

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-38-44

О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел¹

А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет имени Алламе Табатабаи (Иран).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказана теорема о разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел. Особое внимание обращено на “явные формулы” и условия единственности таких представлений. Здесь найдено, что последовательность остатков в этом разложении имеет равномерное распределение. Данное утверждение обобщает известный результат Харди–Литтлвуда для позиционных систем счисления. В основе доказательства лежат два утверждения: критерий Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю единица и теоретико-вероятностная лемма Бореля–Кантелли.

Ключевые слова: мультипликативная система чисел, разложение действительного числа в этой системе, последовательность остатков, равномерное распределение остатков, критерий Г.Вейля, лемма Бореля–Кантелли.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О равномерном распределении остатков в разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 38 – 44.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 5.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-38-44

On the uniform distribution of remainders in the expression of real numbers over a multiplicative system numbers

A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).

e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper theorems on the expression of real numbers on multiplicative number system. It pay a special attention to “explicit formulas” and conditions of the uniqueness of such representations. Here is found that the sequence remainders in this expansion has the uniform distribution. The given statement generalises the known result of Hardy–Littlewood for a positional system of calculus. On the base of proof lie two statement: the Weyl’s criteria of the uniform distribution of a sequence modulo unit and the theoretic-probability lemma of Borel–Cantelli.

Keywords: multiplicative number system, real number expansion on this system, the sequence of remainders, the uniform distribution of remainders, G.Weyl criteria, lemma of Borel–Cantelli.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov, 2022, “On the uniform distribution of remainders in the expression of real numbers over a multiplicative system numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 38 – 44.

Введение

В настоящей статье дано обобщение известной теоремы Харди–Литтлвуда (1914) о равномерном распределении последовательности остатков вида

$$x_n = x_n(\alpha) = \{q^{n-1}\alpha\}$$

в q -ичном разложении почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел α , где $q > 1$ — натуральное число.

1. Методы исследования

В основе исследования лежат критерий Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю единица и теоретико-вероятностная лемма Бореля–Кантелли.

2. Формулировка основных результатов

Основная теорема. Для почти всех действительных чисел a из полуинтервала $[0, 1)$ (в смысле меры Лебега) последовательность $x_n = \{q_n q_{n-1} \dots q_1 a\}$ равномерно распределена по модулю единицы, где $q_k \geq 2, k \geq 1$ — последовательность натуральных чисел.

Последовательность $x_n = x_n(a)$ представляет собой последовательность остатков в разложении числа a по мультипликативной системе чисел. Определения даны в следующем параграфе.

3. Разложение действительных чисел по мультипликативной системе чисел

3.1. Разложение натуральных чисел. Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $q_k \geq 2, k \geq 1$. Определим мультипликативную систему натуральных чисел $m_k, k \geq 0$, вида

$$m_0 = 1, m_k = m_{k-1} q_k, k \geq 1. \quad (1)$$

Любое натуральное число $a \geq 1$ единственным образом представимо в виде

$$a = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k m_k, 0 \leq \bar{a}_k \leq q_k - 1,$$

где $\bar{a}_k$ — целые, а число n определяется из условий $m_n \leq a < m_{n+1}$.

При $k \geq 0$ положим

$$\bar{a}_k = \left[\frac{a}{m_k} \right] - q_{k+1} \left[\frac{a}{m_{k+1}} \right].$$

3.2. Разложение действительных чисел. Рассмотрим теперь a — любое действительное число из полуинтервала $[0, 1)$. Говорят, что число a представимо в виде ряда

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{m_k}, 0 \leq \bar{a}_k \leq q_{k+1} - 1, \quad (2)$$

где при $k \geq 0$ числа $\bar{a}_k$ — целые и $\bar{a}_0$ могут принимать два значения либо 0, либо 1, причем для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$a - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k} < m_n^{-1}. \quad (3)$$

Теорема 1. Любое действительное число единственным образом представимо в виде (2) и (3).

Доказательство см. [1], теорема 1.

3.3. Остатки в разложении действительных чисел. Определим при $n \geq 1$ последовательность $\{x_n\}$. Положим

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{a}_k}{m_k} + \frac{x_n}{m_n}, 0 \leq x_n < 1, \bar{a}_0 = 0.$$

Для любого $n \geq 1$ находим

$$\frac{\bar{a}_n}{m_n} + \frac{x_n}{m_n} = \frac{x_{n-1}}{m_{n-1}}, \bar{a}_n + x_n = q_n x_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\bar{a}_n = [q_n x_{n-1}], x_n = \{q_n x_{n-1}\}.$$

Отсюда получим

$$x_n = \{q_n q_{n-1} \dots q_1 a\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любых натуральных чисел m и n и любого действительного числа α из промежутка $[0, 1)$ справедливо тождество

$$\{m\{n\alpha\}\} = \{mn\alpha\}.$$

3.4. Законы распределения остатков в разложении действительных чисел. Далее пусть число a , $0 \leq a < 1$, представимо в виде (2) и (3), и пусть при $0 \leq t < 1$ определена периодическая функция $\chi_t(x+1) = \chi_t(x)$ вида

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < t, \\ 0, & \text{если } t \leq x < 1. \end{cases}$$

Тогда число $P(N; t)$ членов последовательности $x_n = x_n(a)$, $n \leq N$, лежащих в полуинтервале $[0, t)$ равно

$$P(N; t) = \sum_{k=1}^N \chi_t(x_k).$$

Если же существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P(N; t)}{N} = \sigma(t),$$

то функция $\sigma(t)$ называется законом распределения последовательности $\{x_n\}$. Тогда для любого действительного числа t справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(\alpha) d\alpha &= \int_0^1 d\sigma(\alpha), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (P_n(\alpha) - \sigma(t))^2 d\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n^2(\alpha) d\alpha - \sigma^2(t). \end{aligned}$$

По лемме Бореля–Кантелли последних двух соотношений обычно достаточно для установления закона распределения последовательности $\{x_n\}$.

В частности, для равномерного распределения последовательности $\{x_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ имеем $\sigma(t) = t$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(\alpha; f) d\alpha = \int_0^1 f(\alpha) d\sigma(\alpha),$$

где

$$P_n(t; f) = \sum_{k=1}^n f(\chi_t(x_k)).$$

3.5. Равномерное распределение остатков в разложении действительных чисел.

Основная теорема. Для почти всех действительных чисел a из полуинтервала $[0, 1)$ (в смысле меры Лебега) последовательность $x_n = \{q_n q_{n-1} \dots q_1 a\}$ равномерно распределена по модулю единица, где $q_k \geq 2$, $k \geq 1$ — последовательность натуральных чисел.

Доказательство. Воспользуемся критерием Г.Вейля равномерного распределения последовательности по модулю 1. Положим $Q_n = q_n q_{n-1} \dots q_1$,

$$S_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i h Q_k a},$$

где $h \neq 0$ — любое фиксированное целое число.

Тогда условие равномерной распределенности последовательности x_n по модулю 1 эквивалентно тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = 0.$$

Далее, имеем

$$\int_0^1 |S_n(a)|^2 da = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^1 e^{2\pi i h (Q_k - Q_l) a} da = \frac{1}{n},$$

поскольку

$$\int_0^1 e^{2\pi i m \alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \neq 0, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отсюда при $n = q^4$ находим, что неравенство $|S_{q^4}| > q^{-1/2}$ справедливо на множестве E_q , мера $\mu = \mu(E_q)$ которого не превосходит q^{-3} . Действительно,

$$\frac{1}{q^4} = \int_0^1 |S_{q^2}(a)|^2 da \geq q^{-1} \mu E_q, \mu E_q \leq q^{-3}.$$

Следовательно, для любого натурального p мера $\mu(E'_p)$ множества $E'_p = \bigcup_{q \geq p} E_q$ не превосходит

$$\mu(E'_p) \leq \sum_{q=p}^{\infty} \mu(E_q) \leq \sum_{q=p}^{\infty} q^{-3} \leq p^{-3} + \int_p^{\infty} \frac{dt}{t^3} = p^{-3} + 2p^{-2} \leq 3p^{-2}.$$

Стало быть, множество $E' = \bigcap_{p=1}^{\infty} E'_p$ имеет меру нуль. Это и доказывает теорему 2.

4. Обсуждение результатов

А.О.Гельфонд обобщил теорему Харди–Литтлвуда на $q = \theta$ -ичные разложения, $\theta > 1$ и нашел закон распределения последовательности остатков при произвольном нецелом θ для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел α из промежутка $[0, 1)$. А.О.Гельфонд также нашел интересные свойства закона распределения в случае, когда θ является числом Пизо–Виджаярагхавана.

5. Заключение

Предполагается продолжить исследования законов распределения остатков в других системах счисления, в частности, связанных со специальными алгебраическими числами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., 1914, **37**.
2. Borel E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.// Rend. Circolo math. Palermo, 1909, **27**.
3. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления// Изв. АН СССР, сер. матем (in Russian). 1959, **23** (Избр.тр. с.366-371).
4. Zeckendorf E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). 1972, **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washington. 1919. Ch.17.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. 2006. 640 с.
7. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 212 с.
8. Холл М. Комбинаторика. — М.: Изд-во “Мир”. 1970. 424 с.
9. Бернулли Д.// Comment. Acad.Sci. Petrop., 1728, **3**, p. 85–100.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования, т.1. Основные алгоритмы, 3-е изд. Уч. пособие. — М.: Изд. дом “Вильямс”. 2000. 720 с.
11. de Moivre A.// Philos. Trans., 1722, **32**, p. 162–178.
12. Чебышев П. Л. Теория вероятностей. — Изд-во АН СССР. 1936, §23. с.143–147.
13. Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947.
14. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и приложения. — М.: Наука, 1987, 344 с.
15. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: ООО“Луч”, 2014, 224 с.
16. Ghyasi A. H. A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. 2007, **14**, No.3, p.370.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. (1914). The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., **37**.
2. Borel E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.// Rend. Circolo math. Palermo, **27**.
3. Gel'fond A. O. (1959). On one general property of numerical system// Izv. AN SSSR, Ser. math. (in Russian). **23** (Selected works. p.366-371).
4. Zeckendorf E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. (1919). History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washington. Ch.17.

6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. (2006). Lectures on mathematical analysis. — M.: Drofa. Pp. 640.
7. Cassels J. W. S. (1961). An introduction to Diophantine approximation. — Cambridge University Press. Pp. 212.
8. Hall M., Jr. (1970). Combinatorial theory. — Waltham (Massachusetts)-Toronto-London: Blaisdell Publ. Comp. Pp. 424.
9. Bernoulli D. (1728). Combinatorial theory. // Comment. Acad. Sci. Petrop., **3**, p. 85–100.
10. Knuth D. E. (1998). The art computer programming. Fundamental algorithms. Third Ed. — Reading, Massachusetts-Harlow, England-Menlo Park, California-Berkley, California-Lon Mills, Ontario-Sidney-Bonn-Amsterdam-Tokyo-Mexico City: Addison Wesley Longman, Inc.. Pp. 720.
11. de Moivre A. (1722). // Philos. Trans., **32**, p. 162–178.
12. Chebyshev P. L. (1936). The theory of probabilities. — AN SSSR. §23. 143–147. (in Russian).
13. Landau E. (1947). Fundamentals of analysis. — M.: Inostr. literature. (in Russian).
14. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. (1987). Series and the Uolsh's transformations: the theory and applications. — M.: Nauka, pp. 344. (in Russian).
15. Mineev M. P., Chubarikov V. N. (2014). Lectures on arithmetical questions of cryptography. — M.: ООО“Luch”, pp. 224. (in Russian).
16. Ghyasi A. H. (2007). A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems // Russian Journal of Mathematical Physics. **14**, No.3, p.370.

Получено: 18.09.2022

Принято в печать: 22.12.2022