

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-382-393

**Метод и некоторые результаты численной оценки
эффективного коэффициента Био горных пород¹**

М. Я. Яковлев, А. А. Семькин, В. А. Левин

Яковлев Максим Яковлевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва)

e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru

Семькин Александр Алексеевич — ООО «Фидесис» (г. Москва)

e-mail: setykin@cae-fidesys.com

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Аннотация

В статье описывается метод и приводятся некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био пористого материала. Оценка производится путём проведения расчёта на представительном объёме материала. Внешняя граница представительного объёма жёстко фиксируется, а к поверхности пор прикладывается давление. Краевая задача теории упругости с данными граничными условиями решается численно, с помощью отечественной САЕ-системы "Фидесис". Поле напряжений, полученное в результате решения, осредняется по объёму. Эффективный коэффициент Био вычисляется из осреднённого тензора напряжений.

Сравнение численных результатов для эффективного коэффициента Био с аналитическим решением проведено на простейшей модели - кубе со сферической полостью. Для разных пористостей и для разных коэффициентов Пуассона материала показано, что погрешность составляет не более 5%. Также проведена оценка эффективного коэффициента Био для моделей с более сложной формой поры. Численные результаты показывают наличие существенной анизотропии в полученных коэффициентах Био.

Ключевые слова: теория упругости, пороупругость, физика Земли, гомогенизация, коэффициент Био, численное моделирование

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

М. Я. Яковлев, А. А. Семькин, В. А. Левин. Метод и некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био горных пород // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 382–393.

¹Исследования проведены в МГУ имени М.В. Ломоносова за счёт гранта РФФИ №19-71-10008 (разработка алгоритма численной оценки эффективных коэффициентов Био и исследовательской программы), гранта РФФИ №22-11-00110 (сравнение численных результатов с аналитическими) и гранта Президента РФ для молодых учёных - докторов наук №МД-208.2021.1.1 (проведение расчётов для анизотропного материала).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-382-393

Method and Some Results of Numerical Estimation of Effective Biot's Coefficient of Rocks

M. Ya. Yakovlev, A. A. Semykin, V. A. Levin

Yakovlev Maksim Yakovlevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow)*e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru***Semykin Alexander Alekseevich** — Fidesys LLC (Moscow)*e-mail: semykin@cae-fidesys.com***Levin Vladimir Anatol'evich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: v.a.levin@mail.ru***Abstract**

In this article, a method and some results of the numerical estimation of effective Biot's coefficient of a porous material are described. The estimation is made by carrying out the calculation on a representative volume element (RVE) of the material. The outer boundary of the RVE is rigidly fixed, and pressure is applied to the surface of the pores. The elasticity boundary value problem with given boundary conditions is solved numerically, using the Russian CAE-system "Fidesys". The stress field obtained as a result of the solution is averaged over the volume. Effective Biot's coefficient is calculated from the averaged stress tensor.

Comparison of the numerical results for the effective Biot coefficient with the analytical solution is carried out on the simplest model - a cube with a spherical pore. For different porosities and for different Poisson's ratios of the material, it is shown that the error is no more than 5%. Effective Biot's coefficient is also estimated for models with a more complex pore shape. Numerical results show the presence of significant anisotropy in obtained Biot's coefficients.

Keywords: theory of elasticity, poroelasticity, rock physics, homogenization, Biot's coefficient, numerical simulation

Bibliography: 22 titles.

For citation:

M. Ya. Yakovlev, A. A. Semykin, V. A. Levin, 2022, "Method and Some Results of Numerical Estimation of Effective Biot's Coefficient of Rocks", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 382–393.

1. Введение

Численное моделирование задач геомеханики в настоящее время является всё более и более актуальным. Моделирование производится на масштабе зерна, на масштабе скважины [1] и на масштабе целого месторождения [2]. Одной из важных задач такого моделирования является вычисление напряжённо-деформированного состояния горной породы. При этом для описания поведения породы используются модели механики деформируемого твёрдого тела - в частности, теории упругости и пластичности.

Горная порода представляет собой неоднородную среду, поэтому для неё актуальна задача оценки эффективных механических характеристик - точно так же, как для композиционных [3] и пористых [4] материалов, решётчатых изделий аддитивного производства, метаматериалов [5], биологических тканей [6] и т.п. Но, в отличие от перечисленных видов материалов, порода зачастую представляет собой пороупругую среду, насыщенную жидкостью. В такой среде деформация твёрдого каркаса и движение жидкости по внутренним полостям (порам и трещинам [7]) влияют друг на друга. Одним из параметров пороупругой среды является коэффициент Био связывающий поровое давление и напряжения в материале. Масштаб поры/трещины и масштаб, на котором решаются задачи геомеханики, как правило, существенно различаются. В связи с этим, актуальной является задача численной оценки эффективных пороупругих характеристик горной породы.

В данной работе предложен метод и описаны некоторые результаты численной оценки эффективного коэффициента Био пористой среды. Оценка производится путём проведения конечноэлементных расчётов на представительном объёме среды (либо её ячейке периодически) с последующим осреднением результатов. Метод оценки аналогичен расчёту эффективных механических [8] [9] [10] [11] и теплофизических [12] характеристик гетерогенной среды. Расчёты проводятся с помощью отечественной САЕ-системы "Фидесис" [13] [14].

2. Алгоритм численной оценки эффективного коэффициента Био

Исследования различных эффективных свойств горных пород ведутся достаточно долгое время. Существуют методики натурных экспериментов [15], позволяющие оценивать механические и физические свойства породы. Также существуют различные аналитические решения [16], позволяющие оценить механические свойства породы в простейших (модельных) случаях. Авторы данной статьи в прошлых работах представляли алгоритмы оценки эффективных упругих и теплофизических характеристик горных пород [17], основанные на проведении численных расчётов на представительном объёме керна. Такие алгоритмы позволяют, в частности, оценить эффективные упругие характеристики породы с учётом предварительного нагружения, к примеру, поровым давлением [18]. В данной работе исследуются именно пороупругие свойства породы - эффективные коэффициенты Био.

Основателем пороупругости заслуженно считается бельгийско-американский учёный Морис Энтони Био. В его работах [19] [20] описана формула, которая фактически является определением коэффициента Био:

$$\alpha = 1 - \frac{K_D}{K_S} \quad (1)$$

Здесь α – коэффициент Био, K_D – модуль объёмного сжатия "сухого" скелета породы, K_S – модуль объёмного сжатия минерала (сплошного материала, без пор). Таким образом, коэффициент Био горной породы может быть вычислен при известных модулях объёмного сжатия самой породы и сплошного однородного минерала, её составляющего. Модуль объёмного сжатия минерала, как правило, известен из литературы (либо может быть оценен при помощи эксперимента). Модуль объёмного сжатия скелета может быть оценен с помощью аналитических формул, а также с помощью натурных экспериментов либо численных расчётов.

В данной работе используется другой подход к оценке коэффициента Био пористой среды, основанный на использовании метода расчёта на представительном объёме (либо ячейке периодичности) материала. Рассматривается закон Био-Терцаги для анизотропных упругих материалов [21], записанный в виде:

$$\sigma = C : \epsilon - \alpha p I \quad (2)$$

Здесь σ – тензор напряжений, ϵ – тензор деформаций, C – тензор модулей упругости (четвёртого ранга), p – поровое давление, I – единичный тензор, $:$ – знак двойной скалярной свёртки.

Формула (2) иллюстрирует, что при нулевых деформациях напряжения в среде полностью вызываются поровым давлением. Исходя из этой формулы, мы можем дать следующее определение: эффективный коэффициент Био пористой среды – это отношение эффективных напряжений, возникших в материале вследствие порового давления, к величине этого порового давления с противоположным знаком.

Пользуясь данным определением, опишем метод численной оценки эффективного коэффициента Био. Рассматривается геометрическая модель, являющаяся представительным объёмом пористой среды в форме прямоугольного параллелепипеда. (Представительным называется объём, достаточно большой для того, чтобы на нём можно было провести эксперименты либо сделать измерения, по результатам которых можно сделать обоснованный вывод о поведении материала в целом.) На представительном объёме решается статическая краевая задача теории упругости [22]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (3)$$

Граничные условия представляют собой нулевые перемещения всех точек границы Γ представительного объёма, что обеспечивает нулевые средние деформации в модели:

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

Кроме того, к поверхности внутренних пор прикладывается одинаковое фиксированное давление p_e .

Описанная краевая задача теории упругости решается численно, с помощью отечественной САЕ-системы "Фидесис" использующей метод конечных элементов. Полученное в результате решения поле тензора напряжений осредняется по объёму:

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (5)$$

Нет гарантии, что тензор напряжений σ^e , осреднённый по объёму путём численного интегрирования по всем конечным элементам, будет содержать ненулевые элементы лишь на диагонали, и эти элементы будут равны между собой. Поэтому при данном подходе (как это обычно бывает при оценке любых эффективных свойств путём расчёта на представительном объёме) предполагается наиболее общий случай анизотропной пороупругости, когда α является тензором второго ранга. Эффективные коэффициенты Био вычисляются по формуле:

$$\alpha_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}^e}{p^e} + \phi I \quad (6)$$

Здесь ϕ – пористость модели (отношение объёма пор к общему объёму). Второе слагаемое в правой части формулы (6) возникает вследствие того, что пороупругая среда содержит не только твёрдый скелет, но и собственно поры – поэтому эффективный тензор напряжений включает в себя не только суммарные напряжения в скелете, но также и суммарное поровое давление. Вклад порового давления в σ^e равен $-\phi p^e I$.

Если вычисленный тензор эффективных коэффициентов – диагональный, то полученный эффективный материал является ортотропным (с точки зрения пороупругости). В этом случае его пороупругие свойства характеризуются тремя коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Если же эти коэффициенты совпадают с достаточной точностью, то эффективный материал – изотропный, и его пороупругие свойства характеризуются единственным коэффициентом Био α .

3. Численные результаты

Описанный алгоритм был реализован численно в виде исследовательской программы с использованием CAE Fidesys. Для тестирования разработанной программы были проведены модельные расчёты на простейшей модели пористого материала - кубе со сферической полостью в центре (рис. 1). На данной модели проводились три серии расчётов эффективного коэффи-

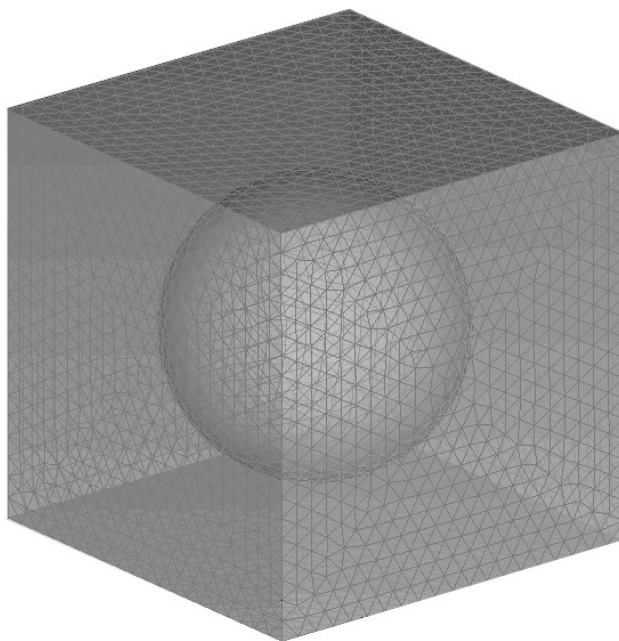


Рис. 1: Конечноэлементная сетка на модели пористой среды

циента Био: для значений коэффициента Пуассона материала в 0.2, 0.3 и 0.4. Во всех трёх сериях исследовалась зависимость эффективного коэффициента Био от пористости, которая варьировалась от 5% до 30%. Результат каждого численного расчёта сравнивался с коэффициентом Био, вычисленным по формуле 1. Модуль объёмного сжатия сплошного материала (минерала) был известен, а модуль объёмного сжатия "сухого" скелета оценивался численно, с помощью многократно оттестированного и апробированного программного модуля "Фидесис Композит" в составе САЕ "Фидесис". Результаты сравнения показаны на графиках на рис. 2. Графики зависимости коэффициента Био, полученного численно, от пористости материала изображены прерывистой чёрной линией, полученного аналитически - сплошной зелёной линией. Как видно из графиков, численные и аналитические результаты совпадают с хорошей точностью. Погрешность составляет не более 5%. Приведённые результаты позволяют утверждать о корректности разработанного алгоритма и исследовательской программы.

В отличие от аналитической оценки по формуле (1), численный расчёт с помощью вышеописанного алгоритма позволяет вычислить эффективный коэффициент Био в случаях, когда горная порода, к примеру, состоит из нескольких минералов с разным модулем объёмного сжатия - или когда пороупругие свойства среды получаются анизотропными вследствие формы пор. Было рассмотрено усложнение модели, представленной на рис. 1 - вместо сферической в центре куба располагалась пора в форме вытянутого вдоль оси X эллипсоида вращения, как показано на рис. 3. Для данной усложнённой модели проведены две серии расчётов (для пористостей 20% и 30%). Эффективный материал получился ортотропным с существенной анизотропией. Исследовалась зависимость коэффициентов Био α_y (либо α_z) и α_x от соотношения полуосей эллипсоида. Графики для материала с пористостью 20% показаны на рис. 4. График для коэффициентов α_y и α_z показан чёрной штриховой линией с коротким штри-

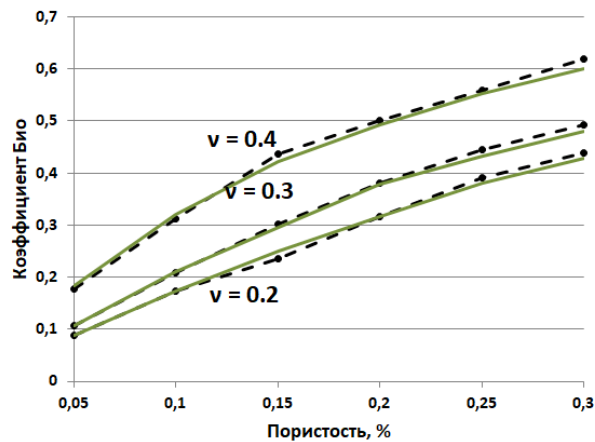


Рис. 2: Графики зависимости эффективного коэффициента Био от пористости

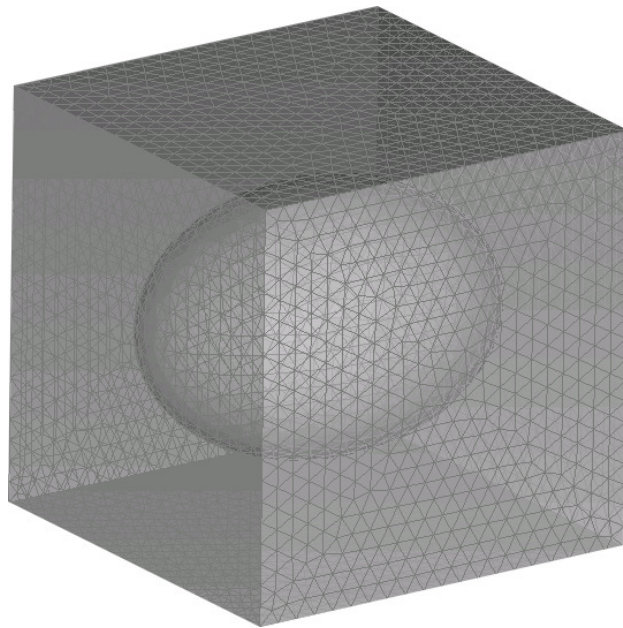


Рис. 3: Модель пористой среды с порами в форме вытянутого эллипсоида

хом, для коэффициента α_x - синей штриховой линией с длинным штрихом. Зелёной линией изображена величина коэффициента Био изотропной модели с такой же пористостью. При увеличении эллиптичности (т.е. отношения большой полуоси к малым) эллипсоида α_y и α_z монотонно и практически линейно увеличиваются, α_x - уменьшается. При максимальной эллиптичности (порядка 1,55) отношение больших коэффициентов Био к меньшему составляет около 1,17 - что является довольно существенной анизотропией.

На рис. 5 представлен аналогичный график для пористости 30%. Линии для эффективных коэффициентов Био выглядят, как и на предыдущем графике. При максимальной эллиптичности (порядка 1,3) отношение коэффициентов Био α_y и α_z к α_x составляет примерно 1,11. Можно сделать вывод, что "вытягивание" поры вдоль одной оси при сохранении пористости не оказывает существенного влияния на средний коэффициент Био: эффективный коэффициент Био в направлении "вытягивания" уменьшается, но в то же самое время увеличиваются коэффициенты в двух других направлениях.

Также был рассмотрен ещё один вариант формы поры - не вытянутый, а сплюснутый в

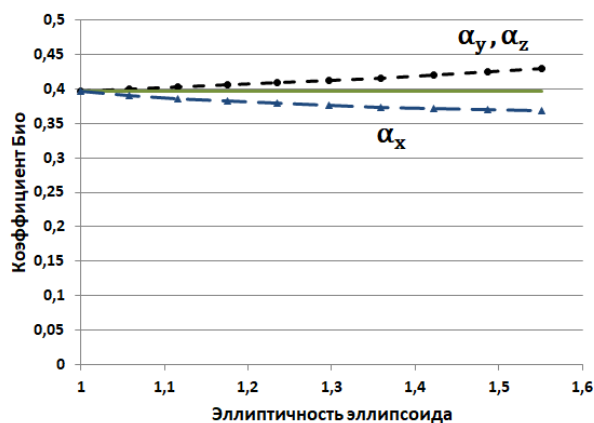


Рис. 4: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме вытянутого эллипсоида для пористости 20%

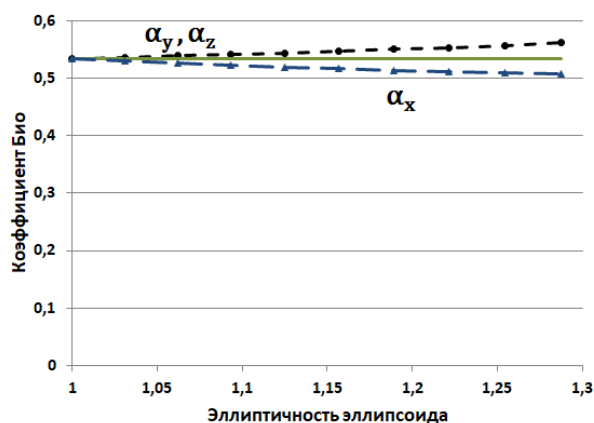


Рис. 5: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме вытянутого эллипсоида для пористости 30%

направлении оси X эллипсоид вращения. Для такой формы поры также проведены две серии расчётов (для пористостей 20% и 30%) с целью исследования зависимости эффективных коэффициентов Био от соотношения полуосей эллипсоида. Эффективный материал аналогично получился ортотропным с существенной анизотропией. Графики для пористости 20% показаны на рис. 6. Как видно из графиков, при увеличении эллиптичности поры от единицы до примерно 2,5 эффективный коэффициент Био α_x увеличивается весьма существенно, почти в полтора раза. Коэффициенты α_y и α_z при этом сначала незначительно уменьшаются (примерно на 3%), а при дальнейшем увеличении эллиптичности начинают расти и даже превышают свои значения, наблюдаемые для поры сферической формы (изотропный случай).

На рис. 7 представлен аналогичный график для пористости 30%. Линии для эффективных коэффициентов Био выглядят аналогично предыдущему графику. При увеличении эллиптичности поры от единицы до примерно 1,65 эффективный коэффициент Био α_x увеличивается примерно на четверть. Коэффициенты α_y и α_z при этом также сначала незначительно уменьшаются, а при дальнейшем увеличении эллиптичности начинают расти и почти достигают до своих значений, наблюдаемых при сферической форме поры (изотропный случай). Можно сделать вывод, что "сжатие" поры вдоль одной оси при сохранении пористости увеличивает средний коэффициент Био: эффективный коэффициент Био в направлении "сжима-

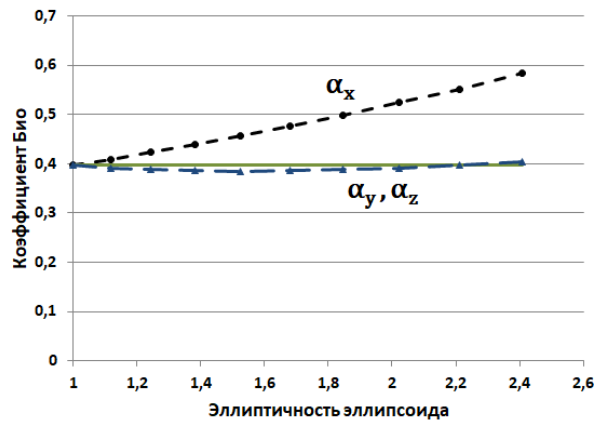


Рис. 6: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме сплюснутого эллипсоида для пористости 20%

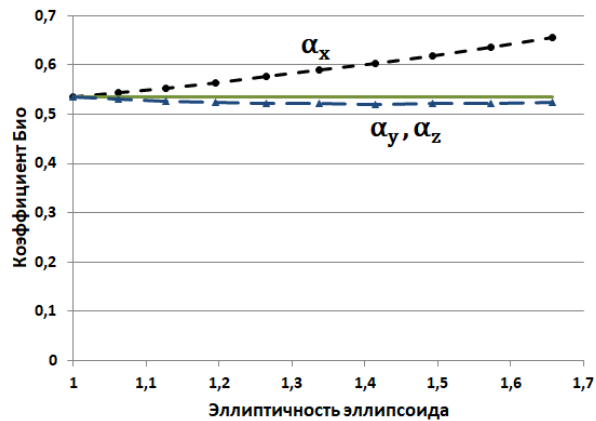


Рис. 7: Графики зависимости эффективных коэффициентов Био от эллиптичности поры в форме сплюснутого эллипсоида для пористости 30%

ния" существенно увеличивается, при этом коэффициенты в двух других направлениях сначала незначительно уменьшаются, а при дальнейшем "сжатии" и вовсе начинают расти.

В целом, приведённые результаты показывают возможность возникновения существенной анизотропии в пороупругих характеристиках пористой среды при геометрической анизотропии порового пространства. Неучёт такой анизотропии при моделировании пористой среды может отрицательно сказаться на точности результатов численных расчётов.

4. Заключение

В статье представлен разработанный алгоритм численной оценки эффективного коэффициента Био пористой среды (горной породы). Алгоритм реализован с помощью метода конечных элементов в виде исследовательской программы, использующей отечественную САЕ-систему "Фидесис". Проведена верификация программы путём сравнения вычисленных эффективных коэффициентов Био с аналитической формулой на простейшей модели ячейки пористой среды в виде куба со сферической полостью в центре. Сравнение с аналитическим решением показало хорошую точность, погрешность составляет не более 5% для разных пористостей и разных коэффициентов Пуассона материала. После верификации проведено ис-

следование эффективных коэффициентов Био для усложнённой модели пористой среды, в которой пора имеет форму эллипсоида. Продемонстрирована существенная анизотропия вычисленных эффективных пороупругих свойств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vershinin A.V. Poroelastoplastic modeling of a borehole stability under small and finite strains using isoparametric spectral element method // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2022. - Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01117-4>
2. Yalaev T.R., Bayuk I.O. Reconstruction of elastic properties and thermal conductivity of solid materials from their small fragments // *International Journal of Engineering Science*, V. 144, 2019. - Article ID: 103128.
3. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // *Composite Structures*, V. 131, 2015. - P. 25–36.
4. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // *Advances in Engineering Software*, V. 86, 2015. - P. 80–84.
5. Yakovlev M.Ya., Tanasevich P.S., Vershinin A.V., Levin V.A. Numerical analysis of the effective thermal properties and the stability for NTE metamaterials using CAE fidesys // *AIP Conference Proceedings*, V. 2509, Article ID 020210. - Режим доступа: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/5.0084835>
6. Muraev A.A., Tatoyan A.D., Dolgalev A.A., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya, Ivanov S.Yu, Konovalov D.A., Petrovsky K.A., Levin V.A. A sensitivity study by finite element analysis for the abutment-implant-bone system // *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, V. 10, I. 1, 2022. - P. 1-20.
7. Stefanov Yu P., Bakeev R.A., Rebetsky Yu L., Kontorovich V.A. Structure and formation stages of a fault zone in a geomedium layer in strike-slip displacement of the basement // *Physical Mesomechanic*, V. 17, I. 3, 2014. - P. 204-215.
8. Vladimir Levin, Ignatij Vdovichenko, Anatoly Vershinin, Maksim Yakovlev, Konstantin Zingerman. Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case [Электронный ресурс] // *Modelling and Simulation in Engineering*, Vol. 2016, Article ID 9010576, 10 pages, 2016. - Режим доступа: <https://www.hindawi.com/journals/mse/2016/9010576/>
9. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials // *Letters on Materials*, Vol. 7, Iss. 4, 2017. - P. 452–454.
10. Коновалов Д.А., Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // *Чебышевский сборник*, том 18, №3, 2017. - С. 316–329.

11. Левин В.А., Зингерман К.М., Яковлев М.Я., Курденкова Е.О., Немтинова Д.В. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышёвский сборник. Т. 20, №2, 2019. – С. 528–541.
12. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 158, № 1, Article ID 012094, 2016. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/meta>
13. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://cae-fidesys.ru/>
14. Kozlov V.V., Komolova E.D., Kartsev M.A., Filatova A.V. Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2022. - Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8>
15. Wendt A.S., Bayuk I.O., Covey-Crump S.J., Wirth R., Lloyd G. E. An experimental and numerical study of the microstructural parameters contributing to the seismic anisotropy of rocks // Journal of Geophysical Research: Solid Earth, V. 108, I. B8, 2003. - Article ID: 187823-MS.
16. Yarushina V.M., Podladchikov Y.Y., Wang L.H. Model for (De)Compaction and Porosity Waves in Porous Rocks Under Shear Stresses // Journal of Geophysical Research: Solid Earth, V. 125, I. 8, 2020. - Article ID: e2020JB019683.
17. Yakovlev M., Konovalov D. Multiscale geomechanical modeling under finite strains using finite element method // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2022. - Режим доступа: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00161-022-01107-6>
18. Yakovlev M.Ya., Bystrov I.D., Zingerman K.M., Levin V.A. Numerical Simulation of the Pore Pressure Influence on the Effective Mechanical Properties of Rocks Using CAE Fidesys // AIP Conference Proceedings, V. 2509, Article ID 020209. – Режим доступа: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/5.0084834>
19. M.A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid (I. Low frequency range, II. Higher frequency range) // Journal of the Acoustical Society of America, V. 28, 1956. – P. 168-181.
20. M. Biot, D. G. Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation // Journal of Applied Mechanics, V. 24, 1957. – P. 594–601.
21. M. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // Journal of Applied Physics, V. 26, I. 2, 1955. – P. 182–185.
22. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

REFERENCES

1. Vershinin, A.V. 2022 “Poroelastoplastic modeling of a borehole stability under small and finite strains using isoparametric spectral element method” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, available at: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01117-4>

2. Yalaev, T.R. Bayuk, I.O. 2019, "Reconstruction of elastic properties and thermal conductivity of solid materials from their small fragments", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 144, available at: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103128/>
3. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya. 2015, "Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains", *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 25–36.
4. Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M., Sboyshakov, A.M., Yakovlev, M.Ya. 2015, "Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for", *Advances in Engineering Software*, Vol. 86, pp. 80–84.
5. Yakovlev, M.Ya., Tanasevich, P.S., Vershinin, A.V., Levin, V.A. 2022, "Numerical analysis of the effective thermal properties and the stability for NTE metamaterials using CAE fidesys", *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2509, available at: <https://doi.org/10.1063/5.0084835>
6. Muraev, A.A., Tatoyan, A.D., Dolgalev, A.A., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya, Ivanov, S.Yu, Konovalov, D.A., Petrovsky, K.A., Levin, V.A. 2022, "A sensitivity study by finite element analysis for the abutment-implant-bone system", *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, Vol. 10, no. 1, pp. 1-20.
7. Stefanov, Yu P., Bakeev, R.A., Rebetsky, Yu L., Kontorovich, V.A. 2014, "Structure and formation stages of a fault zone in a geomedium layer in strike-slip displacement of the basement", *Physical Mesomechanic*, Vol. 17, no. 3, pp. 204-215.
8. Levin, V.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya., Zingerman, K.M. 2016, "Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case", *Modelling and Simulation in Engineering*, Vol. 2016, available at: <https://doi.org/10.1155/2016/9010576>
9. Levin, V.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Y., Zingerman, K.M. 2017, "An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials", *Letters on Materials*, Vol. 7, no. 4, pp. 452–454.
10. Konovalov, D.A., Yakovlev, M.Ya. 2017, "Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 18, no. 3, pp. 316–329.
11. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Yakovlev, M.Ya., Kurdenkova, E.O., Nemtinova, D.V. 2019, "Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 20, no. 2, pp. 528–541.
12. Vdovichenko, I.I., Yakovlev, M.Ya., Vershinin, A.V., Levin, V.A. 2016, "Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 158, no. 1, available at: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012094>
13. Fidesys LLC official website: <http://cae-fidesys.ru/>
14. Kozlov, V.V., Komolova E.D., Kartsev M.A., Filatova A.V. 2022 "Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package" *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, available at: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8>

15. Wendt A.S., Bayuk, I.O., Covey-Crump S.J., Wirth R., Lloyd G.E. 2003, “An experimental and numerical study of the microstructural parameters contributing to the seismic anisotropy of rocks”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol. 108, no. B8, available at: <https://doi.org/10.1029/2002JB001915>
16. Yarushina, V.M., Podladchikov, Y.Y., Wang L.H. 2020, “Model for (De)Compaction and Porosity Waves in Porous Rocks Under Shear Stresses”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol. 125, no. 8, available at: <https://doi.org/10.1029/2020JB019683>
17. Yakovlev, M.Ya., Konovalov, D.A. 2022, “Multiscale geomechanical modeling under finite strains using finite element method”, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, available at: <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01107-6>
18. Yakovlev, M.Ya., Bystrov, I.D., Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2022, “Numerical Simulation of the Pore Pressure Influence on the Effective Mechanical Properties of Rocks Using CAE Fidesys”, *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2509, available at: <https://doi.org/10.1063/5.0084834>
19. Biot M.A. 1956, “Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid (I. Low frequency range, II. Higher frequency range)”, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, pp. 168-181.
20. Biot M.A., Willis D.G. 1957, “The elastic coefficients of the theory of consolidation”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 594–601.
21. Biot M.A. 1955, “Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, no. 2, pp. 182–185.
22. Lurie, A.I. 1990, *Nonlinear theory of elasticity*, Amsterdam, North-Holland

Получено: 11.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022