

УДК 517.9

**МЕТОД МНОГОЗНАЧНЫХ ПОЛУГРУПП
ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ
ДОЛГОСРОЧНЫХ ПРОГНОЗОВ
УПРАВЛЯЕМЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ**

П. О. Касьянов, Л. С. Палийчук, А. Н. Ткачук (г. Киев)

Аннотация

В работе исследуется эволюционное включение гиперболического типа с линейным демпфированием, которое описывает класс управляемых пьезоэлектрических полей с немонотонным потенциалом.

Разрывная по фазовой переменной функция взаимодействия может быть представлена в виде разности субдифференциалов выпуклых функционалов. Такая система моделирует широкий класс управляемых процессов механики сплошных сред, в частности, и управляемые пьезоэлектрические процессы с многозначным законом "реакции-перемещения".

Представление закона "реакции-перемещения" в виде разности субдифференциалов выпуклых функционалов позволяет более гибко управлять пьезоэлектрической системой. В таких процессах ключевую роль играют свойства представленных в модели операторов. Поэтому в процессе исследования мы накладываем на параметры задачи такие условия, которые позволяют изучаемой модели с допустимой точностью описывать реальный физический процесс и, в то же время, дают возможность использовать для нее существующий математический аппарат.

В работе, используя методы теории глобальных и траекторных аттракторов для многозначных полугрупп операторов, обосновывается конечность с точностью до малого параметра слабых решений рассматриваемой модели.

Кроме того, полученные результаты применяются к конкретной пьезоэлектрической задаче.

Ключевые слова: многозначная полугруппа операторов, управляемые пьезоэлектрические поля, включение гиперболического типа, немонотонный потенциал.

Библиография: 15 названий.

METHOD OF MULTIVALUED OPERATOR SEMIGROUP TO INVESTIGATE THE LONG-TERM FORECASTS FOR CONTROLLED PIEZOELECTRIC FIELDS

P. O. Kasyanov, L. S. Paliichuk, A. N. Tkachuk (Kiev)

Abstract

We study the evolution inclusion of hyperbolic type with a linear damping, which describes a class of piezoelectric controlled fields with non-monotonic potential.

Discontinuous on the phase variable interaction function can be represented as the difference of subdifferentials of convex functionals. This system describes a wide class of controlled Continuum Mechanics processes, in particular, the piezoelectric controlled processes with a multivalued "reaction-displacement" law.

The representation of "reaction-displacement" law as the difference of subdifferentials of convex functionals allows more flexible control for piezoelectric system. In such processes, the properties of operator presented in the model play the key role. Therefore, we impose conditions on parameters of the problem such that allow investigated model with acceptable accuracy to describe real physical process and, at the same time, provide an opportunity to use existing mathematical apparatus for it.

In this paper, using the methods of the theory of global and trajectory attractors for multivalued operator semigroups the finitedimensioness of weak solutions of the model is substantiated up to a small parameter.

Furthermore, the results are applied to a piezoelectric problem.

Keywords: multivalued operator semigroup, controlled piezoelectric field, hyperbolic inclusion, non-monotonic potential.

Bibliography: 15 titles.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Цель этой работы — на основании теории полугрупп многозначных операторов в бесконечномерных пространствах обосновать конечномерность, в некотором роде, с точностью до малого параметра, всех слабых решений систем гиперболического типа с линейным демпфированием, которые описывают классы управляемых пьезоэлектрических полей, рассмотренных в работе [1].

Отметим, что существование решений для таких объектов при более слабых условиях доказано в [2].

Сформулируем задачу в обобщенном смысле.

Рассмотрим эволюционную тройку пространств $(V; H; V^*)$ и операторы $B : H \rightarrow V^*$, $A : V \rightarrow V^*$.

Рассмотрим эволюционное включение:

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Bu_t(t) + Au(t) + \partial J_1(u(t)) - \partial J_2(u(t)) \ni \bar{0} \text{ для п.в. } t > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{cases} \quad (1)$$

где $J_i : H \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ — локально липшицевы функционалы, ∂J_i — субдифференциалы Кларка для $J_i(\cdot)$, $i = 1, 2$.

Определим фазовое пространство для задачи (1) как $X = V \times H$.

Основные предположения на параметры задачи (1):

$B : H \rightarrow H$ — линейный симметричный оператор такой, что существует $\beta > 0$: $(Bv, v)_H = \beta \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H$;

$A : V \rightarrow V^*$ — линейный симметричный оператор такой, что существует $c_A > 0$: $\langle Av, v \rangle_V \geq c_A \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$, где $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_V$ — нормы в H и V соответственно, $(\cdot, \cdot)_H$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ — скалярное произведение в H и спаривание в V соответственно.

Кроме того, $J_i : H \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ — такие функционалы, что $J_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ — локально липшицевы и регулярны (см. [5, Глава 2]), то есть $\forall x, v \in H$ существуют обыкновенные односторонние производные по направлению

$$J'_i(x; v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_i(x + tv) - J_i(x)}{t}, \quad i = 1, 2$$

и

$$\forall x, v \in H, \quad J'_i(x; v) = J_i^\circ(x; v),$$

где

$$J_i^\circ(x; v) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x, t \rightarrow 0} \frac{J_i(y + tv) - J_i(y)}{t}, \quad i = 1, 2;$$

более того, для $i = 1, 2$ существуют такие $c_i > 0$, что

$$\|l\|_H \leq c_i(1 + \|v\|_H), \quad \forall l \in \partial J_i(v), \quad \forall v \in H;$$

также существует такое $c_2^* > 0$, что

$$(l, v)_H \leq \lambda \|v\|_H^2 + c_2^*, \quad \forall l \in \partial J_2(v), \quad \forall v \in H,$$

где

$$\partial J_i(u) = \{p \in H \mid (p, w)_H \leq J_i^\circ(u; w) \quad \forall w \in H\}$$

обозначают субдифференциалы Кларка для $J_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ в точке $u \in H$ (см. [5, Глава 2] для деталей) и

$$\lambda \in (0, \lambda_1), \quad \lambda_1 > 0 : \quad c_A \|v\|_V^2 \geq \lambda_1 \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V.$$

Для упрощения выводов также предположим, что

$$(u, v)_V = \langle Au, v \rangle_V, \quad \|v\|_V^2 = \langle Au, v \rangle_V, \quad \beta(u, v)_H = (Bu, v)_H, \\ \beta\|v\|_H^2 = (Bv, v)_H \quad \forall u, v \in V.$$

Классы физических применений, которые сводятся к задаче (1) с очерченными условиями, рассмотрены в разделе 4.

Приведем некоторые дополнительные сведения и обозначения, необходимые для формулировки основного результата работы. В качестве $P(X)$ ($\beta(X)$) обозначим множество всех непустых (непустых ограниченных) подмножеств X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $-\infty < \tau < T < +\infty$. Функция $\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ u_t(\cdot) \end{pmatrix} \in L^\infty[\tau, T, X]$ называется слабым решением (1) на $[\tau, T]$, если существуют такие функционалы $l_i \in L^2(\tau, T; H)$, $i = 1, 2$, $l_i(t) \in \partial J_i(u(t))$ для п.в. $t \in (\tau, T)$, что $\forall \psi \in V, \forall \eta \in C_0^\infty(\tau, T)$ выполняется соотношение

$$-\int_\tau^T (u_t(t), \psi)_H \eta(t) dt + \int_\tau^T [(u_t(t), \psi)_H + (u(t), \psi)_H + (l_1(t), \psi)_H - (l_2(t), \psi)_H] \eta(t) dt = 0.$$

Следуя [2], получаем существование слабых решений $(u, u_t)^T \in L_\infty(\tau, T; X)$ на промежутке $[\tau, T]$ для задачи (1) с начальными данными $u(\tau) = a$, $u_t(\tau) = b$ для любых $a \in V$, $b \in H$.

В качестве $\mathcal{D}_{\tau, T}$ обозначим множество всех слабых решений задачи (1):

$$\forall \varphi_\tau = (a, b)^T \in X \quad \mathcal{D}_{\tau, T}(\varphi_\tau) = \{(u(\cdot), u_t(\cdot))^T | (u, u_t)^T$$

— слабое решение задачи (1) на $[\tau, T]$, $u(\tau) = a$, $u_t(\tau) = b\}$. Отметим, что $\mathcal{D}_{\tau, T}(\varphi_\tau) \subset C([\tau, T]; X)$.

Более того, трансляция и конкатенация слабых решений также являются слабыми решениями (см. [2, лемма 16.4]).

Введем функцию $\mathcal{V}(\varphi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|_X^2 + J_1(a) - J_2(a)$ для $\varphi = (a, b)^T \in X$. Следуя лемме 3 из [3], отметим, что для $-\infty < \tau < T < +\infty$, $\varphi_\tau \in X$, $\varphi(\cdot) = (u(\cdot), u_t(\cdot))^T \in \mathcal{D}_{\tau, T}(\varphi_\tau)$ функция $\mathcal{V} \circ \varphi : [\tau, T] \rightarrow \mathbf{R}$ является абсолютно непрерывной и справедливо равенство $\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\varphi(t)) = -\beta\|u_t(t)\|_H^2$ для п.в. $t \in (\tau, T)$.

Таким образом, следуя [2, леммы 16.3 — 16.5], любое слабое решение задачи (1) на конечном отрезке $[0, T]$ может быть продолжено до глобального, определенного на $[0, +\infty)$.

Для произвольного $\varphi_0 \in X$ пусть $\mathcal{D}(\varphi_0)$ обозначает множество всех слабых решений (определенных на $[0, +\infty)$) задачи (1) с начальными данными $\varphi(0) = \varphi_0$.

Определим многозначную полугруппу $\mathcal{G}$ как

$$\mathcal{G}(t, \xi_0) = \{\xi(t) \mid \xi(\cdot) \in \mathcal{D}(\xi_0)\}, \quad t \geq 0.$$

Обозначим семейство всех слабых решений включения (1), определенных на $[0, +\infty)$, как $\mathcal{K}_+ = \bigcup_{u_0 \in X} \mathcal{D}(u_0)$.

Основываясь на свойствах слабых решений задачи (1), отметим, что $\mathcal{K}_+$ — трансляционно инвариантно, то есть $\forall u(\cdot) \in \mathcal{K}_+, \forall h \geq 0 \ u_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, где $u_h(s) = u(h+s)$, $s \geq 0$.

Далее на $\mathcal{K}_+$ определим трансляционную полугруппу $\{T(h)\}_{h \geq 0}$, $T(h)u(\cdot) = u_h(\cdot)$, $h \geq 0$, $u \in \mathcal{K}_+$; $T(h)\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{K}_+$ при $h \geq 0$.

На $\mathcal{K}_+$ рассмотрим топологию, индуцированную из пространства Фреше $C^{loc}(\mathbf{R}_0; X)$, то есть $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$ в $C^{loc}(\mathbf{R}_0; X)$ тогда и только тогда, когда для любого $M > 0$ $\Pi_M f_n(\cdot) \rightarrow \Pi_M f(\cdot)$ в $C([0, M]; X)$, где Π_M — оператор сужения на интервал $[0, M]$ [9, с.179].

Рассмотрим автономное включение (1) на всей временной оси. Пространство $C^{loc}(\mathbf{R}; X)$, как и пространство $C^{loc}(\mathbf{R}_0; X)$, наделено топологией локально равномерной сходимости на каждом промежутке $[-M, M] \subset \mathbf{R}$ (см. [9, р.180]). В качестве Π_+ обозначим оператор сужения на $[0, +\infty)$.

Напомним, что функция $u \in C^{loc}(\mathbf{R}; X) \cap L_\infty(\mathbf{R}; X)$ называется полной траекторией задачи (1), если $\forall h \in \mathbf{R} \ \Pi_+ u_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+$ [9, р.180]. Кроме того, полная траектория $\varphi \in \mathcal{K}$ является стационарной, если $\varphi(t) = z$ для всех $t \in \mathbf{R}$ и для некоторого $z \in X$.

Рассмотрим семейство всех полных траекторий $\mathcal{K}$ включения (1). Заметим, что $u_h(\cdot) \in \mathcal{K}$ для любых $h \in \mathbf{R}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{K}$. Следуя [10, р.486], в качестве $Z(\mathcal{G})$ обозначим множество точек покоя полугруппы $\mathcal{G}$, то есть

$$Z(\mathcal{G}) = \{(\bar{0}, u) \mid u \in V, \ A(u) + \partial J_1(u) - \partial J_2(u) \ni \bar{0}\}.$$

Условия на параметры задачи (1) обеспечивают ограниченность множества $Z(\mathcal{G})$ в X .

Положим $J(u) = J_1(u) - J_2(u)$, $u \in H$. Теорема Лебурга о среднем [5, Глава 2] дает существование констант $c_3, c_4 > 0$ и $\mu \in (0, \lambda_1)$:

$$|J(u)| \leq c_3(1 + \|u\|_H^2), \quad J(u) \geq -\frac{\mu}{2}\|u\|_H^2 - c_4 \quad \forall u \in H.$$

Тогда, основываясь на [2, следствие 16.1], получаем, что для любых $\varphi_0 \in X$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\varphi_0)$ выполняется соотношение

$$\|\varphi(t)\|_X^2 \leq \frac{\lambda_1 + 2c_3}{\lambda_1 - \mu} \|\varphi(0)\|_X^2 + \frac{2(c_3 + c_4)\lambda_1}{\lambda_1 - \mu}, \quad \forall t > 0.$$

Пусть $B_r(x)$ — замкнутый шар с центром в точке $x \in X$ радиусом $r > 0$. Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются основные предположения на параметры задачи (1). Тогда многозначная полугруппа $\mathcal{G}$ удовлетворяет следующему свойству: для каждого ограниченного множества $B \subset X$ и $\varepsilon > 0$ существует момент времени $t_0(B, \varepsilon)$ и конечномерное подпространство E в X такое, что для

некоторого ограниченного проектора $P : X \rightarrow E$, множество $P(\bigcup_{t \geq t_0} \mathcal{G}(t, B))$ ограничено в X и $(I - P)(\bigcup_{t \geq t_0} \mathcal{G}(t, B)) \subset B_\varepsilon(\bar{0})$, где I — тождественное отображение в X .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Приведем набросок доказательства теоремы 1, которое базируется на результатах работ [2] — [4], [6] — [8], [13, 14]. Для доказательства будем использовать методы теории глобальных и траекторных аттракторов для многозначных полугрупп операторов.

Повторяя доказательства [2, теоремы 16.1, 16.2], отметим, что для любой последовательности $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}_{\tau, T}(\varphi_n(\tau))$ слабых решений задачи (1) на $[\tau, T]$ такой, что: (i) $\varphi_n(\tau) \rightarrow \varphi_\tau$ слабо в X , $n \rightarrow +\infty$ и для последовательности $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset [\tau, T]$ такой, что $t_n \rightarrow t_0$, $n \rightarrow +\infty$, существует такое $\varphi \in \mathcal{D}_{\tau, T}(\varphi_\tau)$, что с точностью до подпоследовательности $\varphi_n(t_n) \rightarrow \varphi(t_0)$ слабо в X , $n \rightarrow +\infty$; (ii) $\varphi_n(\tau) \rightarrow \varphi_\tau$ сильно в X , $n \rightarrow +\infty$, то с точностью до подпоследовательности $\varphi_n(\cdot) \rightarrow \varphi(\cdot)$ в $C([\tau, T]; X)$, $n \rightarrow +\infty$.

Покажем, что многозначная полугруппа $\mathcal{G}$ является асимптотически компактной, т.е., для любой последовательности $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{G}$ такой, что последовательность $\{\varphi_n(0)\}_{n \geq 1}$ — ограничена, и для любой последовательности $\{t_n\}_{n \geq 1} : t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, последовательность $\{\varphi_n(t_n)\}_{n \geq 1}$ имеет сходящуюся подпоследовательность.

Действительно, пусть $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, v_n)$, $v_n \in C \in \beta(X)$, $n \geq 1$, $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$. Проверим предкомпактность последовательности $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ в X . Для этого без потери общности достаточно выделить из последовательности $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ сходящуюся в X подпоследовательность. Следуя лемме 4 из [3], получаем, что существует такая подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}_{k \geq 1}$ и $\xi \in X$, что $\xi_{n_k} \rightarrow \xi$ слабо в X , $\|\xi_{n_k}\|_X \rightarrow m \geq \|\xi\|_X$, $k \rightarrow +\infty$. Покажем, что $m \leq \|\xi\|_X$. Зафиксируем произвольное $T_0 > 0$. Тогда для достаточно большого $k \geq 1$ $\mathcal{G}(t_{n_k}, v_{n_k}) \subset \mathcal{G}(T_0, \mathcal{G}(t_{n_k} - T_0, v_{n_k}))$. Таким образом, $\xi_{n_k} \in \mathcal{G}(T_0, \beta_{n_k})$, где $\beta_{n_k} \in \mathcal{G}(t_{n_k} - T_0, v_{n_k})$ и $\sup_{k \geq 1} \|\beta_{n_k}\|_X < +\infty$ (см. [3, лемма 4]). Следуя теореме 1 из [3], для некоторых $\{\xi_{k_j}, \beta_{k_j}\}_{j \geq 1} \subset \{\xi_{n_k}, \beta_{n_k}\}_{k \geq 1}$, $\beta_{T_0} \in X$ получаем, что:

$$\xi \in \mathcal{G}(T_0, \beta_{T_0}), \quad \beta_{k_j} \rightarrow \beta_{T_0} \text{ слабо в } X, \quad j \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Следуя определению многозначной полугруппы $\mathcal{G}$, положим:

$$\begin{aligned} \forall j \geq 1 \quad \xi_{k_j} &= (u_j(T_0), u'_j(T_0))^T, \quad \beta_{k_j} = (u_j(0), u'_j(0))^T, \\ \xi &= (u_0(T_0), u'_0(T_0))^T, \quad \beta_{T_0} = (u_0(0), u'_0(0))^T, \end{aligned}$$

где $\varphi_j = (u_j, u'_j)^T \in C([0, T_0]; X)$, $u'_j \in L_2(0, T_0; V^*)$, $l_j \in L_\infty(0, T_0; H)$, $u''_j(t) + Bu'_j(t) - Au_j(t) + l_{j,1}(t) - l_{j,2}(t) = \bar{0}$, $l_{j,i}(t) \in \partial J_i(u_j(t))$ $i = 1, 2$, для п.в. $t \in$

$(0, T_0)$. Для каждого $t \in [0, T_0]$ положим

$$I(\varphi_j(t)) := \frac{1}{2} \|\varphi_j(t)\|_X^2 + J_1(u_j(t)) - J_2(u_j(t)) + \frac{\beta}{2} (u'_j(t), u_j(t)).$$

Тогда, используя [7, лемма 2.16], [11, лемма 4.1] и [11, лемма 3.1], получаем, что

$$\frac{dI(\varphi_j(t))}{dt} = -\beta I(\varphi_j(t)) + \beta \mathcal{H}(\varphi_j(t)),$$

для п.в. $t \in (0, T_0)$, где

$$\mathcal{H}(\varphi_j(t)) = J_1(u_j(t)) - \frac{1}{2} (l_{j,1}(t), u_j(t)) - J_2(u_j(t)) + \frac{1}{2} (l_{j,2}(t), u_j(t)).$$

Следуя свойству слабых решений относительно слабой сходимости и (2), получаем, что существует

$$\bar{R} > 0 : \quad \forall j \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_0] \quad \|u'_j(t)\|_H^2 + \|u_j(t)\|_V^2 \leq \bar{R}^2.$$

Более того,

$$\begin{aligned} u_j &\rightarrow u_0 \text{ слабо в } L_2(0, T_0; V), & u'_j &\rightarrow u'_0 \text{ слабо в } L_2(0, T_0; H), \\ u_j &\rightarrow u_0 \text{ в } L_2(0, T_0; H), & l_{j,i} &\rightarrow l_i \text{ слабо в } L_2(0, T_0; H), \\ u''_j &\rightarrow u''_0 \text{ слабо в } L_2(0, T_0; V^*), & \forall t \in [0, T_0] \quad u_j(t) &\rightarrow u_0(t) \text{ в } H, \quad j \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Для любого $j \geq 0$ и $t \in [0, T_0]$

$$I(\varphi_j(t)) = I(\varphi_j(0))e^{-\beta t} + \int_0^t \mathcal{H}(\varphi_j(s))e^{-\beta(t-s)} ds,$$

в частности,

$$I(\varphi_j(T_0)) = I(\varphi_j(0))e^{-\beta T_0} + \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_j(s))e^{-\beta(T_0-s)} ds.$$

Следуя (3) и [7, лемма 2.16], получаем, что

$$\int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_j(s))e^{-\beta(T_0-s)} ds \rightarrow \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_0(s))e^{-\beta(T_0-s)} ds, \quad j \rightarrow +\infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} I(\varphi_j(T_0)) &\leq \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} I(\varphi_j(0))e^{-\beta T_0} + \int_0^{T_0} \mathcal{H}(\varphi_0(s))e^{-\beta(T_0-s)} ds = \\ &= I(\varphi_0(T_0)) + \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} I(\varphi_j(0))e^{-\beta T_0} - I(\varphi_0(0))e^{-\beta T_0} \leq I(\varphi_0(T_0)) + \bar{c}e^{-\beta T_0}, \end{aligned}$$

где $\bar{c}$ не зависит от $T_0 > 0$. С другой стороны, следуя (3), получаем, что

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} I(\varphi_j(T_0)) \geq \frac{1}{2} \lim_{j \rightarrow +\infty} \|\varphi_j(T_0)\|_X^2 + J_1(u_0(T_0)) - J_2(u_0(T_0)) + \frac{\beta}{2}(u'_0(T_0), u_0(T_0)).$$

Следовательно получаем, что $\frac{1}{2}m^2 \leq \frac{1}{2}\|\xi\|_X^2 + \bar{c}e^{-\beta T_0} \forall T_0 > 0$ и $m \leq \|\xi\|_X$.

Таким образом, многозначная полугруппа $\mathcal{G}$ является асимптотически компактной.

Следуя [8, леммы 2.4, 2.6] и учитывая сепарабельность гильбертового пространства X , получим утверждение теоремы.

3. ЗАМЕЧАНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Из доказательства теоремы 1 следует, что для многозначной полугруппы $\mathcal{G}$ существует инвариантный компактный в фазовом пространстве X глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, то есть множество, удовлетворяющее следующим свойствам: (i) $\mathcal{A} = \mathcal{G}(t, \mathcal{A})$, $\forall t \geq 0$; (ii) $\mathcal{A}$ — притягивающее множество, т.е.,

$$\text{dist}(\mathcal{G}(t, C), \mathcal{A}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \forall C \in \beta(X), \quad (4)$$

где $\text{dist}(D, E) = \sup_{d \in D} \inf_{e \in E} \|d - e\|_X$ — полурасстояние Хаусдорфа; (iii) для любого замкнутого множества $Y \subset H$, которое удовлетворяет (4), имеем, что $\mathcal{A} \subseteq Y$ (см. [12]). Кроме того, для каждой $\psi \in \mathcal{K}$ граничные множества $\alpha(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \rightarrow z \text{ для некоторой последовательности } t_j \rightarrow -\infty\}$, $\omega(\psi) = \{z \in X \mid \psi(t_j) \rightarrow z \text{ для некоторой последовательности } t_j \rightarrow +\infty\}$ являются связными подмножествами $Z(G)$, где $\mathcal{V}$ — константа. Если $Z(G)$ — вполне несвязно (в частности, когда $Z(G)$ — счетное), границы $z_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t)$, $z_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)$ существуют и z_- , z_+ — точки покоя; кроме того, $\varphi(t)$ стремится к точке покоя при $t \rightarrow +\infty$ для каждой $\varphi \in \mathcal{K}_+$.

Отметим также, что в $\mathcal{K}_+$ существует траекторный аттрактор, то есть множество $U \in \mathcal{K}_+$ в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ относительно топологии $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$, удовлетворяющее таким свойствам:

(i) U — компактное множество в $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$ и ограниченное множество в $L_\infty(\mathbf{R}_+; X)$;

(ii) U — строго инвариантное множество относительно $\{T(h)\}_{h \geq 0}$, то есть $T(h)U = U \forall h \geq 0$;

(iii) U — притягивающее множество в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ в топологии $C^{loc}(\mathbf{R}_+; X)$, т.е., для любого ограниченного (в $L_\infty(\mathbf{R}_+; X)$) множества $B \in \mathcal{K}_+$ и произвольного $M \geq 0$ выполняется соотношение

$$\text{dist}_{C([0, M]; X)}(\Pi_M T(t)B, \Pi_M U) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

[7, определение 1.10]. Кроме того, глобальный и траекторный аттрактор связаны следующим соотношением:

$$U = \Pi_+ \mathcal{K} = \Pi_+ \{u \in \mathcal{K} \mid u(t) \in \mathcal{A} \forall t \in \mathbf{R}\}. \quad (5)$$

Действительно, так как для многозначной полугруппы $\mathcal{G}$ существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, то для доказательства существования траекторного аттрактора в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ и выполнения соотношения (5) необходимо проверить выполнение условий теоремы 1.12 из [7], а именно: для любой последовательности $\{\varphi_n(\cdot)\} \subset \mathcal{K}_+$, для которой $\varphi_n(0) \rightarrow \varphi_0 \in \mathcal{A}$ в X , существует такое $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, $\varphi(0) = \varphi_0$, что, с точностью к некоторой подпоследовательности, $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ в X , $\forall t \geq 0$. Следуя [3, теорема 3], данное условие выполнено для произвольной последовательности слабых решений задачи (1), определенных на $[\tau, T]$, для которых $\varphi_n(\tau) \rightarrow \varphi(\tau)$ в X . Таким образом, можно выбрать такую подпоследовательность $\{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n \geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ решений задачи (1), определенных на $[0, 1]$, таких что $\varphi_{n,1}(0) \rightarrow \varphi_0$, что для некоторого $\widehat{\varphi}_1(\cdot) \in \mathcal{K}_+$: $\widehat{\varphi}_1(0) = \varphi_0$ выполняется $\varphi_{n,1}(t) \rightarrow \widehat{\varphi}_1(t)$ в X , $\forall t \in [0, 1]$. Далее выберем подпоследовательность $\{\varphi_{n,2}(\cdot)\}_{n \geq 1} \subset \{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n \geq 1}$ слабых решений задачи (1), определенных на $[0, 2]$, таких что $\varphi_{n,2}(0) \rightarrow \varphi_0$. Используя [3, теорема 3], получаем, что существует такое $\widehat{\varphi}_2(\cdot) \in \mathcal{K}_+$: $\widehat{\varphi}_2(0) = \varphi_0$, что $\varphi_{n,2}(t) \rightarrow \widehat{\varphi}_2(t)$ в X для $\forall t \in [0, 2]$. С другой стороны $\varphi_{n,2}(t) \rightarrow \widehat{\varphi}_1(t)$ в X $\forall t \in [0, 1]$. Таким образом, $\widehat{\varphi}_1(t) = \widehat{\varphi}_2(t)$ для $\forall t \in [0, 1]$. Аналогично выберем подпоследовательности $\{\varphi_{n,k}(\cdot)\}_{n \geq 1} \subset \{\varphi_{n,k-1}(\cdot)\}_{n \geq 1} \subset \dots \subset \{\varphi_{n,1}(\cdot)\}_{n \geq 1} \subset \{\varphi_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$, $k = 1, 2, \dots$, слабых решений задачи (1), определенных на $[0, +\infty)$, $\varphi_{n,k}(0) \rightarrow \varphi_0$, что $\varphi_{n,k}(t) \rightarrow \varphi(t)$ в X для $k \rightarrow +\infty$, где $\varphi(\cdot) \in \mathcal{K}_+$, $\varphi(0) = \varphi_0$. Диагональный метод Кантора обеспечивает выбор необходимой подпоследовательности $\{\varphi_{n_k}\}_{k \geq 1}$ такой, что $\varphi_{n_k}(t) \rightarrow \varphi(t)$ для $t \geq 0$. Следовательно, в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ существует траекторный аттрактор и имеет место соотношение (5).

4. ПРИМЕНЕНИЯ

Применим вышеизложенные результаты к модели пьезоэлектрического управляемого процесса, в частности, контакта между пьезоэлектрическим телом и опорой. Для этого необходимо определить пространства

$$V = H^1(\Omega; \mathbf{R}^d), \quad H = L^2(\Omega; \mathbf{R}^d), \quad \Omega \subset \mathbf{R}^d, \quad d = 2,$$

со скалярными произведениями

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{\Omega} uv dx, \quad \langle u, v \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$$

соответственно, и операторы $B : H \rightarrow V^*$, $A : V \rightarrow V^*$. $\mathcal{H} = L^2(\Omega; \mathbf{S}^d)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma : \tau dx$. Здесь σ является тензором напряжения $\sigma : Q \rightarrow \mathbf{S}^d$, $\sigma = (\sigma_{ij})$, где $\mathbf{S}^d$ — линейное пространство симметрических тензоров второго порядка на $\mathbf{R}^d$ со скалярным произведением $\sigma : \tau = \sum_{ij} \sigma_{ij} \tau_{ij}$ и соответствующей нормой $\|\tau\|_{\mathbf{S}^d}^2 = \tau : \tau$, $\sigma_{ij}, \tau_{ij} \in \mathbf{S}^d$, и ε — линейный тензор деформации $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$, $i, j = 1, 2$.

Функционалы J_i , $i = 1, 2$ определим как

$$J_i(u) = \int_{\Omega} G_i(x, u(x)) dx, \quad i = 1, 2,$$

где $G_i : \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ — измеримые по (x, u) , выпуклые по u для п.в. $x \in \Omega$ функционалы, $u : Q \rightarrow \mathbf{R}^d$, $u = u(x, t)$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$

Пусть выполняются следующие предположения:

(i) $G_i : \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, удовлетворяют стандартные условия Каратеодори и существуют такие $c^{(i)} \in L_1(\Omega)$ и $\alpha^{(i)} > 0$, что $\|d^{(i)}\|_{\mathbf{R}^d} \leq c^{(i)}(x) + \alpha^{(i)}\|u\|_{\mathbf{R}^d}$ для п.в. $x \in \Omega$ и любого $u \in \mathbf{R}^d$, $d^{(i)} \in \partial G_i(x, u)$, $\alpha^{(2)}$ — достаточно малое положительное число;

(ii) для определяющих тензоров справедливы утверждения: для тензора эластичности

$$a = (a_{ijkl}), \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),$$

$$a_{ijkl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl}, \quad a_{ijkl} = a_{ijlk}, \quad a_{ijkl}(x) \tau_{ij} \tau_{kl} \geq \alpha \tau_{ij} \tau_{ij}$$

для п.в. $x \in \Omega$, $\forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbf{S}_+^d$, $\alpha > 0$; для пьезоэлектрических коэффициентов $p = (p_{ijk})$, $p_{ijk} \in L^\infty(\Omega)$; для диэлектрических констант $\beta = (\beta_{ij})$, $\beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(\Omega)$, $\beta_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \geq m_\beta |\zeta|_{\mathbf{R}^d}^2$ для п.в. $x \in \Omega$, $\forall \zeta = (\zeta_i) \in \mathbf{R}^d$, $m_\beta > 0$.

Задача (1) с определенными таким образом операторами и функционалами описывает модель пьезоэлектрического поля с немонотонным потенциалом (см. [3] для деталей). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для многозначной, в общем случае, полугруппы $\mathcal{G}$, построенной на всех решениях, в смысле определения 1, задачи (1) с определенными выше параметрами выполняются условия теоремы 1.

5. Заключение

Для системы уравнений с частными производными гиперболического типа с линейным демпфированием и разрывной по фазовой переменной функцией взаимодействия, расширение графика которой может быть представлено в виде разности субдифференциалов выпуклых функционалов, на основании теории полугрупп многозначных операторов в бесконечномерных пространствах доказана, в некотором смысле, конечномерность динамики всех слабых решений, при времени $t \rightarrow +\infty$ с заданной точностью.

Полученные результаты были применены к математической модели, которая описывает динамику состояний класса управляемых пьезоэлектрических полей с немонотонным потенциалом.

Таким образом, результаты работы позволяют изучать долгосрочное поведение слабых решений рассмотренной задачи, обосновать высокоточные алгоритмы их поиска, и выводить состояния системы потраекторно на заданные

стационарные уровни при некоторых дополнительных предположениях относительно связности множества точек покоя данной системы.

Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего качественного анализа глобального поведения функций состояния классов управляемых нелинейных процессов и полей разной природы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu Z., Migórski S. Noncoercive Damping in Dynamic Hemivariational Inequality with Application to Problem of Piezoelectricity // Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B. 2008. Vol.9, Iss.1. P. 129–143
2. Gorban N. V., Kapustyan V. O., Kasyanov P. O., Paliichuk L. S. On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity // Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications. / V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky (Eds.). Springer-Verlag. 2013. P. 221–237.
3. Zgurovsky M. Z., Kasyanov P. O., Paliichuk L. S. Automatic feedback control for one class of contact piezoelectric problems // System Analysis and Information Technologies. 2014. Iss. 1. P. 56–68.
4. Kasyanov P. O., Paliichuk L. S. Trajectory behavior of weak solutions of the piezoelectric problem with discontinuous interaction function on the phase variable. // Research Bulletin of NTUU "KPI". 2014. Vol. 2.
5. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley, Interscience: New York, 1983. 308 p.
6. Zgurovsky M. Z., Kasyanov P. O., Zadoianchuk N. V. Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem // Applied Mathematics Letters . 2012. Vol.25. P. 1569–1574.
7. Zgurovsky M. Z., Kasyanov P. O., Kapustyan O. V., Valero J., Zadoianchuk N.V. Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing III. Springer-Verlag: Berlin, 2012. 330 p.
8. Kalita P., Łukaszewicz G. Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties // Nonlinear Analysis. 2014. Vol. 101. P. 124–143.
bibitem3 Ball J. M. Global attrarctors for damped semilinear wave equations // DCDS. 2004. Vol. 10. P. 31–52.
9. Vishik M., Chepyzhov V. Trajectory and Global Attractors of Three-Dimensional Navier-Stokes Systems // Mathematical Notes. 2002. Vol. 71, Iss. 1-2. P. 177–193.

10. Ball J. M. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations // Journal of Nonlinear Sciences. 1997. Vol. 7, Iss. 5. P. 475–502.
11. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer-Verlag: New York, 1988. 500 p.
12. Melnik V. S., Valero J. On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. 1998. Vol. 6, Iss. 1. P. 83–111.
13. Касьянов П. О., Задоянчук Н. В. Динамика решений класса автономных эволюционных включений второго порядка // Кибернетика и системный анализ. 2012. № 3. С. 111–126.
14. Kasyanov P. O. Multivalued dynamics of solutions of autonomous operator differential equations with pseudomonotone nonlinearity // Mathematical Notes. 2012. Vol. 92, Iss. 1-2. P. 205–218.
15. Касьянов П. О., Задоянчук Н. В. Свойства решений эволюционных включений второго порядка с отображениями псевдомонотонного типа // Журнал вычислительной и прикладной математики. 2010. №3(102). С. 63–78

Учебно-научный комплекс "Институт прикладного системного анализа" Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт" МОН Украины и НАН Украины

Поступило 09.05.2014