ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 5.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-45-56

Некоторые результаты для весовых констант Бернштейна — Никольского[1]

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула)
e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

В данной небольшой обзорного плана работе мы приводим последние результаты по точным константам Бернштейна — Никольского для полиномов на многомерной единичной сфере в пространстве L^p с весом Данкля и оператором Бельтрами–Данкля и родственным весовым константам для полиномов и целых функций экспоненциального типа и операторами Гегенбауэра, Бесселя. Долгое время классическим направлением теории неравенств Бернштейна — Никольского было установление порядкового роста констант в зависимости от роста степени полиномов. Современным развитием теории является доказательство асимптотических равенств типа Левина — Любинского, которые уточняют порядковые соотношения. Основные результаты здесь получили F. Dai, M. Ganzburg, E. Levin, D. Lubinsky, S. Tikhonov, авторы работы.

Мы отталкиваемся от доказанных ранее соотношений между многомерной константой Бернштейна — Никольского и одномерной константой для алгебраических полиномов с весом и дифференциальным оператором Гегенбауэра. В случае группы отражений октаэдра и функции кратности κ, такой что $\min\kappa = 0$, имеет место равенство между этими константами. Как следствие, для $p \geqslant 1$ это позволяет выписать асимптотические равенства равенства Левина — Любинского для констант Бернштейна — Никольского с целой степенью оператора Бельтрами — Данкля. Случай $\min\kappa > 0$ рассмотрен для случая констант Никольского и окружности. Для подпространства четных полиномов с четными гармониками установлена связь с точной константой Никольского для полиномов на компактных однородных пространствах ранга 1. Это позволило выписать равенство Левина — Любинского для поточечных констант при всех $p > 0$ и обычных констант при $p \geqslant 1$, которое согласуется с известным порядковым неравенством.

Предельные константы в асимптотических равенствах Левина — Любинского выражаются через константы Бернштейна — Никольского для целых функций экспоненциального типа на евклидовом пространстве, полуоси со степенным весом и операторами Лапласа, Лапласа — Данкля, Бесселя. Дальнейшее уточнение значений констант связано с их оценкой при больших значения размерности пространства или степени степенного веса. В работе мы приводим схему получения таких оценок для случая пространства L^1. Этот случай также интересен тем, что он связан с экстремальной проблемой Ремеза о концентрации L^1-нормы.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, `https://rscf.ru/project/18-11-00199/`.

Ключевые слова: единичная сфера, полином, вес Данкля, константа Бернштейна — Никольского, равенство Левина — Любинского, проблема Ремеза.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Некоторые результаты для весовых констант Бернштейна — Никольского // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 45–56.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 5.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-45-56

Some results for weighted Bernstein–Nikol'skii constants[2]

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

In this short review paper, we present the latest results on the sharp Bernstein–Nikol'skii constants for polynomials on the multidimensional unit sphere in the space L^p with the Dunkl weight and the Beltrami–Dunkl operator and related weight constants for polynomials and entire functions of exponential type and Gegenbauer and Bessel operators. For a long time, the classical trend in the theory of Bernstein–Nikol'skii inequalities was the establishment of an growth rate of constants depending on the growth of the degree of polynomials. The modern development of the theory is the proof of asymptotic equalities of Levin–Lubinsky-type, which refine the asymptotic equivalences. The main results here were obtained by F. Dai, M. Ganzburg, E. Levin, D. Lubinsky, S. Tikhonov, the authors of the work.

We start from the previously proven relations between the multidimensional Bernstein–Nikol'skii constant and the one-dimensional constant for algebraic polynomials with the Gegenbauer weight and the Gegenbauer differential operator. In the case of the reflection group of an octahedron and a multiplicity function κ such that $\min\kappa = 0$, these constants are equal. As a corollary, for $p \geqslant 1$ this allows one to write down the Levin–Lubinsky asymptotic equalities of the Bernstein–Nikol'skii constants with an integer power of the Beltrami–Dunkl operator. The case $\min\kappa > 0$ is considered for the case of Nikol'skii constants and the circle. For the subspace of even polynomials with even harmonics, a connection is established with the sharp Nikol'skii constant for polynomials on compact homogeneous spaces of rank 1. This made it possible to write the Levin–Lubinsky equality for pointwise constants for all $p > 0$ and general constants for $p \geqslant 1$, which agrees with the known asymptotic inequality.

The limit constants in the Levin–Lubinsky asymptotic equalities are expressed in terms of the Bernstein–Nikolskii constants for entire functions of exponential type on Euclidean space, half-axis with the power weight and Laplace, Laplace–Dunkl, Bessel operators. Further refinement of the values of the constants is connected with their estimation at large dimension of space or

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), `https://rscf.ru/project/18-11-00199/`.

the weight exponent. In this paper, we present a scheme for obtaining such estimates for the case of the space L^1. This case is also interesting because it is related to the Remez extremal L^1-norm concentration problem.

Keywords: unit sphere, polynomial, Dunkl weight, Bernstein–Nikol'skii constant, Levin–Lubinsky equality, Remez problem

Bibliography: 15 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii, 2022, “Some results for weighted Bernstein–Nikol'skii constants”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 45–56.

1. Введение

Будем опираться на введенные в работах [9, 10] обозначения. Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+$; $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ — полиномы Якоби; $R_n^{(\alpha)}(t) = \frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)}{P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)}$ — нормированные условием в единице полиномы Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $w_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha$, где $\alpha \geqslant -1/2$;

$$G_\alpha = (1-t^2)\,\frac{d^2}{dt^2} - (2\alpha+2)t\,\frac{d}{dt}$$

— дифференциальный оператор Гегенбауэра. Если $g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t)$ — разложение Фурье–Гегенбауэра полинома $g \in \mathcal{P}_n$, то для $s \geqslant 0$

$$(-G_\alpha)^s g(t) = \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha,n})^s \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t)$$

где $\lambda_{\alpha,n} = n(n+2\alpha+1)$ — собственные значения оператора $(-G_\alpha)$.

Пусть $\mathbb{S}^d$, $d \in \mathbb{N}$, — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^{d+1}$; $v_\kappa(x) = \prod_{a\in R_+} |\langle a, x\rangle|^{2\kappa(a)}$ — степенной вес Данкля на $\mathbb{R}^{d+1}$, где R_+ — положительная подсистема заданной системы корней $R \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa\colon R \to \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений $W(R)$. Сужение v_κ на $\mathbb{S}^d$ называется сферическим весом Данкля.

Для $p \in (0,\infty]$ и множества X с весом $v\colon X \to \mathbb{R}_+$ через $L_v^p(X)$ обозначается пространство измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{C}$ с конечной нормой $\|f\|_{p,v} = \bigl(\int_X |f(x)|^p v(x)\,dx\bigr)^{1/p}$ для $p < \infty$ (квазинормой при $p < 1$), $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$ для $p = \infty$; $\|f\|_p = \|f\|_{p,1}$ для единичного веса; $\widehat{v}(x) = \frac{v(x)}{\int_X v(y)\,dy}$ — нормированный вес для компактного X.

Пусть Π_n^d — пространство комплекснозначных сферических полиномов на $\mathbb{S}^d$ порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда в $L_{v_\kappa}^2(\mathbb{S}^d)$ имеем $\Pi_n^d = \bigoplus_{j=0}^n \mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — подпространство сферических κ-гармоник порядка j. Пусть $\{Y_{ji}\}_{i=1}^{h_j(d)}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где размерность $h_j(d) = \binom{j+d}{d} - \binom{j+d-2}{d}$; $\operatorname{proj}_j^\kappa$ — проектор на $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$; $\Delta_{\kappa,0}$ — оператор Бельтрами–Данкля на сфере;

$$(-\Delta_{\kappa,0})^s \operatorname{proj}_j^\kappa = (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^s \operatorname{proj}_j^\kappa,$$

где $\alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1$, $d_\kappa = d + 2\sum_{a\in R_+} \kappa(a)$ — размерность Данкля для $\mathbb{S}^d$.

Через $Z_j^\kappa(x,y) = \sum_{i=1}^{h_j(d)} Y_{ji}(x)\overline{Y_{ji}(y)}$ обозначается воспроизводящее ядро подпространства $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$. Имеем

$$\widetilde{Z}_j^\kappa(x,y) = \frac{Z_j^\kappa(x,y)}{h_j(d_\kappa)} = V_\kappa[R_j^{(\alpha_\kappa)}(\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x),$$

где V_κ — оператор сплетения Данкля.

Пусть $Y \subset L^\infty(X)$ — некоторое подпространство, имеющее непустое пересечение с $L^p_v(X)$; D — некоторый (дифференциальный) оператор, для которого $DY \subset Y$. Тогда точная константа Бернштейна — Никольского в $L^p_v(X)$ для подпространства Y определяется как решение экстремальной задачи

$$C(Y, D, L^p_v(X)) = \sup_{f\in(Y\cap L^p_v(X))\setminus\{0\}} \frac{\|Df\|_\infty}{\|f\|_{p,v}}.$$

Для единичного оператора $D = I$ она называется константой Никольского. Для $D \neq I$ и $p = \infty$ получаем константу Бернштейна. Пусть $\widehat{C}(Y, D, L^p_v(X)) = C(Y, D, L^p_{\widehat{v}}(X))$.

Также изучается точечный вариант константы Бернштейна — Никольского для фиксированной точки $x_0 \in X$:

$$C^{(x_0)}(Y, D, L^p_v(X)) = \sup_{f\in(Y\cap L^p_v(X))\setminus\{0\}} \frac{|Df(x_0)|}{\|f\|_{p,v}} \leqslant C(Y, D, L^p_v(X)).$$

Данная константа удобна для вычислений и оценок. Поэтому в теории, как правило, вначале доказывается равенство между константами для подходящей точки x_0.

Нас будут интересовать многомерная константа Бернштейна — Никольского в пространстве $L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)$ и ее одномерный вариант в пространстве $L^p_{w_\alpha}([-1, 1])$. Пусть

$$C_{p,\kappa}(d, n, s) = C(\Pi^d_n, (-\Delta_{\kappa,0})^s, L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)),$$

$$C_{p,\alpha}(n, s) = C(\mathcal{P}_n, (-G_\alpha)^s, L^p_{w_\alpha}([-1, 1]))$$

и аналогично для нормированных весов и точечных констант. Справедливы следующие утверждения о взаимосвязи этих констант.

Предложение 1 ([9]). *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $s \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{S}^d$. Тогда*

$$\sup\left|\sum_{j=0}^{n}(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^s\widehat{g}_j\widetilde{Z}^\kappa_j(x_0, x_0)\right| \leqslant \widehat{C}_{p,\kappa}(d, n, s) \leqslant \sup\left|\sum_{j=0}^{n}(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^s\widehat{g}_j\right| = \widehat{C}^{(1)}_{p,\alpha_\kappa}(n, s) = \widehat{C}_{p,\alpha_\kappa}(n, s),$$

где супремумы берутся по всем полиномам $g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R^{(\alpha_\kappa)}_n(t) \in \mathcal{P}_n$ с нормой $\|g\|_{p,\widehat{w}_{\alpha_\kappa}} = 1$. В частности, для $\kappa \equiv 0$ имеем

$$\widehat{C}_{p,0}(d, n, s) = \widehat{C}_{p,d/2-1}(n, s).$$

Предложение 2 ([10]). *Пусть $R = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{d+1}\}$, $R_+ = \{e_1, \ldots, e_{d+1}\}$ — единичные орты $\mathbb{R}^{d+1}$, $\kappa(\pm e_j) = \kappa_j \geqslant 0$, $W(R) = \{\pm 1\}^{d+1}$ — группа октаэдра, $v_\kappa(x) = \prod_{j=1}^{d+1} |x_j|^{2\kappa_j}$. Тогда, если $\min\kappa = \min_{j=1,\ldots,d+1}\kappa_j = 0$, то для $p \geqslant 1$*

$$\widehat{C}_{p,\kappa}(d, n, s) = \widehat{C}_{p,\alpha_\kappa}(n, s).$$

Если $s = 0$ и $\min\kappa > 0$, то константы не равны по порядку при больших n.

Было бы интересно свести вычисление многомерной константы к одномерной в общей ситуации. Однако данная проблема видится сложной. Тем не менее важно изучать даже частные варианты. В качестве примера в условиях предложения 2 рассмотрим случай окружности $\mathbb{S}^1$. Не ограничивая общности можно считать, что $k_1 \geqslant k_2$. Положим $x = (\sin\theta, \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Тогда вес $v_\kappa(\theta) = |\sin\theta|^{2\kappa_1}|\cos\theta|^{2\kappa_2}$ и пространство полиномов Π^1_n можно отождествить с множеством комплекснозначных тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_n$ степени не выше n. Возьмем подпространство $Y_{2n} \subset \Pi^1_{2n}$ четных полиномов $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos 2k\theta = T(2\theta)$, $T \in \mathcal{T}_n^{even}$. Нетрудно показать, что

$$\left(\int_0^{2\pi} |T(2\theta)|^p v_\kappa(\theta)\, d\theta\right)^{1/p} = \left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^p w_{\kappa_1-1/2,\kappa_2-1/2}(\theta)\, d\theta\right)^{1/p},$$

где $w_{\alpha,\beta}(\theta) = |\sin \frac{\theta}{2}|^{2\alpha+1} |\cos \frac{\theta}{2}|^{2\beta+1}$ — тригонометрический вес Якоби (см. [7]). Следовательно,

$$C(Y_{2n}, I, L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^1)) = C(\mathcal{T}_n^{even}, I, L^p_{w_{\kappa_1-1/2,\kappa_2-1/2}}(\mathbb{T})). \tag{1}$$

Последняя константа Никольского связана с точными константами для компактных однородных пространств ранга 1 и изучена в работе [7].

2. Асимптотические равенства Левина — Любинского

Большой интерес представляет выяснение поведения констант Бернштейна — Никольского в зависимости от изменения параметров. Типичным результатом в данном направлении является зависимость

$$C_{p,d/2-1}(n,s) \asymp n^{d/p+2s}, \quad n \to \infty,$$

при фиксированных $p > 0$, d и s (см. [13] для $p \geqslant 1$ и [3] для $p < 1$). В случае веса Данкля приведем пример для группы октаэдра, где [4]

$$C(\Pi^d_n, I, L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)) \leqslant C n^{(d_\kappa - 2\min\kappa)/p}, \quad n \to \infty, \quad p \in (0,\infty). \tag{2}$$

Современным направлением теории неравенств Бернштейна — Никольского является уточнение этого асимптотического поведения и доказательство асимптотических равенств типа Левина — Любинского. В частности, в статье [1] доказано, что для $n \to \infty$

$$C_{p,0}(d,n,0) = C(\mathcal{E}^d, I, L^p(\mathbb{R}^d)) n^{d/p}(1+o(1)), \quad p \in (0,\infty),$$

где $\mathcal{E}^d$ — множество целых функций от d переменных экспоненциального сферического типа не выше 1, ограниченных на $\mathbb{R}^d$. В статье [5] рассмотрен случай $s \in \mathbb{Z}_+$ и доказано, что

$$C_{p,0}(d,n,s) = C(\mathcal{E}^d_p, (-\Delta)^s, L^p(\mathbb{R}^d)) n^{d/p+2s}(1+o(1)), \quad p \in [1,\infty],$$

где Δ — оператор Лапласа. Для $p < 1$ и $s \neq 0$ доказательство данного равенства является открытой проблемой.

Для случая веса Данкля в связи с предложением 2 большую роль приобретают результаты для константы $C_{p,\alpha}(n,s)$ с произвольным не обязательно полуцелым α. В частности, в статье [5] также доказано, что для $p \in (0,\infty]$, $\alpha \geqslant -1/2$, $s \in \mathbb{Z}_+$

$$C^{(1)}_{p,\alpha}(n,s) = C^{(0)}(\mathcal{E}^{even}, (-B_\alpha)^s, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)) n^{(2\alpha+2)/p+2s}(1+o(1)), \tag{3}$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}^1$, $B_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{d}{dt}$ — дифференциальный оператор Бесселя. Если $p \geqslant 1$, то точечные и обычные константы Бернштейна — Никольского совпадают и в равенстве (3) можно убрать верхние индексы «(1)» и «(0)». Случаи $p < 1$ и дробных s открыты. Отметим, что для константы Никольского ($s = 0$) другое доказательство асимптотического равенства типа Левина — Любинского (3) с явной оценкой остаточного члена приведено в [12].

Из равенства (3) без индексов и предложения 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *В условиях предложения 2 для $p \in [1,\infty]$, $\alpha \geqslant -1/2$, $s \in \mathbb{Z}_+$ и $n \to \infty$*

$$\widehat{C}_{p,\kappa}(d,n,s) = C_{p,\kappa,s} n^{d_\kappa/p+2s}(1+o(1)),$$

где константа $C_{p,\kappa,s}$ с точностью до множителя совпадает с $C(\mathcal{E}^{even}, (-B_{\alpha_\kappa})^s, L^p_{x^{2\alpha_\kappa+1}}(\mathbb{R}_+))$.

Из равенства (1) и результатов работы [7] можно вывести следующее утверждение для константы Никольского в случае веса Данкля $v_\kappa(\theta) = |\sin\theta|^{2\kappa_1}|\cos\theta|^{2\kappa_2}$.

Следствие 2. *В условиях предложения 2 при $p \in (0,\infty)$ справедливо следующее равенство Левина — Любинского*

$$C^{(0)}(Y_{2n}, I, L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^1)) = C^{(0)}_{p,\kappa_1} n^{(2\kappa_1+1)/p}(1+O(n^{-1})),$$

где предельная константа $C^{(0)}_{p,\kappa_1}$ с точностью до множителя совпадает с константой Никольского $C^{(0)}(\mathcal{E}^{even}, I, L^p_{x^{2\kappa_1}}(\mathbb{R}_+))$. При $p \geqslant 1$ оно верно и для обычных констант Никольского.

Данное утверждение особенно интересно тем, что множитель

$$2\kappa_1 + 1 = d_\kappa - 2\kappa_2 = d_\kappa - 2\min\kappa$$

в степени n согласуется со множителем в оценке (2).

3. Границы L^1-констант Бернштейна — Никольского

В приведенных выше равенствах Левина — Любинского устанавливается взаимосвязь между константой для полиномов высокой степени n и константой для целых функций экспоненциального типа. При этом размерность пространства d и экспонента p фиксируются. Следующий шаг состоит в выяснении поведения предельных констант при больших d и фиксированном p. В этой связи приведем доказанные в [2] границы

$$(1/2)^d \leqslant A_0^{-1}\, C(\mathcal{E}^d, I, L^1(\mathbb{R}^d)) \leqslant (\sqrt{2/e}\,)^{d(1+O(d^{-2/3}))}, \quad d \to \infty, \tag{4}$$

где $\sqrt{2/e} = 0.857\ldots$, $A_0 = \frac{V_d}{(2\pi)^d}$ (индекс «0» нужен для согласования с (5)), V_d — объем единичного шара в $\mathbb{R}^d$. Этот результат имеет интересное приложение для проблемы Ремеза о концентрации нормы [2]. В случае константы для сферических полиномов в работе [1] отмечается связь нижней границы с геометрической проблемой об оценке мощности сферических дизайнов. Представляет интерес обобщить этот результат на случай константы Бернштейна — Никольского в условиях веса Данкля.

Приведем схему получения оценок L^1-констант Бернштейна — Никольского на основе известных оценок L^1-констант Никольского и L^∞-констант Бернштейна. Ограничимся случаем $s = 1$. В силу (3) имеем

$$C_{1,\alpha}(n,2) = C_{\alpha,1} n^{2\alpha+4}(1+o(1)),$$

где

$$C_{\alpha,1} = C^{(0)}(\mathcal{E}^{\mathrm{even}}, (-B_\alpha), L^1_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)).$$

Получим границы $C_{\alpha,1}$ для больших α.

Для большей общности отметим, что константа $C_{\alpha,1}$ связана с константой Бернштейна — Никольского для веса v_κ и лапласиана Δ_κ Данкля на $\mathbb{R}^d$. Вес v_κ определяется как выше с подстановкой d вместо $d+1$. Пусть теперь $d_\kappa = d + 2\sum_{a\in R_+}\kappa(a)$ — размерность Данкля для $\mathbb{R}^d$, $\alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1$, $\omega_\kappa = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} v_\kappa(x)\,dx$. Тогда [11]

$$C_{\alpha_\kappa,1} = \omega_\kappa C(\mathcal{E}^d, (-\Delta_\kappa), L^1_{v_\kappa}(\mathbb{R}^d)).$$

Запишем оценки сразу для обеих констант. Оценку снизу можно получить на неотрицательных функциях. Из результатов работ [6, 8] следует, что

$$\sup_{0\leqslant f\in(\mathcal{E}^d\cap L^1_{v_\kappa}(\mathbb{R}^d))\setminus\{0\}} \frac{\|\Delta_\kappa f\|_\infty}{\|f\|_{1,v_\kappa}} = \frac{A_\kappa}{2^{d_\kappa+1}(d_\kappa+2)},$$

где
$$A_\kappa=\frac{1}{2^{d_\kappa-1}\Gamma(d_\kappa/2)\Gamma(d_\kappa/2+1)\omega_\kappa}. \tag{5}$$

Следствие 3. *Имеем*
$$C_{\alpha_\kappa,1}\geqslant\frac{\omega_\kappa A_\kappa}{2^{d_\kappa+1}(d_\kappa+2)}.$$

Из оценок работы [11] при $p=1$ находим
$$C_{\alpha_\kappa,1}\leqslant\frac{\omega_\kappa A_\kappa}{d_\kappa+2}. \tag{6}$$

Она отличается от нижней оценки из следствия 1 в растущий экспоненциально множитель при больших d_κ.

Уточним границу (6) как это сделано в (4). Для этого применим точное неравенство Бернштейна для лапласиана Данкля [8]
$$\|\Delta_\kappa f\|_\infty\leqslant d_\kappa\|f\|_\infty,\quad f\in\mathcal{E}^d.$$

Отсюда
$$C(\mathcal{E}^d,(-\Delta_\kappa),L^1_{v_\kappa}(\mathbb{R}^d))\leqslant d_\kappa C(\mathcal{E}^d,I,L^1_{v_\kappa}(\mathbb{R}^d)). \tag{7}$$

Несмотря на то, что такая оценка грубая, при больших d_κ она оказывается лучше (6) в убывающий экспоненциально множитель при больших d_κ. Покажем это, следуя [2] в упрощенной форме. Также используем результаты [11].

Для $\alpha=\alpha_\kappa\geqslant-1/2$ имеем
$$\omega_\kappa C(\mathcal{E}^d,I,L^1_{v_\kappa}(\mathbb{R}^d))=C^{(0)}(\mathcal{E}^{\mathrm{even}},I,L^1_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+))=\sup_{\substack{f\in\mathcal{E}^{\mathrm{even}}\\ \|f\|_{1,x^{2\alpha+1}}=1}}f(0)=C^{(0)}_\alpha.$$

Пусть $j_\alpha(x)=(2/x)^\alpha\Gamma(\alpha+1)J_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя, $q_{\alpha,1}<q_{\alpha,2}<\ldots$ — ее положительные нули, $b_\alpha=(2^\alpha\Gamma(\alpha+1))^{-1}$. Для подпространства $Y=\mathcal{E}^{\mathrm{even}}\cap L^1_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)$ функция $K(x)=\frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2}\,j_{\alpha+1}(x)$ является воспроизводящим ядром, поэтому
$$f(0)=\int_{\mathbb{R}_+}f(x)K(x)x^{2\alpha+1}\,dx,\quad f\in Y.$$

Пусть $g\in Y^\perp\subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ — произвольная функция из ортогонального дополнения подпространства Y. Тогда для произвольной функции $f\in Y$
$$f(0)=\int_{\mathbb{R}_+}f(x)K(x)x^{2\alpha+1}\,dx=\frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2}\int_{\mathbb{R}_+}f(x)(j_{\alpha+1}(x)-g(x))x^{2\alpha+1}\,dx$$
$$\leqslant\frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2}\,\|j_{\alpha+1}(x)-g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

Отсюда получаем двойственную оценку
$$C^{(0)}_\alpha\leqslant\frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2}\inf_{g\in Y^\perp}\|j_{\alpha+1}(x)-g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

Для $r\geqslant1$ функция $j_\alpha(rx)$ ортогональна Y, так как интеграл $\int_{\mathbb{R}_+}f(x)j_\alpha(rx)x^{2\alpha+1}\,dx$ является значением преобразования Бесселя функции f в точке r, а по теореме Пэли–Винера оно равно тождественно нулю при $r\geqslant1$. Поэтому для последовательности $r_k=\frac{q_{\alpha+1,k}}{q_{\alpha+1,1}}$ любой сходящийся в $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ ряд Фурье–Бесселя $g(x)=\sum_{k=1}^\infty a_k j_\alpha(r_k x)$ будет принадлежать $Y^\perp$. Следовательно,

$$\inf_{g\in Y^\perp}\|j_{\alpha+1}(x)-g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\leqslant \inf_{a_1,a_2,\ldots\in\mathbb{R}}\Big\|j_{\alpha+1}(x)-\sum_{k=1}^\infty a_k j_\alpha(r_k x)\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}=I_\alpha.$$

Экстремальная задача I_α решена при $\alpha\in\{-1/2\}\cup[-0.272,\infty)$ [2]:

$$I_\alpha=\frac{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} j_{\alpha+1}(x)x^{2\alpha+1}\,dx}{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} x^{2\alpha+1}\,dx}={}_1F_2\Big(\alpha+1;\alpha+2,\alpha+2;-\frac{q_{\alpha+1,1}^2}{4}\Big).$$

Также в [2] проведен асимптотический анализ I_α при больших α, который влечет

$$I_\alpha=(2/e)^{\alpha(1+O(\alpha^{-2/3}))},\quad \alpha\to\infty.$$

Запишем приведенные результаты в виде следующего утверждения.

Предложение 3. *Имеем*

$$C_\alpha^{(0)}\leqslant\frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2}\inf_{g\in Y^\perp}\|j_{\alpha+1}(x)-g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\leqslant\frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2}I_\alpha.$$

Неравенство (7) эквивалентно можно записать в виде $C_{\alpha,1}\leqslant(2\alpha+2)C_\alpha^{(0)}$, поэтому $C_{\alpha,1}\leqslant b_\alpha^2 I_\alpha$. Отсюда и из следствия 1 с учетом (5) приходим к следующему утверждению.

Предложение 4. *Имеем*

$$C_{\alpha_\kappa,1}\leqslant\frac{\omega_\kappa A_\kappa}{d_\kappa}I_{\alpha_k}.$$

При больших α_κ

$$(1/2)^{d_\kappa(1+o(1))}\leqslant(\omega_\kappa A_\kappa)^{-1}C_{\alpha_\kappa,1}\leqslant(\sqrt{2/e}\,)^{d_\kappa(1+o(1))}.$$

4. Вывод асимптотической оценки I_α

Решение задачи I_α, приведенное в [2], достаточно сложно технически и использует многочисленные свойства функции Бесселя, в том числе новые. При этом случай $\alpha\in(-0.5,-0.272)$ остается открытым.

Однако для доказательства верхней асимптотической оценки L^1-константы Бернштейна — Никольского в предложении 4 достаточно показать, что

$$I_\alpha\leqslant(2/e)^{\alpha(1+o(1))},\quad \alpha\to\infty. \tag{8}$$

Данное неравенство может быть доказано достаточно просто. Сделаем это для полноты изложения.

Решение задачи I_α использует тот факт, что система функций Бесселя $\{j_\alpha(r_k x)\}_{k=1}^\infty$ образует ортогональный базис в пространстве $L^2_{x^{2\alpha+1}}([0,q_{\alpha+1,1}])$. Отсюда следует, что нормированная функция Бесселя $j_{\alpha+1}(x)$ на отрезке $[0,q_{\alpha+1,1}]$ может быть разложена в ряд Фурье–Бесселя

$$j_{\alpha+1}(x)=a_0^*+\sum_{k=1}^\infty a_k^* j_\alpha(r_k x),\quad x\in[0,q_{\alpha+1,1}], \tag{9}$$

где

$$a_0^*=\frac{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} j_{\alpha+1}(x)x^{2\alpha+1}\,dx}{\int_0^{q_{\alpha+1,1}} x^{2\alpha+1}\,dx}.$$

Ряд $g_*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* j_\alpha(r_k x)$ продолжается на всю полуось. Пользуясь разложением (9) несложно показывается (см. [2]), что

$$a_0^* \leqslant I_\alpha \leqslant \|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)},$$

причем здесь $\|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)\|_{L^\infty([0,q_{\alpha+1,1}])} = a_0^*$.

Основная сложность при решении I_α состояла в установлении неравенства

$$|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)| \leqslant a_0^*, \quad x > q_{\alpha+1,1}.$$

Однако для доказательства (8) достаточно использовать более простую оценку. Используя известные свойства нормированной функции Бесселя, включая невозрастание последовательных модулей локальных экстремумов, показывается, что при $x > q_{\alpha+1,1}$

$$|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)| \leqslant |j_{\alpha+1}(x) - a_1^* j_\alpha(x)| + a_0^* - a_1^* |j_\alpha(q_{\alpha+1,1})|. \tag{10}$$

Далее в статье [2] начинается сложная часть, заключающаяся в доказательстве неравенства $|j_{\alpha+1}(x) - a_1^* j_\alpha(x)| \leqslant a_1^* |j_\alpha(q_{\alpha+1,1})|$ при $\alpha \geqslant -0.272$. Однако оценку (10) можно просто продолжить как

$$|j_{\alpha+1}(x) - g_*(x)| \leqslant |j_{\alpha+1}(x)| + a_1^* |j_\alpha(x)| + a_0^* - a_1^* |j_\alpha(q_{\alpha+1,1})| \leqslant |j_{\alpha+1}(x)| + a_0^* \leqslant |j_{\alpha+1}(q_{\alpha+2,1})| + a_0^*.$$

Для больших α

$$a_0^* \sim 4|j_\alpha(q_{\alpha+1,1})| = (2/e)^{\alpha(1+o(1))}$$

и $|j_{\alpha+1}(q_{\alpha+2,1})| \sim (2/e)|j_\alpha(q_{\alpha+1,1})|$. Отсюда получаем (8):

$$I_\alpha \leqslant \Big(1 + \frac{1}{2e}\Big) a_0^* (1 + o(1)) = (2/e)^{\alpha(1+o(1))}.$$

5. Проблема Ремеза для L^1-нормы

Верхние оценки L^1-констант Бернштейна — Никольского имеют интересное приложение в проблеме Ремеза о концентрации L^1-нормы функции $f \in Y$ (см. [2]). Данная проблема заключается в ответе на вопрос, сколь малой может быть мера $|E|$ измеримого множества $E \subset X$, для которого найдется функция $f \in Y$, такая что

$$\rho \int_X |f(x)| v(x)\, dx \leqslant \int_E |f(x)| v(x)\, dx, \tag{11}$$

где фиксированный параметр $\rho \in (0,1)$.

Известен следующий подход получения нижней оценки $|E|$ (см., например, [14]. При помощи точного неравенства Никольского получаем

$$\int_E |f(x)| v(x)\, dx \leqslant |E|\, \|f\|_\infty \leqslant |E| C(Y, I, L_v^1(X)) \|f\|_{1,v}.$$

Отсюда и из (11) находим

$$|E| \geqslant \frac{\rho}{C(Y, I, L_v^1(X))}.$$

Для продолжения этой оценки можно использовать верхние оценки константы Никольского.

Например, предложения 3 влечет следующее утверждение.

Следствие 4. *Для $\alpha \geqslant -1/2$ и подпространства $Y = \mathcal{E}^{even} \cap L^1_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)$ мера множества $E \subset \mathbb{R}_+$ в неравенстве* (11) *оценивается снизу как*

$$|E| \geqslant \frac{\rho}{\frac{b_\alpha^2}{2\alpha+2} I_\alpha}.$$

6. Заключение

В проблеме вычисления точных констант Бернштейна — Никольского для сферических полиномов в пространстве L^p с весом Данкля остается много открытых вопросов. На наш взгляд, одна из основных проблем, являющейся камнем преткновения, является ответ на вопрос, можно ли в общей ситуации свести вычисление многомерной константы к нахождению соответствующей одномерной весовой константы. Для начала здесь было бы интересно получить ответ на вопрос в случае группы октаэдра, когда $\min \kappa > 0$. Также интерес случай симметричной группы. В этих случаях полностью или частично известно явное интегральное представление оператора сплетения [4, 15], что может облегчить задачу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, № 1. P. 161–185.

2. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // Journal of Complexity. 2021. Vol. 65. 101553.

3. Dai F., Tikhonov S. Weighted fractional Bernstein's inequalities and their applications // J. d'Anal. Math. 2016. Vol. 129. P. 33–68.

4. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. N.Y.: Springer, 2013.

5. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. II. Invariance theorems and certain multivariate inequalities of different metrics // Constr. Approx. 2019. Vol. 50. P. 543–577.

6. Горбачев Д.В. Константы Никольского–Бернштейна для неотрицательных целых функций экспоненциального типа на оси // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Том 24, № 4. С. 92–103.

7. Горбачев Д.В. Константы Никольского для компактных однородных пространств // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 4. С. 100–113.

8. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Об экстремальных задачах типа Никольского–Бернштейна и Турана для преобразования Данкля // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 394–400.

9. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского–Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4. С. 302–307.

10. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н., Мартьянов И.А. Уточнение константы Бернштейна — Никольского для сферы с весом Данкля в случае группы октаэдра // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 5. С. 354–358.

11. Горбачев Д.В., Иванов В.И. Константы Никольского–Бернштейна для целых функций экспоненциального сферического типа в весовых пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Том 25, № 2. С. 75–87.

12. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

13. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна — Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3 (231). С. 179–180.

14. Temlyakov V., Tikhonov S. Remez-type and Nikol'skii-type inequalities: General relations and the hyperbolic cross polynomials // Constr. Approx. 2017. Vol. 46. P. 593–615.

15. Xu Y. Intertwining operator associated to symmetric groups and summability on the unit sphere // J. Approx. Theory. 2021. Vol. 272. 105649.

REFERENCES

1. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. "Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere", *J. d'Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

2. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2021. "Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials", *Journal of Complexity*, vol. 65, 101553.

3. Dai, F. & Tikhonov, S. 2016. "Weighted fractional Bernstein's inequalities and their applications", *J. d'Anal. Math.*, vol. 129, pp. 33–68.

4. Dai, F. & Xu, Yu. 2013. "Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls", Springer, N.Y.

5. Ganzburg, M.I. 2019. "Sharp constants of approximation theory. II. Invariance theorems and certain multivariate inequalities of different metrics", *Constr. Approx.*, vol. 50, pp. 543–577.

6. Gorbachev, D.V. 2018. "Nikolskii–Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 24, no. 4, 2018, pp. 92–103. (In Russ.)

7. Gorbachev, D.V. 2021. "Nikol'skii constants for compact homogeneous spaces", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 100–113. (In Russ.)

8. Gorbachev, D.V. & Dobrovol'sky, N.N. 2019. "Extremal Nikolskii–Bernstein- and Turán-type problems for Dunkl transform", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 394–400. (In Russ.)

9. Gorbachev, D.V. & Dobrovol'skii, N.N. 2020. "Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307. (In Russ.)

10. Gorbachev, D.V., Dobrovol'skii, N.N. & Martyanov, I.A. 2021. "Refinement of Bernstein–Nikolskii constant for the sphere with Dunkl weight in the case of octahedron group", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 5, pp. 354–358. (In Russ.)

11. Gorbachev, D.V. & Ivanov, V.I. 2019. "Nikol'skii–Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 25, no. 2, pp. 75–87. (In Russ.)

12. Gorbachev, D.V., & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

13. Ivanov, V.A. 1983. "On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1", *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.

14. Temlyakov, V. & Tikhonov, S. 2017. "Remez-type and Nikol'skii-type inequalities: General relations and the hyperbolic cross polynomials", *Constr. Approx.*, vol. 46, pp. 593–615.

15. Xu, Y. 2021. “Intertwining operator associated to symmetric groups and summability on the unit sphere”, *J. Approx. Theory*, vol. 272, 105649.

Получено: 5.10.2022
Принято в печать: 22.12.2022