ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 5.

УДК 517.968 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19

Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью[1]

С. Н. Асхабов

Асхабов Султан Нажмудинович — доктор физико-математических наук, Чеченский государственный педагогический университет; Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Грозный).
e-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация

С помощью интегрального неравенства, обобщающего, в частности, неравенство Чебышева, в статье получены точные двусторонние априорные оценки решения интегрального уравнения Вольтерра со степенной нелинейностью и ядром общего вида в конусе, состоящем из всех неотрицательных и непрерывных на положительной полуоси функций. На основе этих оценок строится полное метрическое пространство, инвариантное относительно нелинейного интегрального оператора Вольтерра, порожденного данным уравнением, и методом весовых метрик (аналог метода Белицкого) доказывается глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения указанного уравнения. Показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и дана оценка скорости их сходимости в терминах весовой метрики. Показано, что, в отличие от линейного случая, нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Указаны условия, при которых однородное уравнение, соответствующее данному нелинейному интегральному уравнению, имеет только тривиальное решение. Вместе с этим дано уточнение и обобщение некоторых результатов, полученных в случае нелинейных интегральных уравнений с разностными и суммарными ядрами. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, степенная нелинейность, априорные оценки.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
С. Н. Асхабов. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 6–19.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-11-00177).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 5.

UDC 517.968 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19

Volterra integral equation with power nonlinearity

S. N. Askhabov

Askhabov Sultan Nazhmudinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Chechen State Pedagogical University; Kadyrov Chechen State University; Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University) (Grozny).
e-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract

With the help of an integral inequality generalizing, in particular, Chebyshev's inequality, we obtain sharp two-sided a priori estimates for the solution of the Volterra integral equation with a power nonlinearity and a general kernel in a cone consisting of all non-negative and continuous functions on the positive half-axis. On the basis of these estimates, a complete metric space is constructed that is invariant with respect to the nonlinear Volterra integral operator generated by this equation, and a global theorem on the existence, uniqueness, and method of finding a solution to the indicated equation is proved by the method of weighted metrics (analogous to the Belitsky method). It is shown that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and an estimate is given for the rate of their convergence in terms of the weight metric. It is shown that, in contrast to the linear case, the nonlinear homogeneous Volterra integral equation, in addition to the trivial solution, can also have a nontrivial solution. Conditions are indicated under which the homogeneous equation corresponding to a given nonlinear integral equation has only a trivial solution. At the same time, a refinement and generalization of some results obtained in the case of nonlinear integral equations with difference and sum kernels is given. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: Volterra integral equation, power nonlinearity, a priori estimates.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
S. N. Askhabov, 2022, "Volterra integral equation with power nonlinearity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 6–19.

1. Введение

В ряде работ [1-8] и других (подробнее см. монографии [9], [10]) методом весовых метрик были изучены нелинейные интегральные уравнения Вольтерра с разностными и суммарными ядрами

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x+t)u(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \tag{2}$$

в конусе Q, состоящем из неотрицательных и непрерывных на положительной полуоси функций. Такие уравнения возникают при описании различных процессов, изучаемых в гидроаэродинамике, а также в теории переноса тепла излучением, в моделях популяционной генетики и других [11-14], при этом особый интерес представляют положительные при $x > 0$ решения из Q.

В данной работе изучается нелинейное уравнение с ядром общего вида

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt + f(x), \qquad \alpha > 1, \qquad x \geq 0 \tag{3}$$

в конусе

$$Q_0 = \{u(x) : u(x) \in C[0,\infty),\ u(x) > 0 \ \text{ при } \ x > 0\},$$

что связано, в частности, с указанными выше приложениями.

Исследование основано на аналоге метода Белицкого (см., например, [15, с. 153]), так называемом методе весовых метрик, который, в отличие от метода Белицкого, не предполагает выполнение условия Липшица и основан на двусторонних априорных оценках решения, играющих важную при применении этого метода к уравнениям вида (1)-(3).

2. Априорные оценки решения

Выясним сначала какими свойствами заведомо должно обладать решение уравнения (3), если оно существует. Всюду ниже на ядро $K(x,t)$ и неоднородность $f(x)$ накладываются следующие основные ограничения:

1) $K(x,t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq x$ и непрерывна по совокупности переменных вместе со своей производной по первой переменной x, причем $K'_x(x,t) \geq 0$;

2) $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, непрерывна и не убывает на $[0,\infty)$.

Далее нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть функция $g(x)$ определена на $[0,\infty)$, а функция $H(x,t)$ определена при $0 \leq t \leq x$ и непрерывна по совокупности переменных вместе со своей производной $H'_x(x,t)$. Если $H'_x(x,t) \geq 0$ и $g(x)$ не убывает, то для любого $x \geq 0$ выполняется неравенство*:

$$\int_0^x H(x,t)g(t)dt \leq \int_0^x \left[H(t,t) + \int_0^t H'_t(t,s)ds\right] g(t)dt. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим на полуоси $[0,\infty)$ функцию

$$\phi(x) = \int_0^x H(x,t)g(t)dt - \int_0^x \left[H(t,t) + \int_0^t H'_t(t,s)ds\right] g(t)dt.$$

Из условий леммы следует, что

$$\phi'(x) = \int_0^x H'_x(x,t)g(t)dt + H(x,x)g(x) - \left[H(x,x) - \int_0^x H'_x(x,s)ds\right] g(x) =$$

$$= \int_0^x H'_x(x,t)[g(t) - g(x)]dt \leq 0,$$

так как подынтегральное выражение не положительно. Значит, функция $\phi(x)$ не возрастает на полуоси $[0,\infty)$. Но тогда $\phi(x) \le \phi(0) = 0$ для любого $x \ge 0$, что равносильно выполнению неравенства (4).

Заметим, что из леммы 1 вытекает интегральное неравенство Чебышева [16, с. 120]

$$\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt \le \int_0^x f(t)g(t)\,dt, \tag{5}$$

и неравенство [14, с. 1211]

$$\int_0^x f(x+t)g(t)\,dt \le \int_0^x [2f(2t) - f(t)]g(t)\,dt, \tag{6}$$

которые справедливы для любых неубывающих на $[0,\infty)$ функций $f(x)$ и $g(x)$.

Кроме того, неравенство (4) обращается в равенство, если $g(x)$ есть константа, т.е.

$$\int_0^x H(x,t)\,dt = \int_0^x \left[H(t,t) + \int_0^t H'_t(t,s)ds\right]\,dt. \tag{7}$$

Для доказательства равенства (7) достаточно заметить, что производные левой и правой частей равенства (7) совпадают и эти части обращаются в нуль при $x = 0$.

Из равенства (7) вытекает, в частности, равенство [14]

$$\int_0^x f(x+t)\,dt = \int_0^x [2f(2t) - f(t)]\,dt, \tag{8}$$

справедливое для любой интегрируемой на полуоси $[0,\infty)$ функции $f(x)$.

Обратим внимание на то, что подынтегральные функции в правых частях соотношений (4)-(8) не зависят от переменной x, что важно для приложений (см., например, доказательства нижеследующих теорем 1-3).

С помощью леммы 1 доказывается следующая основная теорема данного пункта.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1), и $u \in Q$ есть решение уравнения (3). Если $\alpha > 0$, то $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, а если $\alpha > 1$, то для любого $x \in [0,\infty)$ выполняются неравенства:*

$$L(x) \le u(x) \le R(x), \tag{9}$$

где

$$L(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x K(t,t)dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{1/(\alpha-1)},$$

$$R(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x K(x,t)dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Доказательство. Из условия 1) следует, что функция $K(x,t)$ не убывает по x равномерно относительно t. Поэтому, с учетом условия 2), для любых $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ таких, что $x_1 < x_2$, используя тождество (3), для любого $\alpha > 0$ получаем

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int_0^{x_1} [K(x_2,t) - K(x_1,t)]u(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} K(x_2,t)u(t)dt + f(x_2) - f(x_1) \ge 0,$$

т.е. решение уравнения (3) $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$.

Докажем теперь последовательно оба неравенства из (9) при условии, что $\alpha > 1$. Так как функция $f(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то, по теореме Лебега, она почти всюду дифференцируема на этой полуоси, причем

$$\int\limits_0^x f'(t)\,dt \le f(x) - f(0).$$

Используя это неравенство и условие 1), из тождества (3), получаем

$$u^\alpha(x) \ge \int\limits_0^x K(t,t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x f'(t)\,dt + f(0),$$

или

$$u(x) \ge \left(\int\limits_0^x [K(t,t)u(t)\,dt + f'(x)]\,dt + f(0)\right)^{1/\alpha}. \tag{10}$$

Используя неравенство (10), для почти всех $t \in [0,\infty)$ имеем

$$K(t,t)u(t) + f'(t) \ge K(t,t)\left(\int\limits_0^t [K(s,s)u(s)\,ds + f'(s)]\,ds + f(0)\right)^{1/\alpha} + f'(t),$$

откуда, с учетом, что $f'(t) \ge 0$, получаем

$$\frac{K(t,t)u(t) + f'(t)}{\left(\int\limits_0^t [K(s,s)u(s)\,ds + f'(s)]\,ds + f(0)\right)^{1/\alpha}} \ge K(t,t).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, имеем

$$\left(\int\limits_0^x [K(s,s)u(s)\,ds + f'(s)]\,ds + f(0)\right)^{(\alpha-1)/\alpha} - [f(0)]^{(\alpha-1)/\alpha} \ge \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K(t,t)\,dt$$

или

$$\left(\int\limits_0^x [K(t,t)u(t)\,dt + f'(t)]\,dt + f(0)\right)^{1/\alpha} \ge \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K(t,t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{1/(\alpha-1)} \tag{11}$$

для любого $x \in [0,\infty)$. Таким образом, оценка $u(x) \ge L(x)$ является прямым следствием неравенств (10) и (11).

Докажем, наконец, неравенство $u(x) \le R(x)$. Так как $u(x)$ не убывает и $K'_x(x,t) \ge 0$, то в силу неравенства (4) из тождества (3) получаем:

$$u^\alpha(x) \le \int\limits_0^x r(t)u(t)dt + f(x)$$

где

$$r(t) = K(t,t) + \int\limits_0^t K'_t(t,s)ds.$$

Значит
$$u(x) \le \left(\int\limits_0^x r(t)u(t)\,dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого} \quad x \ge 0. \tag{12}$$
В силу неравенства (12) для почти всех $t \in [0,\infty)$ имеем
$$r(t)u(t) + f'(t) \le r(t) \left(\int\limits_0^t r(s)u(s)\,ds + f(t) \right)^{1/\alpha} + f'(t),$$
откуда
$$\frac{r(t)u(t)+f'(t)}{\left(\int\limits_0^t r(s)u(s)\,ds + f(t) \right)^{1/\alpha}} \le r(t) + \frac{f'(t)}{\left(\int\limits_0^t r(s)u(s)\,ds + f(t) \right)^{1/\alpha}} = r(t) + I(t), \tag{13}$$
где
$$I(t) = f'(t) \left(\int\limits_0^t r(s)\cdot u(s)\,ds + f(t) \right)^{-1/\alpha}.$$

Так как (см. неравенство (11) в [14])
$$\int\limits_0^x I(t)dt \le \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right), \quad \forall x > 0,$$
то, проинтегрировав неравенство (13) в пределах от 0 до x, получим
$$\left(\int\limits_0^x r(s)u(s)\,ds + f(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \le$$
$$\le \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\int\limits_0^x r(t)\,dt + \frac{\alpha}{\alpha-1}\left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) - f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right] \right)$$
или
$$\left(\int\limits_0^x r(t)u(t)\,dt + f(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \le \frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_0^x r(t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x),$$
откуда получаем, что для всех $x \in [0,\infty)$ выполняется неравенство:
$$\left(\int\limits_0^x r(t)u(t)\,dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_0^x r(t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{14}$$
Из неравенств (12) и (14) непосредственно вытекает,что
$$u(x) \le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_0^x r(t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv R(x),$$

поскольку, на основании равенства (7),

$$\int\limits_0^x r(t)\,dt = \int\limits_0^x \left[K(t,t) + \int\limits_0^t K_t'(t,s)\,ds\right]dt = \int\limits_0^x K(x,t)\,dt.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что при $K(x,t) = C_1$ и $f(x) = C_2$, где $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$ есть константы, неравенства в (4) обращаются в тождества и дают решение уравнения (3)

$$u^*(x) = C \cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}[C_1 + C_2]\right)^{1/(\alpha-1)},$$

что свидетельствует о точности полученных в теореме 1 обеих априорных оценок.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает теорема 4.1 из [17], в которой доказано, что *если* $u \in Q_0$ *есть решение уравнения*

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x e^{-2t}\left[\frac{1}{2} + x - t\right]u(t)dt,$$

то

$$\left[\frac{\alpha-1}{4\alpha}\left(1 - e^{-2x}\right)\right]^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \left[\frac{\alpha-1}{2\alpha}x\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

3. Теорема существования и единственности решения

Введем в рассмотрение оператор

$$(Tu)(x) = \left(\int\limits_0^x K(x,t)u(t),dt + f(x)\right)^{1/\alpha}.$$

Тогда уравнение (3) можно записать в операторном виде: $Tu = u$. Из теоремы 1 следует, что решение этого операторного уравнения естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x) : u(x) \in C[0,\infty), \quad L(x) \leq u(x) \leq R(x)\}.$$

Чтобы доказать однозначную разрешимость уравнения $Tu = u$ в классе P, далее будем предполагать, что $K(x,t)$ и $f(x)$ удовлетворяют дополнительным условиям:

3) $K(0,0) > 0$;

4) $f(x)$ представима в виде:

$$f(x) = \int\limits_0^x f'(t)dt + f(0).$$

Теорема 2. *Если $\alpha > 1$ и выполнены условия 1)-4), то класс P инвариантен относительно оператора T.*

Доказательство. Пусть $u \in P$ - произвольная функция. Нужно доказать, что тогда и $Tu \in P$. То, что $(Tu)(x) \in C[0,\infty)$ очевидно в силу вольтерровости оператора T. Осталось доказать, что $L(x) \leq (Tu)(x) \leq R(x)$ для любого $x \in [0,\infty)$.

Покажем сначала, что $(Tu)(x) \geq L(x)$. Так как $u(x) \geq L(x)$, а функции $K(x,t)$ и $f(x)$ не убывают по x, то

$$[(Tu)(x)]^{\alpha} = \int_0^x K(x,t)u(t)\,dt + f(x) \geq \int_0^x K(t,t)L(t)\,dt + f(0) =$$

$$= \int_0^x K(t,t)\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t K(s,s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{1/(\alpha-1)} dt + f(0) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_0^x \left[\int_0^t K(s,s)ds + \frac{\alpha}{\alpha-1}f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times d\left[\int_0^t K(s,s)ds + \frac{\alpha}{\alpha-1}f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right] + f(0) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \left(\left[\int_0^x K(s,s)\,ds + \frac{\alpha}{\alpha-1}f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{\alpha/(\alpha-1)} - \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{\alpha/(\alpha-1)}\right) +$$

$$+f(0) = \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x K(s,s)\,ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{\alpha/(\alpha-1)} - \left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{\alpha/(\alpha-1)} + f(0) =$$

$$= \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x K(t,t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv [L(x)]^{\alpha},$$

т.е. $(Tu)(x) \geq L(x)$.

Докажем наконец, что $(Tu)(x) \leq R(x)$. Так как $u(x) \leq R(x)$ и $R(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то используя лемму 1 и условие 4), имеем

$$[(Tu)(x)]^{\alpha} \leq \int_0^x K(x,t)R(t)\,dt + f(x) \leq \int_0^x \left[K(t,t) + \int_0^t K'_t(t,s)ds\right] R(t)\,dt + f(x) =$$

$$= \int_0^x \left(\left[K(t,t) + \int_0^t K'_t(t,s)ds\right] R(t) + f'(t)\right) dt + f(0) =$$

$$= \int_0^x R(t)\left(K(t,t) + \int_0^t K'_t(t,s)ds + \frac{f'(t)}{R(t)}\right) dt + f(0) \leq$$

$$\leq \int_0^x R(t)\left(K(t,t) + \int_0^t K'_t(t,s)ds + \frac{f'(t)}{f^{1/\alpha}(t)}\right) dt + f(0) =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^x \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t K(t,s)ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right]^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times d\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t K(t,s)ds+f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right]+f(0)=$$

$$=\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K(x,s)ds+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{\alpha/(\alpha-1)}-\left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{\alpha/(\alpha-1)}+f(0)\equiv R^\alpha(x),$$

что и требовалось доказать.

Для построения полного метрического пространства, введем следующий класс

$$P_b=\{u(x):u(x)\in C[0,b],\quad L(x)\le u(x)\le R(x)\},$$

где $b>0$ есть любое фиксированное число.

Введем в классе P_b метрику, положив для любых $u,v\in P_b$

$$\varrho_b(u,v)=\underset{0<x\le b}{sup}\frac{|u(x)-v(x)|}{R(x)}.$$

Заметим, что из условий 1)-3) следует, что $R(x)>0$ при любом $x>0$.

Непосредственно проверяется, что пара (P_b,ϱ_b) образует полное метрическое пространство. При этом учитывается, что для любой фундаментальной последовательности $\{u_n(x)\}$ из P_b при любых $m,n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство $u_n(0)-u_m(0)=f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)-f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)=0$, позволяющее доказать фундаментальность этой последовательности в полном метрическом пространстве $C[0,b]$ (см. [9, §17]).

Из теоремы 2 следует, что оператор действует из P_b в P_b. Докажем, что при дополнительном условии

$$\textbf{5)}\ q=\sup_{0<x\le b}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K(x,t)\,dt+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right)\left((\alpha-1)\int\limits_0^x K(t,t)\,dt+\alpha\, f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{-1}<1$$

оператор T является сжимающим в P_b.

Воспользуемся неравенством (14) из [14]:

$$\left|z_1^{1/\alpha}-z_2^{1/\alpha}\right|\le\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{|z_1-z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}},\tag{15}$$

справедливым для любых $z_1\ge z_0$ и $z_2\ge z_0$, где $z_0>0$. Пусть $u,v\in P_b^+$ и $x\in(0,b]$. В силу неравенства (15), имеем

$$\left|(Tu)(x)-(Tv)(x)\right|=\left|\left(\int\limits_0^x K(x,t)u(t)\,dt+f(x)\right)^{1/\alpha}-\left(\int\limits_0^x K(x,t)v(t)\,dt+f(x)\right)^{1/\alpha}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\int\limits_0^x K(x,t)\,|u(t)-v(t)|\,dt}{[L^\alpha(x)]^{(\alpha-1)/\alpha}}=$$

$$=\left((\alpha-1)\int\limits_0^x K(t,t)\,dt+\alpha\, f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{-1}\int\limits_0^x K(x,t)R(t)\frac{|u(t)-v(t)|}{R(t)}\,dt\le$$

$$\le \varrho_b(u,v)\left((\alpha-1)\int\limits_0^x K(t,t)\,dt+\alpha\, f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{-1}\int\limits_0^x K(x,t)R(t)\,dt.$$

Применяя лемму 1 и учитывая, что $f^{-1/\alpha}(x)f'(x)\ge 0$ почти всюду на $[0,\infty)$, получаем

$$\int\limits_0^x K(x,t)R(t)\,dt \le \int\limits_0^x \left[K(t,t)+\int\limits_0^t K'_t(t,s)\,ds\right]R(t)\,dt\le$$

$$\le \int\limits_0^x \left[K(t,t)+\int\limits_0^t K'_t(t,s)\,ds+f^{-1/\alpha}(t)f'(t)\right]\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t K(t,s)\,ds+f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right]^{1/(\alpha-1)}dt=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-1}\int\limits_0^x\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t K(t,s)\,ds+f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right]^{1/(\alpha-1)}d\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t K(t,s)\,ds+f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right]=$$

$$=\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K(x,s)\,ds+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{\alpha/(\alpha-1)}-\left[f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{\alpha/(\alpha-1)}=R^\alpha(x)-f(0)\le R^\alpha(x).$$

Поэтому из предыдущего неравенства вытекает, что

$$\left|(Tu)(x)-(Tv)(x)\right|\le \varrho_b(u,v)\left((\alpha-1)\int\limits_0^x K(t,t)\,dt+\alpha\, f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{-1}R^\alpha(x),$$

откуда

$$\frac{|(Tu)(x)-(Tv)(x)|}{R(x)}\le q\cdot\varrho_b(u,v),$$

где число $q<1$ определено в условии 5).

Таким образом, для любых $u,v\in P_b$ справедливо неравенство

$$\varrho_b(Tu,Tv)\le q\cdot\varrho_b(u,v), \tag{16}$$

т.е. оператор T является сжимающим.

Полученные выше результаты позволяют сформулировать и доказать следующую основную теорему.

Теорема 2. *Если $\alpha>1$ и выполнены условия 1)-5), то интегральное уравнение (3) имеет единственное решение $u^*\in Q_0$, причем $u^*\in P_b$ при любом $b>0$. Это решение удовлетворяет неравенствам $L(x)\le u^*(x)\le R(x)$, где*

$$L(x)\equiv\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K(t,t)dt+f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right]^{1/(\alpha-1)},$$

$$R(x)\equiv\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x K(x,t)dt+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}$$

и его можно найти в P_b методом последовательных приближений по рекуррентной формуле $u_n = T_+u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ϱ_b. Для последовательных приближений справедлива оценка скорости сходимости:

$$\varrho_b^+(u_n, u^*) \le \frac{q^n}{1-q}\varrho_b^+(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где число $q < 1$ определено в условии 5), а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение (любая функция из P_b).

Доказательство. Запишем интегральное уравнение (3) в операторном виде $Tu = u$. Из теоремы 2 и неравенства (16) следует, что оператор T удовлетворяет всем требованиям принципа сжимающих отображений. Следовательно, оператор T имеет единственную неподвижную точку $u^* \in P_b$ и эту точку можно найти методом последовательных приближений, для которых справедлива оценка скорости сходимости (17). То, что $u^*(x)$ является единственным решением интегрального уравнения (3) и во всем классе Q_0 доказывается точно так же, как в теореме 3 из [18].

Приведем примеры, иллюстрирующие теорему 3.

Пример 1. *Уравнение (3) при $\alpha = 2$, $K(x,t) = e^{x+t}$ и $f(x) = e^x$ имеет в конусе Q_0 единственное решение*

$$u^*(x) = \frac{1}{3}\left(e^{2x} + 2e^{x/2}\right).$$

Пример 2. *Уравнение (3) при $K(x,t) = x + t$ и $f(x) \equiv 0$ имеет в конусе Q_0 единственное решение*

$$u(x) = \left(\frac{3\alpha^2 - 2\alpha - 1}{2\alpha\,(\alpha+1)}\right)^{1/(\alpha-1)} x^{2/(\alpha-1)}.$$

Пример 3. *Уравнение (3) при $K(x,t) = e^{x+t}$ и $f(x) \equiv 0$ имеет в конусе Q_0 единственное решение*

$$u(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{1/(\alpha-1)} \left(e^{(\alpha+1)x/\alpha} - 1\right)^{1/(\alpha-1)} e^{x/\alpha}.$$

Пример 4. *Уравнение (3) при $K(x,t) = e^{x-t}$ и $f(x) \equiv 0$ имеет в конусе Q_0 единственное решение*

$$u(x) = \left(e^{[(\alpha-1)/\alpha]x} - 1\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Последние два примера показывают, что нелинейные однородные интегральные уравнения вида (3) помимо тривиального решения $u(x) \equiv 0$ могут иметь еще и нетривиальные решения, в то время как соответствующие линейные однородные интегральные уравнения вида (3), соответствующие случаю $\alpha = 1$ и $f(x) \equiv 0$, имеют лишь тривиальное решение.

Легко показать, что в случае когда $0 < \alpha < 1$ уравнение (3) не имеет решений в конусе Q_0. В самом деле, если допустить противное, что $u \in Q_0$ и является решением уравнения (3), то с учетом того, что оно не убывает при $0 < \alpha < 1$ (см. доказательство теоремы 1), из тождества (3) получим

$$u^\alpha(x) \le u(x)\int\limits_0^x K(x,t)\,dt = u(x)\int\limits_0^x \left[K(t,t) + \int\limits_0^t K_t'(t,s)\,ds\right] dt, \quad x > 0,$$

откуда

$$u^{\alpha-1}(x) \le \int\limits_0^x \left[K(t,t) + \int\limits_0^t K_t'(t,s)\,ds\right] dt.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $x \to 0$ приходим к противоречию: $\infty \le 0$.

4. Заключение

Методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения неоднородного вольтерровского интегрального уравнения со степенной нелинейностью и ядром общего вида. Получены точные двусторонние оценки решения и показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа. Приведена оценка скорости сходимости последовательных приближений к точному решению в терминах весовой метрики. Показано, что, в отличие от линейного случая, нелинейное однородное интегральное уравнение Вольтерра помимо тривиального решения может иметь еще и нетривиальное решение. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Okrasiński W. On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain non-linear convolution equation // Ann. Pol. Math. 1979. Vol. 36, №1. P. 61-72.

2. Okrasiński W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation // Annal. Polon. Math. 1980. Vol. 37, №3. P. 223-229.

3. Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К., Якубов А. Я. Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, №5. С. 1035-1039.

4. Асхабов С. Н., Бетилгириев М. А. Нелинейные интегральные уравнения типа свертки с почти возрастающими ядрами в конусах // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №2. С. 321-330.

5. Bushell P. J., Okrasiński W. Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel // J. London Math. Soc. 1991. Vol. 41, №2. P. 503-510.

6. Асхабов С. Н., Бетилгириев М. А. Априорные оценки решений нелинейного интегрального уравнения типа свертки и их приложения // Матем. заметки. 1993. Т. 54, №5. С. 3-12.

7. Bushell P. J., Okrasiński W. Nonlinear Volterra integral equations and the Apery identities // Bull. London Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 478-484.

8. Kilbas A. A., Saigo M. On solution of nonlinear Abel–Volterra integral equation // J. Math. Anal. Appl. 1999. Vol. 229. P. 41-60.

9. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки (Физматлит, М., 2009).

10. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

11. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. Vol. 32, №2. P. 170-181.

12. Schneider W. R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type // Z. Angew. Math. Phys. 1982. Vol. 33, №1. P. 140-142.

13. Okrasiński W. Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, №2. P. 51-74.

14. Асхабов С. Н. Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, №9. Р. 1210-1219.

15. Edwards R. E. Functional analysis. Theory and applications (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1995).

16. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад (МГУ, М., 1987).

17. Okrasiński W. On subsolutions of a nonlinear diffusion problem // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1989. V. 11, N3. P. 409-416.

18. Асхабов С. Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, №6. С. 786-795.

REFERENCES

1. Okrasiński W. 1979, "On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain non-linear convolution equation", *Ann. Pol. Math.*, vol. 36, no. 1, pp. 61-72.

2. Okrasiński W. 1980, "On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation", *Annal. Polon. Math.*, vol. 37, no. 3, pp. 223-229.

3. Askhabov S. N., Karapetyants H. K., Yakubov A. Ya. 1990, "Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations", *Dokl. Math.*, vol. 41, no. 2, pp. 323–327.

4. Askhabov S. N., Betilgiriev M. A. 1991, "Nonlinear integral equations of convolution type with almost increasing kernels in cones", *Differ. Equat.*, vol. 27, no. 2, pp. 234–242.

5. Bushell P. J., Okrasiński W. 1991, "Nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel", *J. London Math. Soc.*, vol. 41, no. 2, pp. 503-510.

6. Askhabov S. N., Betilgiriev M. A. 1993, "A priori bounds of solutions of the nonlinear integral convolution type equation and their applications", *Math. Notes*, vol. 54, no. 5, pp. 1087–1092.

7. Bushell P. J., Okrasiński W. 1992, "Nonlinear Volterra integral equations and the Apery identities", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 24, pp. 478-484.

8. Kilbas A. A., Saigo M. 1999, "On solution of nonlinear Abel–Volterra integral equation", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 229, pp. 41-60.

9. Askhabov S. N. 2009, Nonlinear equations of convolution type. (russian) [Nelineinie uravneniya tipa svertki], Fizmatlit, Moscow, 304 p.

10. Brunner H. "Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications". Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

11. Keller J. J. 1981, "Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 32, no. 2, pp. 170-181.

12. Schneider W. R. 1982, "The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type", *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 33, no. 1, pp. 140-142.

13. Okrasiński W. 1989, "Nonlinear Volterra equations and physical applications", *Extracta Math.*, vol. 4, no. 2, pp. 51-74.

14. Askhabov S. N. 2021, ”On an integral equation with sum kernel and an inhomogeneity in the linear part”, *Differ. Equat.*, vol. 57, no. 2, pp. 1185-1194.

15. Edwards R. E. 1995, ”Functional analysis. Theory and applications”. New York: Holt, Rinehart and Winston, 781 p.

16. Sadovnichii V. A., Grigor’yan A. A., Konyagin S. V. 1987, Problems of student mathematical olympiads. (russian) [Zadachi studencheskikh matematicheskikh olimpiad], Moscow State Univ., Moscow, 310 p.

17. Okrasiński W. 1989, ”On subsolutions of a nonlinear diffusion problem”, *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, vol. 11, no. 3, pp. 409-416.

18. Askhabov S. N. 2020, ”Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part”, *Differ. Equat.*, vol. 56, no. 6. P. 775-784.

Получено: 5.10.2022
Принято в печать: 22.12.2022