в евклидовой плоскости, а затем в норме, заданной правильным шестиугольником. В первом случае множеству решений

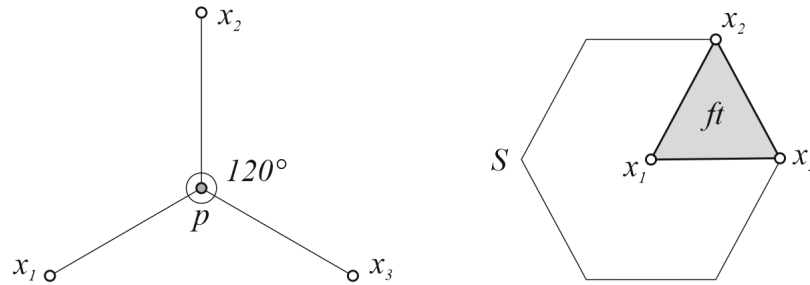


Рис. 2: Примеры решений задачи Ферма — Торричелли на евклидовой плоскости и на λ -плоскости

принадлежит единственная точка, построенная так, что углы между лучами, выходящими из неё в направлении вершин треугольника, равны. Во втором случае уточним расположение точек заданного множества: пусть одна из них находится в начале координат, а две другие — в соседних вершинах единичной окружности. При таких условиях в множество решений войдут все точки построенного треугольника, включая внутренность и границы.

Теперь будет изложен геометрический метод построения решения задачи Ферма—Торричелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^* , состоящее из линейных функционалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функционал $\varphi \in X^*$ называется нормирующим для вектора $x \in X$, если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Легко заметить, что элементы пространства X , полученные умножением вектора x на положительное число k , имеют тот же набор нормирующих функционалов. То есть множество таких функционалов можно описать с помощью точек единичной сферы. Рассмотрим нормирующие функционалы на некоторой нормированной плоскости.

На рисунке 3 приведён участок единичной окружности S , содержащий как уплотнение, так и гладкий участок. Построим нормирующие функционалы для векторов с началом в нуле и концом в точке, лежащей на S . В точке z единичная окружность имеет единственную опорную прямую, тогда для соответствующего вектора существует единственный нормирующий функционал φ_z , его линия уровня совпадает с этой опорной прямой. Внутренним точкам уплотнения xu тоже соответствуют векторы с единственным нормирующим функционалом. В точке x единичная окружность имеет больше одной опорной прямой. Каждая из них задаёт нормирующий функционал, то есть для вектора с концом в x существует бесконечно много нормирующих функционалов. Функционалы φ_1 и φ_2 задаются предельными положениями опорной прямой, а φ_3 — произвольной.

Следующая теорема является критерием принадлежности некоторой точки множеству решений задачи Ферма — Торричелли.

ТЕОРЕМА 2 ([8], [12]). Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда x_0 — точка Ферма — Торричелли для $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$.

Приведём простейший пример использования этой теоремы на евклидовой плоскости. Рассмотрим три точки на окружности, расположенные на равном расстоянии друг от друга, и предположим, что начало координат является решением задачи Ферма—Торричелли для них. Для каждой из точек x_1, x_2, x_3 существует единственная опорная прямая, которая является

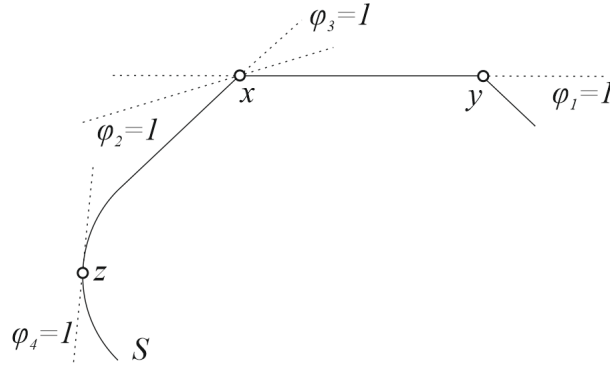


Рис. 3: Построение нормирующих функционалов по опорным прямым к единичной окружности

линией уровня $\varphi_i = 1$ некоторого функционала. Три построенные прямые образуют равносторонний треугольник и равноудалены от начала координат, следовательно, сумма функционалов, которые они задают, равна нулю. По теореме 2 точка $p = 0$ принадлежит множеству решений.

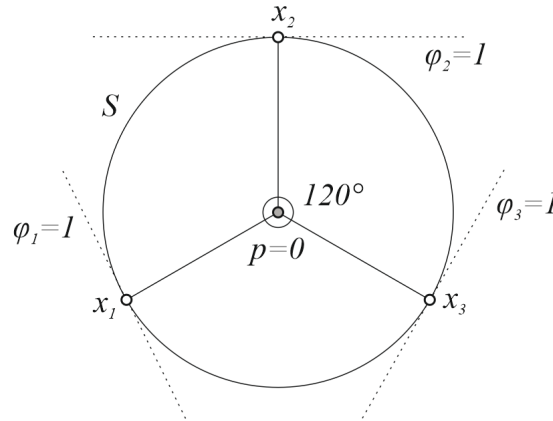


Рис. 4: Начало координат принадлежит множеству решений для точек x_1, x_2, x_3

Допустим, что найдена точка, являющаяся решением для множества A . Теперь с помощью функционалов из теоремы 2 можно построить всё множество $\text{ft}(A)$. Для этого введём новый объект.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим конус $C(x, \varphi) = x - \{a : \varphi(a) = \|a\|\}$.

Рассмотрим два примера построения конуса на манхэттенской плоскости (рисунок 5). Пусть функционал φ_1 задаётся опорной прямой, пересекающей единичную окружность в одной точке, а φ_2 - прямой, содержащей уплощение. Множество $\{a : \varphi_1(a) = \|a\|\}$ является лучом, который выходит из начала координат и проходит через эту точку. Для второго функционала это будет целый набор лучей, пересекающих все точки уплощения. В обоих случаях далее отражаем построенное множество относительно начала координат и параллельным переносом сдвигаем так, чтобы вершина попала в заданную точку.

ТЕОРЕМА 3 ([8]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \text{ft}(A) \setminus A$. По теореме 2 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$. Тогда $\text{ft}(A) = \cap_{i=1}^n C(x_i, \varphi_i)$.

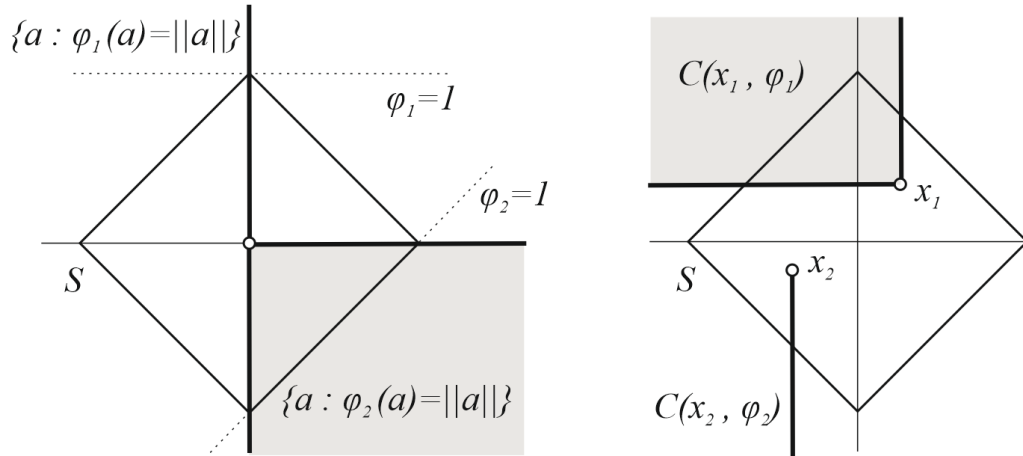
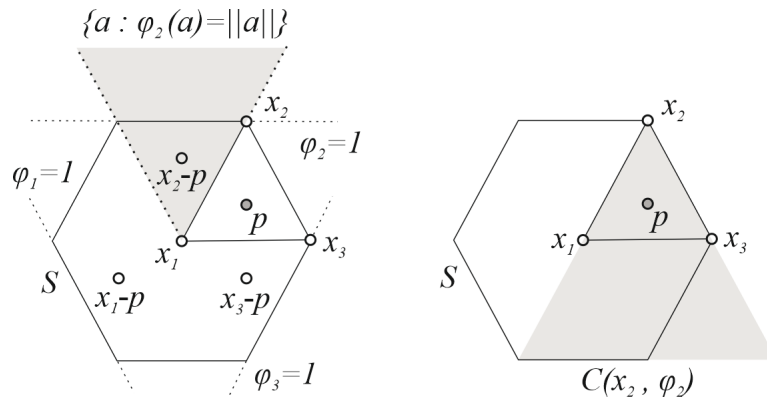


Рис. 5: Построение конусов на манхэттенской плоскости

Теоремы 2 и 3 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим подробнее пример с вершинами равностороннего треугольника в шестиугольной норме (рисунок 6).

Во-первых, найдём хотя бы одно решение. Возьмём $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и с помощью теоремы 2 докажем, что $p \in \text{ft}(A)$. Для этого рассмотрим векторы $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$ и построим их нормирующие функционалы. Так как они лежат на одних направлениях с внутренними точками уплощений, то для каждого из векторов $x_i - p$ существует ровно один функционал φ_i , линия уровня которого содержит соответствующее уплощение. Уплощения равноудалены от начала координат и задают равносторонний треугольник, следовательно, сумма функционалов, построенных по ним, равна нулю, и условие теоремы выполнено.

Рис. 6: Построение полного множества решений для точек x_1, x_2, x_3 на плоскости с шестиугольной нормой

Теперь воспользуемся теоремой 3, чтобы отыскать все решения. Построим конус, задаваемый функционалом φ_2 и вектором $x_2 - p$. Так как функционал является нормирующим для всех точек уплощения, множество $\{a : \varphi_2(a) = ||a||\}$ представляет собой набор лучей, выходящих из начала координат и проходящих через точки уплощения, то есть угол, стороны которого содержат две соседние вершины. Теперь отразим угол относительно начала координат и совершим параллельный перенос так, чтобы вершина угла оказалась в точке x_2 . После аналогичного построения двух других конусов получим, что их пересечением является весь треугольник $x_1x_2x_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 3 не зависит от выбора точки p и функционалов φ_i .

Геометрический метод даёт общее описание решений задачи Ферма — Торричелли для различных заданных множеств — это пересечение некоторых конусов с вершинами, расположенными в точках этого множества. В случае плоскости это наблюдение позволяет сформулировать следующие утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([18]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки на плоскости. Тогда $\text{ft}(A)$ — выпуклый многоугольник, который может вырождаться в отрезок или точку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([18]). Пусть в пространстве точки множества $A = \{x_1, \dots, x_{2k+1}\}$ расположены на одной прямой в порядке их нумерации. Тогда $\text{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$.

3. Критерий единственности

Пусть на нормированной плоскости задано множество из трёх точек $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Отвечая на вопрос, какой вид имеет множество решений задачи Ферма — Торричелли $\text{ft}(A)$ при этих условиях, можно получить три случая: невырожденный выпуклый многоугольник, отрезок и точка. Чтобы сформулировать критерий единственности, решим обратную задачу: найдём необходимые и достаточные условия того, что $\text{ft}(A)$ является многоугольником либо отрезком.

Теорема 3 говорит о том, что множество $\text{ft}(A)$ всегда является пересечением трёх конусов, которые на плоскости — углы или лучи, то есть

$$\text{ft}(A) = C(x_1, \varphi_1) \cap C(x_2, \varphi_2) \cap C(x_3, \varphi_3)$$

для некоторых функционалов φ_i .

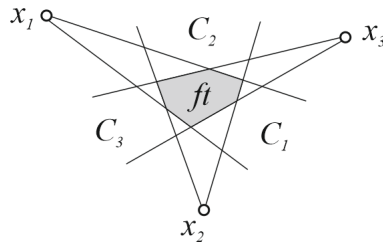


Рис. 7: Решение задачи Ферма — Торричелли — пересечение конусов, выходящих из точек заданного множества

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $\text{ft}(A)$ является невырожденным многоугольником, то конусы C_i — невырожденные углы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда хотя бы один из конусов — луч, множество $\text{ft}(A)$ является подмножеством этого луча и невырожденным многоугольником быть не может.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\text{ft}(A)$ является невырожденным отрезком, то хотя бы один из конусов C_i — невырожденный угол.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все три конуса — лучи, то их пересечение может быть отрезком только при условии, что все они лежат на одной прямой. В этом случае точки x_i лежат на одной прямой и по предположению 3 множество $\text{ft}(A)$ совпадает с одной из этих точек. Противоречие.

Утверждения 4 и 5 формулируют необходимые условия, теперь перейдём к условиям на норму, обеспечивающим существование множества точек с неединственным решением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что единичная окружность на нормированной плоскости состоит из элементов нулевого типа, которыми являются точки, не лежащие внутри уплощений, а также элементов первого типа, которыми являются внутренние точки уплощений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Возьмём три элемента единичной окружности. Для каждого из них выберем опорную прямую так, чтобы для элемента нулевого типа она пересекала единичную окружность только в одной точке, то есть в самом элементе. По выбранным опорным прямым построим функционалы, линии уровня $\varphi_i = 1$ которых совпадают с этими прямыми. Если найдётся набор опорных прямых такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такую тройку будем называть согласованной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть на плоскости задана некоторая норма. Если найдётся согласованная тройка элементов единичной окружности, состоящая из трёх элементов первого типа, то в этой плоскости найдутся три точки x_1, x_2, x_3 , для которых множество решений $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$ — невырожденный многоугольник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_1, x_2, x_3 — элементы данной тройки. Тогда взяв функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ из определения 5, по теореме 2 получаем, что $p = 0$ принадлежит $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$. По теореме 3 $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$ является пересечением конусов, выходящих из точек x_1, x_2, x_3 . Так как все функционалы содержат уплощения, все три конуса являются невырожденными углами. Причём каждый из них содержит некоторую окрестность нуля в силу того, что точки x_1, x_2, x_3 не являются границами уплощений. Следовательно, конусы в пересечении образуют многоугольник.

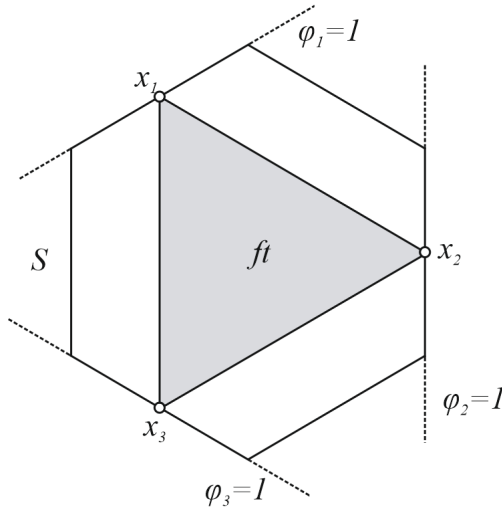


Рис. 8: Первое условие неединственности

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть на плоскости задана некоторая норма. Если найдётся согласованная тройка элементов единичной окружности, состоящая из двух элементов первого типа и одного элемента нулевого типа, то в этой плоскости найдутся три точки x_1, x_2, x_3 , для которых множество решений $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$ — невырожденный отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки x_1, x_2 — элементы первого типа, а x_3 — нулевого типа из данной тройки. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что $p = 0$ принадлежит $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$. Конусы, выходящие из x_1, x_2 , содержат окрестность нуля, а из точки x_3 выходит луч, проходящий через начало координат. Следовательно, в пересечении получаем невырожденный отрезок.

Следующее условие обеспечит существование в заданной норме трёх точек, для которых множество решений является пересечением одного невырожденного угла и двух лучей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть на плоскости задана некоторая норма. Если найдётся согласованная тройка элементов единичной окружности, состоящая из одного элемента первого типа и двух элементов нулевого типа, причём элементы нулевого типа расположены симметрично относительно начала координат, то в этой плоскости найдутся три точки x_1, x_2, x_3 , для которых множество решений $ft(x_1, x_2, x_3)$ — невырожденный отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точки x_1, x_2 — элементы нулевого типа, а x_3 — первого типа из данной тройки. Функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ из определения 5 удовлетворяют теореме 2, и точка $x = 0$ принадлежит $ft(x_1, x_2, x_3)$. По теореме 3 решение $ft(x_1, x_2, x_3)$ является пересечением двух лучей, лежащих на одной прямой, содержащей элементы нулевого типа, и невырожденного угла, выходящего из уплощения. Получаем отрезок.

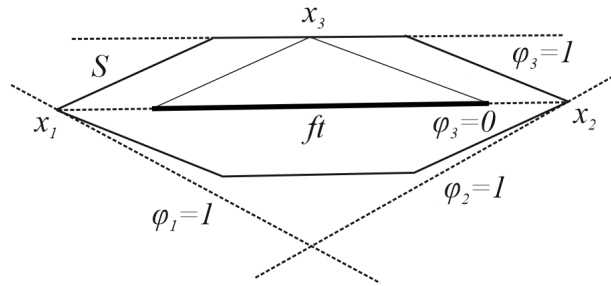


Рис. 9: Третье условие неединственности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что для нормы на плоскости выполняется первое, второе или третье условие неединственности, если она удовлетворяет условию утверждения 6, 7 или 8 соответственно.

ТЕОРЕМА 4. На нормированной плоскости решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любых трёх точек тогда и только тогда, когда для данной нормы не выполняется ни одно из условий неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для нормы выполняется хотя бы одно из условий неединственности, то по соответствующему утверждению на плоскости найдутся три точки, для которых множество решений бесконечно.

Пусть нашлись три точки x_1, x_2, x_3 , для которых $ft(x_1, x_2, x_3)$ неединственно. Так как решение — пересечение конусов, то это либо многоугольник, либо отрезок. В случае многоугольника все три конуса — невырожденные углы. Рассмотрим функционалы, задающие конусы. Их линии уровня содержат уплощения единичной окружности. Взяв по одной внутренней точке из каждого уплощения, получим согласованную тройку элементов первого типа, что и требуется в первом условии неединственности.

Отрезок может получиться тремя способами: пересечением трёх углов, пересечением двух углов и луча и пересечением одного угла и двух лучей. В первых двух случаях аналогично рассмотрим функционалы, задающие конусы. Получим первое и второе условие неединственности соответственно. Теперь обратимся к третьему случаю. Во-первых, получаем согласованную тройку, состоящую из одного уплощения и двух точек. Во-вторых, для того, чтобы решение было неединственно, лучи должны лежать на одной прямой, то есть каждый из двух лучей должен содержать начало другого. Отсюда следует, что элементы нулевого типа из согласованной тройки это точки, лежащие напротив друг друга относительно начала координат. Следовательно, для данной нормы выполняется третье условие неединственности.

4. λ -нормированные плоскости

На практике критерий 4 применить нелегко, так как ответ для заданной нормы даётся путём перебора уплощений единичной окружности. Если рассматривать его как алгоритм, то его сложность напрямую зависит от их количества, а из-за наличия норм с бесконечным количеством уплощений он даже не является вычислимым за конечное время. Покажем его применение на самом популярном семействе нестрогих выпуклых норм — λ -плоскостях. Экстремальные сети в λ -нормированных плоскостях изучаются Илютко в работах [10], [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. λ -нормированной плоскостью называется плоскость, норма на которой задана правильным 2λ -угольником.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используем обозначение $\text{dist}(x, y)$ для евклидова расстояния между точками x и y на плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для λ -нормированной плоскости при $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$ не выполняется первое условие неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие выполняется и найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что их сумма равна нулю и прямые $\varphi_i = 1$ содержат уплощения единичной окружности.

Пусть l_i — прямые, задающие линии уровня $\varphi_i = 1$. Сумма векторов, задающих эти прямые, равна нулю, а также $\text{dist}(0, l_1) = \text{dist}(0, l_2) = \text{dist}(0, l_3)$, так как l_i содержат уплощения 2λ -угольника. Следовательно, линии уровня образуют правильный треугольник, что невозможно при $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для λ -нормированной плоскости при $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$ не выполняется второе условие неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие выполняется и найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что их сумма равна нулю, прямые $\varphi_1 = 1$ и $\varphi_2 = 1$ содержат уплощения единичной окружности, а прямая $\varphi_3 = 1$ — вершину.

Пусть l_i — прямые, задающие линии уровня $\varphi_i = 1$. Повернём плоскость так, чтобы прямая l_3 была параллельна координатной оси x . Пусть l_1 и l_2 задаются уравнениями $\alpha_1 x + \beta_1 y = 1$ и $\alpha_2 x + \beta_2 y = 1$, а l_3 — уравнением $\gamma y = 1$. Так как $\sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0$, то $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ и $\beta_1 + \beta_2 + \gamma = 0$. Из того, что прямым l_1 и l_2 принадлежат уплощения многоугольника, получаем

$$\text{dist}(0, l_1) = \text{dist}(0, l_2) \Rightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2.$$

Заметим, что прямые l_1 и l_2 не параллельны. В противном случае сумма функционалов φ_1 и φ_2 равна нулю, так как l_1 и l_2 находятся на одинаковом расстоянии от начала координат. Это значит, что функционал φ_3 — нулевой, но это не так, потому что его линия уровня является опорной прямой к единичной окружности. Учитывая это,

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma = -2\beta.$$

Таким образом, уравнения для прямых l_i приобрели вид:

$$-\alpha x + \beta y = 1, \quad \alpha x + \beta y = 1, \quad -2\beta y = 1.$$

Треугольник, образованный прямыми l_i — равнобедренный, его основание параллельно координатной оси x . Пусть оно расположено ниже оси, то есть пусть $\beta > 0$. Также допустим, что $\alpha > 0$, иначе заменим α на $-\alpha$. Проведём биссектрису из точки пересечения прямых l_1 и l_2 . Биссектриса лежит на оси ординат. Возможны два случая: либо она проходит через середины противоположных сторон 2λ -угольника, либо через пару противоположных вершин. Первый

случай противоречит тому, что опорная прямая l_3 не содержит уплощение. Тогда биссектриса проходит через вершину, которой касается l_3 . Так как l_3 параллельна оси абсцисс, получаем равенство углов, образованных прямой l_3 и сторонами 2λ -угольника, имеющими с ней общую точку.

Наложим ещё одно условие на коэффициенты α и β . Пусть n — кол-во вершин многоугольника. Имеем

$$\text{dist}(0, l_1) = \text{dist}(0, l_2) = \cos \frac{\pi}{n} \text{dist}(0, l_3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{2\beta} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \beta^2.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - 1} = \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

Если $\xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23}$ — углы между прямыми l_1, l_2, l_3 , то $\xi_{13} = \xi_{23}$ и $\xi_{12} + \xi_{13} + \xi_{23} = \pi$. Так как $\tan \xi_{13} = \tan \xi_{23} = \frac{\alpha}{\beta}$, то

$$\xi_{12} = \pi - 2 \arctan \tan \xi_{13} = \pi - 2 \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

С другой стороны, $\xi_{12} = \pi - \frac{2\pi k}{n}$ для некоторого k , $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k < \frac{n}{2}$. То есть

$$\frac{\pi k}{n} = \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

Докажем, что это равенство не выполняется при натуральных значениях k и n , таких что $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$, и придём к противоречию с первоначальным допущением. Для доказательства этого факта достаточно проверить, что следующее двойное неравенство справедливо при всех $n > 2$:

$$\frac{n}{3} - \frac{1}{3} < \frac{n}{\pi} \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3} < \frac{n}{3} + \frac{1}{3}$$

Сначала умножим неравенство на $\frac{\pi}{n}$:

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3n} < \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3n}.$$

Левая часть неравенства меньше $\frac{\pi}{3}$ для всех $n > 2$, а средняя часть больше $\frac{\pi}{3}$ при тех же n , значит, первое неравенство выполняется. В оставшемся неравенстве возьмём тангенс от обеих частей и возведём в квадрат:

$$4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3 < \tan^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3n} \right).$$

Далее сделаем замену $x = \tan \frac{\pi}{3n}$, и после нескольких простых преобразований получим неравенство

$$4 \left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \right)^2 + 3 < \left(\frac{x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}x} \right)^2,$$

которое должно выполняться для $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Несложно заметить, что это действительно так. Утверждение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для λ -нормированной плоскости не выполняется третье условие неединственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие выполняется. Тогда существует согласованная тройка, состоящая из внутренней точки уплощения и пары вершин, лежащих симметрично относительно центра многоугольника. Пусть φ — функционал, соответствующий опорной прямой к элементу первого типа. Его линия уровня $\varphi = 1$ содержит уплощение многоугольника, а линия $\varphi = 0$ проходит через элементы нулевого типа, так как сумма функционалов равна нулю. Таким образом, нормы, заданные $4n$ -угольниками уже не подходят, потому что одно из уплощений параллельно оси симметрии многоугольника. Далее пусть $n \geq 6$, рассмотрим опорные прямые, соответствующие элементам нулевого типа. Их точка пересечения должна принадлежать прямой $\varphi = -2$. Угол между прямой $\varphi = 0$ и соседним уплощением должен быть меньше, чем угол между прямой $\varphi = 0$ и опорной прямой. Перейдём к неравенству их тангенсов:

$$\tan \frac{\pi(n-2)}{2n} < 2 \cos \frac{\pi}{n}$$

Это неравенство не выполняется при $n \geq 6$. То есть получаем противоречие для всех λ -плоскостей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Рассмотрим на плоскости треугольник ABC , все углы которого меньше 120° . Тогда T — точка Торричелли для вершин A, B, C , если углы ATB, BTC, ATC равны 120° .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используем обозначение $\hat{x}$ для $\frac{1}{\|x\|}x$ при $x \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ — множество точек на λ -нормированной плоскости, не лежащих на одной прямой, и $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$. Пусть в треугольнике с вершинами x_1, x_2, x_3 все углы меньше 120° , и p — точка Торричелли для этого треугольника. Тогда если точки $\widehat{x_i - p}$ не совпадают с вершинами 2λ -угольника, то $\text{ft}(A)$ — невырожденный выпуклый многоугольник, иначе $\text{ft}(A) = \{p\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим нормирующие функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для векторов $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$. Если $\widehat{x_i - p}$ принадлежат уплощениям единичной окружности, то положим $\varphi_i = 1$ на этом уплощении. Если $\widehat{x_i - p}$ — вершины многоугольника, то выберем уплощения в одном и том же направлении обхода. Тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ и по Теореме 2 $p \in \text{ft}(A)$. По Теореме 3 $\text{ft}(A) = \bigcap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i)$. В первом случае каждый конус $C(x_i, \varphi_i)$ вместе с p содержит некоторую окрестность p , и $\text{ft}(A)$ — невырожденный выпуклый многоугольник, в другом случае точка p лежит на границе каждого из конусов $C(x_i, \varphi_i)$ и в силу симметрии $\bigcap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i) = \{p\}$.

Из доказанных утверждений следует теорема, классифицирующая нормы данного семейства относительно единственности решения задачи Ферма — Торричелли.

ТЕОРЕМА 5. На λ -нормированной плоскости решение задачи Ферма — Торричелли единственно для любых трех точек, если и только если $\lambda \not\equiv 0 \pmod{3}$.

5. Заключение

Простота формулировки классической задачи Ферма — Торричелли позволяет рассматривать множество вариантов обобщения этой проблемы. В статье было рассмотрено расширение задачи с евклидовой плоскости на произвольную нормированную плоскость. Основным результатом работы является описание норм на плоскости, обеспечивающих единственность решения задачи Ферма — Торричелли для любых трёх точек. Полученный критерий позволяет проанализировать семейство норм, заданных правильными многоугольниками, так называемых лямбда-плоскостей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bajaj C. The algebraic degree of geometric optimization problems. // 1988. *Discr. Comput. Geom.*, 3, 177–191.
2. Bannikova A. G., Ilyutko D. P., Nikonov I. M. The Length of an Extremal Network in a Normed Space: Maxwell Formula // 2016. *Journal of Mathematical Sciences*, 214:5, 593–608.
3. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. Geometric methods and optimization problems. // 1999. Kluwer Acad. Publ.
4. Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem // 2013.
5. Cieslik D. The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces. // 1988. *Optimization* 19, 485–489.
6. Cockayne E. J., Melzak Z. A. Euclidean constructibility in graph-minimization problems. // 1969. *Math. Mag.*, 42, 206–208.
7. Courant R., Robbins H. What Is Mathematics? // 1941. Oxford University Press.
8. Durier R., Michelot C. Geometrical properties of the Fermat-Weber problem. // 1985. *Europ. J. Oper. Res.* 20, 332–343.
9. Hwang F. K., Richards D., Winter P. The Steiners Tree Problem. // 1992. Elsevier Science Publishers.
10. Илютко Д. П. Разветвленные экстремали функционала λ -нормированной длины. // 2006. *Матем. сб.*, 197:5, 75–98.
11. Илютко Д. П., Никонов И. М. Экстремальные сети на λ -нормированной плоскости, где $\lambda=3,4,6$. // 2017. *Матем. сб.*, 208:4, 17–50.
12. Иванов А. О., Тужилин А. А. Разветвленные геодезические в нормированных пространствах. // 2002. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 66:5, 33–82
13. Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. // 2003. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований.
14. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. // 1994. CRC Press.
15. Jarník V., Kössler M. O minimálních grafech obsahujících n daných bodu // 1934. *Čas, Pěstování Mat. (Essen)* T. 63: 223–235.
16. Kupitz Y. S., Martini H. Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem. // 1997. *Bolyai Society Mathematical Studies* 6, 55–127.
17. Лаут И. Л., Овсянников З. Н. Вид минимальных разветвлённых геодезических в нормированном пространстве определяет норму. // *Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, 2, с. 67–77.
18. Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces. // 2002. *Journal of Optimization Theory and Applications* 115, 283–314.

19. Nguyen S. D. Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces // 2018. ArXiv e-prints. arXiv:1806.04296.
20. Torricelli E. De maximis et minimis. // 1919. Opere di Evangelista Torricelli, Faenza, Italy.
21. Uteshev A. Y. Analytical solution for the generalized Fermat-Torricelli problem // 2014. The American Mathematical Monthly 121(4), 318–331.
22. Zachos A. N. An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere // 2014. ArXiv e-prints. arXiv:1408.6495.

REFERENCES

1. Bajaj C. 1988, “The algebraic degree of geometric optimization problems.”, *Discr. Comput. Geom.*, 3, 177–191.
2. Bannikova A. G., Ilyutko D. P., Nikonov I. M. 2016, “The Length of an Extremal Network in a Normed Space: Maxwell Formula”, *Journal of Mathematical Sciences*, 214:5, 593–608.
3. Boltyanski V., Martini H., Soltan V. 1999, “Geometric methods and optimization problems.”, Kluwer Acad. Publ.
4. Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. 2013, “On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem.”
5. Cieslik D. 1988, “The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces.”, *Optimization* 19, 485–489.
6. Cockayne E. J., Melzak Z. A. 1969, “Euclidean constructibility in graph-minimization problems”, *Math. Mag.*, 42, 206–208.
7. Courant R., Robbins H. 1941, “What Is Mathematics?”, Oxford University Press.
8. Durier R., Michelot C. 1985, “Geometrical properties of the Fermat-Weber problem.”, *Europ. J. Oper. Res.* 20, 332–343.
9. Hwang F. K., Richards D., Winter P. 1992, “The Steiners Tree Problem”, Elsevier Science Publishers.
10. Ilyutko D. P. 2006, “Branching extremals of the functional of λ -normed length”, *Sb. Math.*, 197:5, 705–726.
11. Ilyutko D. P., Nikonov I. M. 2017, “Extremal networks in λ -geometry, where $\lambda=3,4,6$ ”, *Sb. Math.*, 208:4 (2017), 479–509.
12. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2002, “Branching geodesics in normed spaces”, *Izvestiya: Mathematics*, 2002, 66:5, 905–948.
13. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2003, “Extreme Networks Theory”, Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Investigations.
14. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 1994, “Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations”, CRC Press.
15. Jarník V., Kössler M. 1934, “O minimálních grafech obsahujících n daných bodu”, *Čas, Pěstování Mat. (Essen)* T. 63: 223–235.

16. Kupitz Y.S., Martini H. 1997, “Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem.”, Bolyai Society Mathematical Studies 6, 55-127.
17. Laut I.L., Ovsyannikov Z.N. 2014, “The Type of Minimal Branching Geodesics Defines the Norm in a Normed Space.”, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18, no. 2, pp. 67–77.
18. Martini H., Swanepoel K.J., Weis G. 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces.”, Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.
19. Nguyen S.D. 2018, “Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces”, ArXiv e-prints, arXiv:1806.04296.
20. Torricelli E. 1919, “De maximis et minimis.” Opere di Evangelista Torricelli, Faenza, Italy.
21. Uteshev A.Y. 2014, “Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem”, The American Mathematical Monthly 121(4), 318–331.
22. Zachos A.N. 2014, “An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere”, ArXiv e-prints, arXiv:1408.6495.

Получено: 15.06.2022

Принято в печать: 22.12.2022