ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 5.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-20-37

О критических решетках единичного шара[1]

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

История вопроса вычисления и оценки постоянной Эрмита насчитывает два столетия. В данной статье дается краткий обзор истории этой задачи. Также эта проблема рассматривается с точки зрения критических решеток единичного шара.

Данная задача берет свое начало с работ Ж. Л. Лагранжа, Л. А. Зеебера и К. Ф. Гаусса. Разрабатывая теорию приведения положительно определенных квадратичных форм, ими были получены предельные формы, для которых отношение минимального значения этих форм в целых точках, отличных от 0, к их определителю было максимально.

В середине XIX века Ш. Эрмитом была получена оценка этой величины для произвольной размерности. А в конце XIX века А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым был предложен новый метод приведения квадратичных форм, который позволил получить точные значения постоянной Эрмита вплоть до размерности 8.

В данной работе будет рассматриваться эквивалентная постоянной Эрмита величина – критический определитель единичного шара. Следует отметить тесную связь этих величин с другими задачами геометрии чисел, например, задачами нахождения плотности наилучшей упаковки, поиска кратчайшего вектора решетки и диофантовыми приближениями. Мы приведем критические решетки размерностей до 8, а также рассмотрим их некоторые метрические свойства.

Ключевые слова: критические определители, решетки, минимумы положительно определенных квадратичных форм.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов. О критических решетках единичного шара // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 20–37.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ на развитие молодежных лабораторий, в рамках реализации ТГПУ им. Л. Н. Толстого программы «Приоритет 2030» по Соглашению №073-03-2022-117/7 по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 5.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-20-37

On critical lattices of the unit sphere

Yu. A. Basalov

Basalov Yurij Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Abstract

The history of the problem of calculating and estimating the Hermite constant has two centuries. This article provides a brief overview of the history of this problem. Also, this problem is considered from the point of view of critical lattices of the unit sphere.

This problem begans from the works of J. L. Lagrange, L. A. Seeber and K. F. Gauss. While developing the theory of reduction of positive definite quadratic forms, they obtained limit forms for which the ratio of the minimum value of these forms at integer points other than 0 to their determinant is maximal.

In the middle of the 19th century, Sh. Hermit obtained an estimate for this quantity for an arbitrary dimension. And at the end of the 19th century, A. N. Korkin and E. I. Zolotarev proposed a new method for reducing quadratic forms, which made it possible to obtain exact values of the Hermite constant up to dimension 8.

In this paper, we will consider a quantity equivalent to the Hermite constant, the critical determinant of the unit sphere. It should be noted that these quantities are closely connected with other problems in the geometry of numbers, for example, the problems of finding the density of the best packing, finding the shortest lattice vector, and Diophantine approximations. We present critical lattices of dimensions up to 8 and consider some of their metric properties.

Keywords: critical determinants, lattices, minimum of positive definite quadratic forms.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, 2022, “On critical lattices of the unit sphere”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 20–37.

1. Введение

Теория приведения определенных квадратичных форм – это чисто вещественная теория, целью которой является выбрать из бесконечного множества форм, цело эквивалентных данной форме, одну, характеризуемую некоторым внутренним образом [7]. В работах Ж. Л. Лагранжа (1768 г. [19]) была построена теория приведения положительно определенных форм двух переменных. А именно, был исследован вопрос о приведении положительно определенных форм вида

$$f(x_1, x_2) = f_{1,1}x_1^2 + 2f_{1,2}x_1x_2 + f_{2,2}x_2^2$$

к виду

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2.$$

Теория приведения бинарных квадратичных форм была позднее развита в работах К. Ф. Гаусса [13] и П. Г. Л. Дирихле [4].

Результаты Ж. Л. Лагранжа и К. Ф. Гаусса позволили ответить на следующий вопрос: чему равно наименьшее значение τ такое, что для любой f справедливо неравенство

$$\min_{(u_1,u_2)\neq(0,0)} f(u_1,u_2) \leq (\tau D)^{1/2},$$

где $D = s_{11}s_{22} - s_{12}^2$ определитель формы f. Из работ Ж. Л. Лагранжа следует, что $\tau_{min} = \frac{4}{3}$.

В 1831 году, Л. А. Зеебером [23] была построена теория приведения для положительно определенных форм трех переменных. А в рецензии на эту работу К. Ф. Гаусса [12] было впервые введено понятие решетки, которое стало центральным понятием геометрии чисел.

Определение 1. *Положительно определенная квадратичная форма f называется предельной, если при произвольных, достаточно малых, отличных от 0, вариациях ее коэффициентов, удовлетворяющих условию, что определитель варьированной формы f^* остается постоянным, значения минимума формы f^* меньше минимума формы f.*

Таким образом, Ж. Л. Лагранжом и Л. А. Зеебером были найдены предельные формы для $n = 2$ и 3. Более обще задачу поиска предельных форм можно сформулировать следующим образом. Пусть

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2$$

– n-мерная положительно определенная квадратичная форма, а ее определитель равен

$$D = \det(s_{ij}) = (\det A)^2,$$

где $A = (a_{ij})$. Пусть [9]

$$\gamma_n = \sup_f \Lambda(f,\mathbb{Z}^n)D^{-1/n},$$

где $\mathbb{Z}^n$ – целочисленная решетка размерности n, а

$$\Lambda(f,\mathbb{Z}^n) = \min_{\overrightarrow{x}\in\mathbb{Z}^n,\overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0}} f\left(\overrightarrow{x}\right).$$

Как отмечалось выше, из результатов Ж. Л. Лагранжа [19] следует, что $\gamma_2 = (4/3)^{1/2}$. А из работы Л. А. Зеебера [23], что $\gamma_3 = 2^{1/3}$.

Позднее Ш. Эрмитом [14, 3] была получена оценка

$$\gamma_n \leq (4/3)^{(n-1)/2},$$

для произвольного n, а γ_n стали называть *постоянной Эрмита*.

Теории приведения положительно определенных квадратичных форм развивались в работах А. Н. Коркина, Е. И. Золотарева [17, 18], Г. Ф. Вороного [27], Г. Минковского [20, 21], Б. А. Венкова [1, 2, 3] и многих других исследователей [10, 11, 15, 24, 25, 26].

Связь с критическим определителем n-мерного шара. Значительный интерес представляет связь постоянной Эрмита с другими вопросами геометрии чисел. Введем некоторые определения

Определение 2. *Пусть $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$\overrightarrow{x} = u_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + u_n\overrightarrow{a_n}$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ называется решеткой Λ. Величина

$$d(\Lambda) = |\det(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n})|$$

называется определителем решетки Λ.

Определение 3. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\overrightarrow{0}$ точек ($\overrightarrow{0} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$-допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

Рассмотрим n-мерный единичный шар K_n

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1.$$

Обозначим его критический определитель как $\Delta(K_n)$, а объем $k_n = V(K_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$. Известно, что [5]

$$\gamma_n = \Delta(K_n)^{-2/n}.$$

Решечатые упаковки. Рассмотрим n-мерную решетку Γ и множество n-мерных шаров одинакового радиуса с центрами в точках решетки. Такое множество образует *упаковку*, если шары не имеют общих внутренних точек. Максимальный радиус шаров называют *радиусом упаковки*, соответствующей решетке Γ и обозначают $r(\Gamma)$. При этом

$$r(\Gamma) = \frac{1}{2}\min\Gamma, \tag{1}$$

где $\min\Gamma$ – длина кратчайшего вектор решетки.

Плотностью решетчатой упаковки называют

$$\delta(\Gamma) = k_n\frac{r^n(\Gamma)}{V(\Gamma)}, \tag{2}$$

где $V(\Gamma)$ - объем основого параллелепипеда решетки, равный $d(\Gamma)$. Плотностью наилучшей решетчатой упаковки называют величину $\delta_n = \sup\limits_{\Gamma}\delta(\Gamma)$. Известно [5], что плотность наилучшей решетчатой упаковки равна

$$\delta_n = \frac{k_n}{2^n\Delta(K_n)}.$$

Тем самым, постоянная Эрмита и плотность наилучшей решетчатой упаковки связаны формулой

$$\delta_n = 2^{-n}k_n\gamma_n^{n/2}.$$

Обширное описание результатов (до 1990 г.) в области решетчатых упаковок можно найти в [8].

Длина кратчайшего вектора решетки Подставив (1) в (2)

$$\frac{\min^n \Gamma}{2^n} = \frac{\delta(\Gamma)V(\Gamma)}{k_n},$$

получим связь длины кратчайшего вектора решетки с постоянной Эрмита

$$\min \Gamma = V(\Gamma)^{1/n} \left(\frac{2^n \delta(\Gamma)}{k_n}\right)^{1/n} \le \Delta(\Gamma)^{1/n} \left(\frac{2^n \cdot 2^{-n} k_n \gamma_n^{n/2}}{k_n}\right)^{1/n} = \gamma_n^{1/2} \Delta(\Gamma)^{1/n}.$$

Диофантовы приближения. Точная нижняя грань величины θ такой, что для вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ существует бесконечно много целых чисел $q, p_1, \ldots, p_n$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} (q\alpha_i - p_i)^2 < \frac{\theta^{1/n}}{q^{1+1/n}}$$

называется константой наилучших диофантовых приближений в евклидовой норме $\theta(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha}$.

Константой наилучших диофантовых приближений в евклидовой норме θ_n называется:

$$\theta_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \theta(\vec{x}).$$

В. Г. Новаком было показано, что [22]

$$\theta_n \le \frac{n^{-n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2} \cdot \Delta(K_{n+1})}.$$

2. Решетки

Будем рассматривать вопрос с точки зрения решеток. Решетка Λ_n определяется матрицей базисных векторов

$$A_n = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Определитель решетки равен $d(\Lambda_n) = \det(A_n) = \det(a_{i,j})$. Решетка не имеет точек внутри K_n (является допустимой для K_n), если для любого целого вектора $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$, отличного от $\overrightarrow{0}$,

$$\left(A_n \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_j\right)^2 \ge 1. \tag{3}$$

Таким образом задача нахождения постоянной Эрмита сводится к минимизации $d(\Lambda_n)$ при условии (3). Решетка с определителем $d(\Lambda_n)$ равным критическому определителю шара K_n, называется критической для шара K_n. Далее, мы будем называть решетку размерности n просто критической, если она является критической для шара K_n.

Рассмотрим альтернативный способ проверки наличия/отсутствия точек Λ_n внутри шара K_n. Преобразуем (3) в квадратичную форму

$$f(b_1, \ldots, b_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{i,i} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f_{i,j} b_i b_j, \qquad f_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j},$$

и сформулируем следующую оптимизационную задачу:

$$F_{min} = f(b_1, \ldots, b_n) \to \min, \qquad \overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{Z}_n, \quad \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}.$$

Если $F_{min} \geq 1$, то решетка Λ_n является допустимой для шара K_n. Отметим также, что

Замечание 1. *Если все $f_{i,j}$ в f целые, и форма f не обращается в 0 в точках отличных от $\overrightarrow{0}$, то $F_{min} \geq 1$.*

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения. Напомним, что

Определение 4. *Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами*

- *существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;*
- *любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.*

Определение 5. *Система из $k \leq n$ линейно независимых точек $\overrightarrow{\alpha}_1, \ldots, \overrightarrow{\alpha}_k$ решетки Λ_n называется примитивной, если все точки пересечения решетки Λ_n и линейного пространства построенного на $\overrightarrow{\alpha}_1, \ldots, \overrightarrow{\alpha}_k$ представимы в виде*

$$u_1\overrightarrow{\alpha}_1 + \ldots + u_k\overrightarrow{\alpha}_k,$$

где $u_1, \ldots, u_k$ целые числа.

Известно, что

Теорема 1. *(см. [5], гл. 1, п. 3) Примитивная система $k \leq n$ линейно независимых точек решетки Λ_n может быть дополнена до базиса решетки Λ_n.*

Лемма 1. *Любое преобразование поворота из $SO(n)$ преобразует критическую решетку Λ_n единичного шара K_n в критическую.*

Доказательство. Поворот критической решетки Λ_n единичного шара K_n описывается линейным преобразованием S, которое задается унимодулярной ортогональной матрицей. Это преобразование S переводит единичный шар K_n в самого себя, поэтому образ решетки Λ_n также является критической решеткой для K_n. $\square$

Теорема 2. *Существует критическая решетка Λ_n единичного шара K_n с базисом, матрица которого (a_{ij}) имеет треугольный вид.*

Доказательство. Для доказательства этого утверждения покажем процесс преобразования произвольной критической решетки единичного шара K_n в решетку, у которой базис имеет матрицу верхнетреугольного вида.

По теореме 1 любую точку критической решетки Λ_n единичного шара K_n, принадлежащую сфере K_n, можно дополнить до базиса решетки Λ_n. Поэтому существует базис критической решетки Λ_n единичного шара K_n модуль хотя бы одного вектора которого равны 1. Пусть это базис задается матрицей

$$A_n = A_n^{(0)} = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

а модуль вектора $|\overrightarrow{a_1}| = 1$.

Произведем поворот решетки Λ_n так, чтобы координаты первого вектора решетки стали равны $\overrightarrow{a_1}^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

Это можно сделать с помощью преобразования поворота S_1, задаваемого ортогональной матрицей с первой строкой $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1}$. Такую матрицу можно получить, дополнив вектор $\overrightarrow{a_1} = (a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})^T$ до ортонормированного базиса размерности n и транспонировав матрицу этого базиса. Пусть эта матрица имеет вид

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ s_{2,1}^{(1)} & s_{2,2}^{(1)} & \ldots & s_{2,n}^{(1)} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ s_{n,1}^{(1)} & s_{n,2}^{(1)} & \ldots & s_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$S_1 \cdot \overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + \ldots + a_{1,n}^2 \\ s_{2,1}^{(1)} a_{1,1} + s_{2,2}^{(1)} a_{1,2} + \ldots + s_{2,n}^{(1)} a_{1,n} \\ \ldots \\ s_{n,1}^{(1)} a_{1,1} + s_{n,2}^{(1)} a_{1,2} + \ldots + s_{n,n}^{(1)} a_{1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

так как в ортогональной матрице скалярное произведение двух любых различных строк равно 0 (это сдедует из того, что для ортогональной матрицы $A \cdot A^T = E$). После применения преобразования S_1, получим решетку $\Lambda_n^{(1)}$ с базисом

$$A_n^{(1)} = S_1 \cdot A_n = \begin{pmatrix} 1 & a_{2,1}^{(1)} & \ldots & a_{n,1}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \ldots & a_{n,2}^{(1)} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & a_{2,n}^{(1)} & \ldots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad a_{i,1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} a_{i,k}, \quad a_{i,j}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} s_{j,k} a_{i,k}, \quad j = \overline{2, n}.$$

Так как S_1 это преобразование поворота, то в силу леммы 1 эта решетка является критической для единичного шара K_n.

Будем далее последовательно строить требуемую решетку (имеющую базис с матрицей верхнетреугольного вида). Рассмотрим базис решетки $\Lambda_n^{(k)}$, полученной на k-ом шаге этого процесса

$$A_n^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2,1}^{(k)} & \ldots & a_{k,1}^{(k)} & a_{k+1,1}^{(k)} & \ldots & a_{n,1}^{(k)} \\ 0 & a_{2,2}^{(k)} & \ldots & a_{k,2}^{(k)} & a_{k+1,2}^{(k)} & \ldots & a_{n,2}^{(k)} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{k,k}^{(k)} & a_{k+1,k}^{(k)} & \ldots & a_{n,k}^{(k)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{n,k+1}^{(k)} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,n}^{(k)} & \ldots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Первые k столбцов матрицы этого базиса образуют верхнетреугольную матрицу. Рассмотрим следующее преобразование S_{k+1}, задаваемое матрицей

$$S_{k+1}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\hdotsfor{8}\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^* b_{k+1}^{(k)} & \lambda_k^* b_{k+2}^{(k)} & \dots & \lambda_k b_n^{(k)}\\
0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^* s_{k+2,k+1}^{(k)} & \lambda_k^* s_{k+2,k+2}^{(k)} & \dots & \lambda_k^* s_{k+2,n}^{(k)}\\
\hdotsfor{8}\\
0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^* s_{n,k+1}^{(k)} & \lambda_k^* s_{n,k+2}^{(k)} & \dots & \lambda_k^* s_{n,n}^{(k)}
\end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_k=\left(\left|\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}\right|^2-\sum_{i=1}^{k}\left(a_{i,k+1}^{(k)}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$\lambda_k^*=\frac{\lambda_k}{\left|\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}\right|},$$

а

$$\begin{pmatrix}
b_{k+1}^{(k)} & b_{k+2}^{(k)} & \dots & b_n^{(k)}\\
s_{k+2,k+1}^{(k)} & s_{k+2,k+2}^{(k)} & \dots & s_{k+2,n}^{(k)}\\
\hdotsfor{4}\\
s_{n,k+1}^{(k)} & s_{n,k+2}^{(k)} & \dots & s_{n,n}^{(k)}
\end{pmatrix},$$

это ортогональная матрица с первой строкой

$$\overrightarrow{b}^{(k)}=\left(b_{k+1}^{(k)},b_{k+2}^{(k)},\dots,b_n^{(k)}\right)=\frac{\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}}{\left|\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}\right|}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}\right|}\left(a_{k+1,k+1}^{(k)},a_{k+1,k+2}^{(k)},\dots,a_{k+1,n}^{(k)}\right).$$

Она получается следующим образом. Берется вектор $\overrightarrow{b}^{(k)}=\left(b_{k+1}^{(k)},b_{k+2}^{(k)},\dots,b_n^{(k)}\right)^T$, дополняется до ортонормированного базиса размерности $n-k$. Матрица этого базиса транспонируется.

Тогда

$$S_{k+1}\cdot\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}=\begin{pmatrix}
a_{k+1,1}^{(k)}\\
\dots\\
a_{k+1,k}^{(k)}\\
\lambda_k^*\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{k+1,i}^{(k)}b_i^{(k)}\right)\\
\lambda_k^*\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{k+1,i}^{(k)}s_{k+2,i}^{(k)}\right)\\
\dots\\
\lambda_k^*\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{k+1,i}^{(k)}s_{n,i}^{(k)}\right)
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
a_{k+1,1}^{(k)}\\
\dots\\
a_{k+1,k}^{(k)}\\
\dfrac{\lambda_k}{\left|\overrightarrow{a_{k+1}}^{(k)}\right|^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_{k+1,i}^{(k)}\right)^2\right)\\
0\\
\dots\\
0
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
a_{k+1,1}^{(k)}\\
\dots\\
a_{k+1,k}^{(k)}\\
\lambda_k\\
0\\
\dots\\
0
\end{pmatrix},$$

$$S_{k+1}\cdot\overrightarrow{a_i}^{(k)}=\begin{pmatrix}a_{i,1}^{(k)}\\ \dots\\ a_{i,i}^{(k)}\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix},\quad i=\overline{1,k},\qquad S_{k+1}\cdot\overrightarrow{a_i}^{(k)}=\begin{pmatrix}a_{i,1}^{(k)}\\ \dots\\ a_{i,k}^{(k)}\\ \lambda_k^*\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}^{(k)}b_j^{(k)}\\ \lambda_k^*\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}^{(k)}s_{2,j}^{(k)}\\ \dots\\ \lambda_k^*\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}^{(k)}s_{n,j}^{(k)}\end{pmatrix},\quad i=\overline{k+2,n}.$$

Таким образом получим новую решетку $\Lambda_n^{(k+1)}$, с базисом

$$A_n^{(k+1)}=S_{k+1}\cdot A_n^{(k)}=\begin{pmatrix}1 & a_{2,1}^{(k)} & \dots & a_{k,1}^{(k)} & a_{k+1,1}^{(k)} & a_{k+2,1}^{(k+1)} & \dots & a_{n,1}^{(k+1)}\\ 0 & a_{2,2}^{(k)} & \dots & a_{k,2}^{(k)} & a_{k+1,2}^{(k)} & a_{k+2,2}^{(k+1)} & \dots & a_{n,2}^{(k+1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{k,k}^{(k)} & a_{k+1,k}^{(k)} & a_{k+2,k}^{(k+1)} & \dots & a_{n,k}^{(k+1)}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k & a_{k+2,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{n,k+1}^{(k+1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+2,n}^{(k+1)} & \dots & a_{n,n}^{(k+1)},\end{pmatrix}$$

у которого первые $k+1$ столбцов образуют верхнетреугольную матрицу. Эта решетка является критической для единичного шара K_n. Отметим, что первые k столбцов матрицы $A_n^{(k+1)}$ совпадают с k первыми столбцами матрица $A_n^{(k)}$. Поэтому

$$a_{i,j}^{(k)}=a_{i,j}^{(k+1)},\quad a_{i,i}^{(k)}=\lambda_i,\quad i=\overline{1,k},\quad j=\overline{1,k}.$$

Повторив эту процедуру для всех k от 1 до $n-1$ мы получим решетку, базис которой имеет матрицу верхнетреугольного вида. Теорема доказана. □

Далее мы будем рассматривать критические решетки базисы которых имеют матрицу треугольного вида.

2.1. Случай $n=2$

Случай $n=2$ подробно рассмотрен в [6]. Несложно показать, что

$$\Delta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.86603,\qquad \Lambda_2=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0 & 0.86603\end{pmatrix},$$

$$f_2(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2,\qquad \gamma_2=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Так как в f_2 все коэффициенты целочисленные, то по замечанию 1 она является допустимой для K_2. Угол между двумя векторами в базисе Λ_2 равен $\pi/3$. Отметим, что решетка с базисом из любых двух единичных вектора под углом $\pi/3$ является критической.

2.2. Случай $n = 3$

В случае размерности $n = 3$ критический определитель имеет значение [6]

$$\Delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70711, \qquad \gamma_3 = \sqrt[3]{2}.$$

Такой определитель можно получить, если добавить к предыдущей критической решетке размерности 2 вектор под углами $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 \\ 0 & 0 & 0.8165 \end{pmatrix}, \quad f_3^{(1)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Если добавить к предыдущей критической решетке вектор под углами $\pi/2$ и $\pi/3$

$$\Lambda_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.57734 \\ 0 & 0 & 0.8165 \end{pmatrix}, \quad f_3^{(2)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Или, если добавить к единичной решетке вектор под углами $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}, \quad f_3^{(3)} = x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Отметим, что две последние решетки эквивалентны с точностью до поворота вокруг 0. Так как все точки в исследуемым нами решетках имеют модуль равный 1, то решетка (с точностью до поворота вокруг 0), определяется взаимоположением этих векторов.

Рассмотрим графы, у которого вершинам соответствуют точки базиса решетки, а ребрам – попарные скалярные произведения различных точек базиса. Графы такого вида полные. Будем рассматривать множество графов, соответствующих исследуемым нами критическим решеткам (далее *множество графов взаиморасположения базисов критических решеток*). При этом изоморфные между собой графы мы будем учитывать как один. Для размерности $n = 2$ это множество состоит из одного графа с ребром $\frac{1}{2}$ (см. рис. 1).

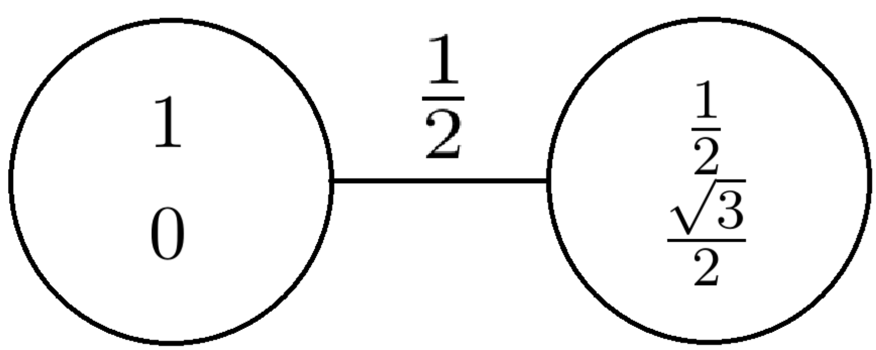

Рис. 1: Граф взаимпорасположения векторов критической решетки размерности 2

Для размерности 3 таких множество состоит из 2-х графов. Они изображены на рисунке 2. Для простоты изложения, будем описывать их матрицей смежности:

$$\Gamma_3^{(1)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_3^{(2)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \end{pmatrix}$$

Заметим, что формы $f_3^{(1)}$, $f_3^{(2)}$ и $f_3^{(3)}$ эквивалентны. Действительно

$$f_3^{(2)} = f_3^{(1)}(x_1, x_2 + x_3, -x_3), \qquad f_3^{(3)} = f_3^{(1)}(-x_1, x_1 + x_3, x_2)$$

Так как любая форма, эквивалентная предельной, также является предельной, то вместо предельных форм обычно рассматривают классы эквивалентности предельных форм. Таким образом, альтернативой подсчета количества решеток выступает подсчет количества классов предельных квадратичных форм. Для размерностей $n = 2$ и 3 существует только один класс предельных форме [9]. Это форма

$$\varphi_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i} x_i x_j.$$

Она является предельной формой для $n \geq 2$ [9].

Наряду с предельными формами рассматривают *совершенные* формы.

Определение 6. *[27] Положительно определенная квадратичная форма, полностью определяемая заданием значения ее арифметического минимума и всех его представлений, называется совершенной.*

В работах А. Н. Коркина и Е. И. Золатарева [18] было показано, что всякая предельная форма является совершенной. Для размерностей $n = 2$ и 3 также существует только один класс совершенных форме [9].

2.3. Случай $n = 4$ и $n = 5$

Значение постоянной Эрмита для $n = 4$ было получено А. Н. Коркиным и Е. И. Золатаревым [16, 17]

$$\gamma_4 = \sqrt{2}$$

В своих работах они предложили метод приведения квадратичных форм произвольной размерности (известный как приведение Коркина-Золатарева), который позволил достичь значительных результатов в задаче вычисления постоянной Эримта для небольших n. Это позволило получить значение постоянной Эрмита для $n = 5$ [18]

$$\gamma_5 = \sqrt[5]{8}$$

Критический определитель размерности $n = 4$ имеет значение

$$\Delta_4 = \frac{1}{2} = 0.5$$

Критическую решетку размерности 4 можно получить, если добавить к критической решетке $\Lambda_3^{(1)}$ вектор под углами $\pi/2$, $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$f_4^{(1)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Другую критическую решетку можно получить, если добавив к единичной решетке вектор под углами $\pi/3$, $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_4^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$f_4^{(2)} = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 4 состоит из 2-х графов:

$$\Gamma_4^{(1)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4^{(2)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Количество классов предельных и совершенных форм размерности 4 равно 2 [9, 17]. Это формы $\varphi_0^{(4)}$ и $\varphi_1^{(n)} = \varphi_0^{(n)} - x_1x_2$. Форма $\varphi_1^{(n)}$ является предельной для $n \geq 4$ [18].

Критический определитель размерности $n = 5$ имеет значение

$$\Delta_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35355$$

Критическую решетку размерности 5 можно получить, если добавить к критической решетке $\Lambda_4^{(1)}$ вектор под углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$ и $\pi/3$

$$\Lambda_5^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.70711 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix}$$

$$f = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4^2 + x_5^2$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 5 состоит из 7-х графов:

$$\Gamma_5^{(1)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_5^{(2)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_5^{(3)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_5^{(4)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_5^{(5)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_5^{(6)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_5^{(7)} = \begin{pmatrix} & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \end{pmatrix}.$$

Количество классов предельных и совершенных форм размерности 5 равно 3 [9, 18]. К формам $\varphi_0^{(n)}$, $\varphi_1^{(n)}$ добавляется форма [18]

$$\varphi_2^{(5)} = \varphi_0^{(5)} - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5).$$

2.4. Случай $n = 6, 7$ и $n = 8$

Развивая идеи А. Н. Коркина и Е. И. Золатарева Г. Ф. Блихфельдтом [11] были получены значения постоянной Эрмита для размерности 6, 7 и 8.

$$\gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}}, \qquad \gamma_7 = \sqrt[7]{64}, \qquad \gamma_8 = 2.$$

Критический определитель размерности $n = 6$ имеет значение

$$\Delta_6 = \frac{\sqrt{3}}{8} = 0.21651$$

Критическую решетку размерности 6 можно получить, если добавить к критической решетке $\Lambda_5^{(1)}$ вектор под углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/3$ и $\pi/3$

$$\Lambda_6 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & -0.40825 & 0 & 0.61237 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.70711 & 0.3535 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.3535 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.61237 \end{pmatrix}$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 6 состоит из 20 графов.

Множества классов предельных и совершенных форм размерности было описано в работе Е. С. Барнса [10]. Они состоят из 7 совершенных и 6 предельных форм.

Критический определитель размерности $n = 7$ имеет значение

$$\Delta_7 = \frac{1}{8} = 0.125$$

Критическую решетку размерности 7 можно получить, если добавить к критической решетке Λ_6 вектор под углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$ и $\pi/3$

$$\Lambda_7 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 & 0.57735 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & 0.40825 & 0.40825 & 0.61237 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0 & 0.3535 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.3535 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.61237 & 0.8165 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57735 \end{pmatrix}$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 7 состоит из 112 графов.

Множества классов предельных и совершенных форм размерности 7 было исследовано и описано в работах [25, 26, 15]. Они состоят из 33 совершенных и 30 предельных форм.

Критический определитель размерности $n = 8$ имеет значение

$$\Delta_8 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

Критическую решетку размерности 7 можно получить, если добавить к критической решетке Λ_7 вектор под углами $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$ и $\pi/3$

$$\Lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86603 & 0.28868 & 0.57735 & 0.57735 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8165 & 0.40825 & 0.40825 & 0.61237 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0 & 0.3535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.70711 & 0.3535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.61237 & 0.57735 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57735 & 0.86603 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Множество графов взаиморасположения базисов критических решеток размерности 8 состоит из 421 графа.

Множества классов предельных и совершенных форм размерности 8 было описано в работе [24]. Они состоят из 10916 совершенных и 2408 предельных форм.

3. Заключение

Задача нахождения постоянной Эрмита имеет богатую историю и имеет тесную связь с другими фундаментальными задачами геометрии чисел, в том числе критическими решетками единичного шара. В данной работе были рассмотрены некоторые метрические свойства критических решеток единичного шара размерности до $n = 8$. Продолжением этих исследований является обобщение полученных результатов на большие размерности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б. А., К работе «О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм», в кн. Г. Ф. Вороной , Собр. соч., том 2, Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
2. Венков Б. А., О приведении положительных квадратичных форм // Изв. АН, серия матем., т. 4, 1940, с. 37–52.
3. Венков Б. А., Элементарная теория чисел. - ОНТИ НКТП СССР, 1937.
4. Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел. - ОНТИ НКТП СССР, 1936.
5. Грубер. П. М., Леккеркеркер. К. Г. Геометрия чисел. – УРСС, 2004.
6. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
7. Касселс Дж. В. С. Рациональные квадратичные формы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.
8. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. – М.: Мир, 1990.
9. Рышков С. С., Барановский Е. П., Классические методы теории решетчатых упаковок // УМН, Т. 34, Вып. 4, 1979, с. 3–63.
10. Barnes E. S., The complete enumeration of extreme senary forms // Phil. Trans. Roy. Soc. London, A-249, 1957, p. 461–506.
11. Blichfeldt H. F., The minimum values of positive quadratic formes in six, seven and eight variables // Math. Z., 39, 1934, p. 1–15.
12. Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел. - Изд-во АН СССР, 1959.
13. Gauss C. F., Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen // Formen von Ludwig August Seeber, Gottingische gelehrte Anzeigen, 1831.

14. Hermite Ch., Lettres de m. Hermite a m. Jacobie sur differemts objets de la theorie des Nombres // J. Reine und Angew. math., 40, 1850, p. 261–315.

15. Jaquet-Chiffelle D.-O., Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7 // Annales de l'Institut Fourier, Vol. 43, 1993, p. 21–55. http://doi.org/10.5802/aif.1320

16. Korkine A., Zolotareff G., Sur les formes quadratiques positives quaternaires // Math. Ann. 5, 1872, p. 581–583.

17. Korkine A., Zolotareff G., Sur les formes quadratiques // Math. Ann. 6, 1873, p. 366–389.

18. Korkine A., Zolotareff G., Sur les formes quadratiques positives // Math. Ann. 11, 1877, p. 242–292.

19. Lagrange J. L., Recherches d'arithmetique, Nouveaux Memoires de 1'Academie royal des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. – Berlin, 1773.

20. Minkowski H., Diskontinuitatsbereich fur arithmetische Aquivalenz // J. Reine und Angew. Math., 129, 1905, p. 220–274.

21. Minkowski H., Cher die positiven quadratischen Formen und liber Rettenbruchanliche // Algorithmen, J. Reine und Angew. Math., 107, 1891, p. 278–279.

22. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. p. 181–197.

23. Seeber L. A., Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen Formen. – Freiburg, 1831.

24. Sikiric M., Schuermann A., Vallentin F., Classification of eight dimensional perfect forms // Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, том 13, 2006, p. 21-32. http://doi.org/10.1090/S1079-6762-07-00171-0.

25. Stacey K. C., The enumeration of perfect septenary forms // J. London Math. Soc., 2, 10, 1975, p. 97–104.

26. Stacey K. C., The perfect septenary forms with $\delta_4 = 2$ // J. Austral. Math. Soc., 22, 2, 1976, p. 144–164.

27. Voronoi G., Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives parfaites // J. Reine und Angew. Math., 133, 1907, p. 97–178.

REFERENCES

1. Venkov B. A. 1952, "To the work "On some properties of positive perfect quadratic forms", in the book. G. F. Voronoi", *Sobr. soch., vol. 2, publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.*

2. Venkov B. A. 1940, "Uber die Reduction positiver quadratischer Formen", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, Vol. 4, 1940, p. 37–52.

3. Venkov B. A. 1937, *Elementary number theory*, ONTI NKTP USSR.

4. Dirichlet P. G. L., 1936, *Lectures on number theory*, ONTI NKTP USSR.

5. Gruber. p. M., Lekkerkerker. C. G. 1987, *Geometry of numbers*, Elsevier Science Publishers.

6. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.

7. Cassels J. W. S. 1982, *Rational quadratic forms*, Mir.

8. Conway J., Slown N., 1990, *Ball packings, lattices, and groups*, Mir.

9. Ryshkov S. S., Baranovskii E. P. 1979, "Classical methods in the theory of lattice packings", *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 34, Issue 4, p. 3-63; *Russian Math. Surveys*, Vol. 34, Issue 4, p. 1-68.

10. Barnes E. S. 1957, "The complete enumeration of extreme senary forms", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A-249, p. 461–506.

11. Blichfeldt H. F., 1934, "The minimum values of positive quadratic formes in six, seven and eight variables", *Math. Z.*, 39, p. 1–15.

12. Gauss C. F. 1831, "Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen", *Formen von Ludwig August Seeber, Gottingische gelehrte Anzeigen.*

13. Gauss C. F. 1959. *Works on the theory of numbers*, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR.

14. Hermite Ch., Lettres de m. Hermite a m. Jacobie sur differemts objets de la theorie des Nombres // J. Reine und Angew. math., 40, 1850, p. 261–315.

15. Jaquet-Chiffelle D.-O., 1993, "Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7", *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 43, p. 21–55. http://doi.org/10.5802/aif.1320

16. Korkine A., Zolotareff G. 1872, "Sur les formes quadratiques positives quaternaires", *Math. Ann.*, 5, p. 581–583.

17. Korkine A., Zolotareff G. 1873, "Sur les formes quadratiques", *Math. Ann.*, 6, p. 366–389.

18. Korkine A., Zolotareff G. 1877, "Sur les formes quadratiques positives", *Math. Ann.*, 11, p. 242–292.

19. Lagrange J. L., 1773, *Recherches d'arithmetique, Nouveaux Memoires de 1'Academie royal des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.*

20. Minkowski H. 1905, "Diskontinuitatsbereich fur arithmetische Aquivalenz", *J. Reine und Angew. Math.*, 129, p. 220–274.

21. Minkowski H., 1891, "Cher die positiven quadratischen Formen und liber Rettenbruchanliche", *Algorithmen, J. Reine und Angew. Math.*, 107, p. 278–279.

22. Nowak W. G. 2016, "Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem", *In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland*, p. 181–197.

23. Seeber L. A., 1831, *Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen Formen*, Freiburg.

24. Sikiric M., Schuermann A., Vallentin F., 2006, "Classification of eight dimensional perfect forms", *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, Vol. 13, p. 21–32. http://doi.org/10.1090/S1079-6762-07-00171-0

25. Stacey K. C., 1975, "The enumeration of perfect septenary forms", *J. London Math. Soc.*, 2, 10, p. 97–104.

26. Stacey K. C., 1976, "The perfect septenary forms with $\Delta_4 = 2$", *J. Austral. Math. Soc.*, 22, 2, p. 144—164.

27. Voronoi G., 1907, "Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives parfaites", *J. Reine und Angew. Math.*, 133, p. 97–178.

Получено: 2.10.2022
Принято в печать: 22.12.2022