

УДК 511.512

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОТОКОВ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ В СВЯЗИ С ГИПОТЕЗАМИ ДЛЯ L -ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ

У. М. ПАЧЕВ (г. Нальчик)

Аннотация

Работа посвящена изучению связи теории распределения целых точек на простейшем гиперboloиде с некоторыми гипотезами для L -функции Дирихле.

При применении дискретного эргодического метода (далее ДЭМ), разработанного Ю. В. Линником (см. [1, 2]) к задаче распределения целых точек на гиперboloидах $x_1x_3 - x_2^2 = m$ (так же как и в случае сферы) в формулировках теорем об асимптотически равномерном распределении целых точек участвует некоторое вспомогательное простое число p такое, что символ Лежандра $\left(\frac{-m}{p}\right) = 1$. В эргодических теоремах и теоремах перемешивания для целых точек наличие такого простого числа было естественным, так как оно порождало поток примитивных точек, используемый в ДЭМ при выводе асимптотических формул для числа целых точек на сфере и на гиперboloиде.

Представляет большой интерес получение остаточных членов в асимптотических формулах для целых точек по областям на сфере и на гиперboloиде в рамках используемого ДЭМ (см. [2, 3]).

Исследования в этом направлении для целых точек на эллипсоидах проводились А. В. Малышевым и автором [3], а также Е. П. Голубевой [4, 5] методом А. И. Виноградов [6], являющегося развитием дисперсионного метода Ю. В. Линника [7].

Оказывается, что некоторые ослабленные гипотезы для L -функции Дирихле, непосредственно следующие из расширенной гипотезы Римана позволяют устранить указанный недостаток.

Учитывая это обстоятельство в сочетании с тем, что А. В. Малышевым и Б. М. Широковым в [8] получено новое доказательство ключевой леммы ДЭМ для гиперboloидов обоих видов, мы проводим соответствующее исследование.

В нашей работе исследование ведется сразу для обоих случаев простейших гиперboloидов и в сочетании с использованием некоторых гипотез о поведении L -функции Дирихле получаем значительное упрощение рассуждений и улучшение формулировок результатов.

В связи с нашим исследованием отметим так же, что Дьюк [9] методом модулярных форм с использованием результатов Иванца [10] получил асимптотическую формулу с безусловным остаточным членом для числа целых точек в областях на простейшем гиперboloиде. Но в [9] в отличие от нашей работы не рассматривалось распределение целых точек по классам вычетов по заданному модулю. В связи с этим возникает интересная задача по перенесению результатов Дьюк [9] на распределение целых точек простейшего гиперboloида по прогрессиям, т.е. по классам вычетов.

Ключевые слова: тернарная квадратичная форма, гиперboloид, целая точка, вектор-матрица второго порядка, приведенная бинарная квадратичная форма, поток целых точек, эргодическая теорема для целых точек, L -функция Дирихле.

Библиография: 17 названий.

ERGODIC PROPERTIES OF FLOWS FOR INTEGRAL POINTS ON SOME HYPERBOLOIDS IN CONNECTION WITH THE HYPOTHESIS FOR THE DIRICHLET L -FUNCTION

U. M. PACHEV (Nalchik)

Abstract

This work is dedicated to the study of connection of distribution theory of integral points on the simplest hyperboloid with some hypotheses for Dirichlet L -function. In application of discrete ergodic method (further DEM), developed by U. V. Linnik (see [1, 2]) to the problem of distribution of integral points on hyperboloids $x_1x_3 - x_2^2 = m$ (as well as and in case of sphere) in formulations of theorems about asymptotically even distribution of integral points some auxiliary prime number p such as that symbol of Legendre $\left(\frac{-m}{p}\right) = 1$. In ergodic theorems and theorems of mixing for integral points the presence of such simple number was natural as it resulted a flow of primitive points used in DEM in conclusion of asymptotic formulae for numbers of integral points on the sphere and on hyperboloid. The receipt (receiving) of residual members in asymptotic formulae for integral points on areas on the sphere and on hyperboloid in frames of usage DEM (see [2, 3]) is of great interest. Studies in this direction for integral points on ellipsoids were carried out by A. V. Malyshev and by author [3] as well as by E. P. Golubeva [4, 5] by means of method of A. U. Vinogradov [6] which are elaboration of dispersions method of U. V. Linnik [7]. It appears that some weakened hypotheses for Dirichlet L -function, directly following from broadened hypotheses of Riman allows to eliminate the mentioned lack. Taking into account that circumstance in combination with that done by A. V. Malyshev and B. M. Shirikov in [8].

There obtained a new proof of key lemma DEM for hyperboloids of both kinds, we give corresponding investigation. In Our work the investigation is done at once for both cases of the simplest hyperboloids and in combination with the use of some hypothesis about the behaviour of Dirichlet L -function and obtain considerable simplification of arguments in results.

In connection with our investigation we also note that by the Duke method of modular forms with application of Ivants results [10] we shall obtain asymptotic formulae with absolute residual member for numbers of integral points in areas on the simplest hyperboloid. But in [9] as distinct from our work the distribution of integral points according to classes of deductions according to the given module was not considered. In this connection there appears an interesting problem about transference of Duke's results [9] to the distribution of integral points of the simplest hyperboloid according to to progressions, i.e. according to classes of deductions.

Keywords: ternary quadratic form, hyperboloid, integral points, vector-matrices, two order, reduced binary quadratic forms, the flow of integral points, ergodic theorem for the integral points, Dirichlet L -function.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Эта работа посвящена связи теории представления целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами с гипотезами для L -функций Дирихле.

Одним из важных методов в аналитической теории тернарных квадратичных форм все ещё остается дискретный эргодический метод (ДЭМ), основы которого были разработаны Ю. В. Линником (см. [1, 2]). При получении с помощью ДЭМ теорем о равномерном распределении представлений целого числа m тернарной квадратичной формой $f(x_1, x_2, x_3)$ по областям соответствующего гиперboloида или по классам вычетов по данному модулю в их

формулировках помимо необходимых родовых условий представимости числа входит требование, чтобы существовало простое число p , для которого символ Лежандра

$$\left(\frac{-\Delta m}{p}\right) = 1,$$

где Δ — некоторое целое число, зависящее от квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$.

Мы уточняем и обобщаем эргодические теоремы перемешивания работ Ю. В. Линника (см. [2], гл. V, теоремы 5.2.4 и 5.2.6 и гл. VI, теоремы 6.4.1 и 6.4.2), используя при этом некоторые гипотезы о поведении L -функции Дирихле.

Более развернутое доказательство эргодической теоремы в случае целых точек на сфере приводится в [2].

В дальнейшем эргодические теоремы были перенесены на потоки целых точек на простейших гиперboloидах, связанных с теорией приведения бинарных квадратичных форм (см. [2]). При этом в случае простейшего однополостного гиперboloида $x_1x_3 - x_2^2 = m$ при $m < 0$ возникают затруднения при выборе потока целых точек, которые были преодолены Б. Ф. Скубенко [11] своей теоремой о приведённых неопределённых бинарных квадратичных формах. Но ввиду того, что А. В. Малышевым и Б. Ф. Широковым [8] получено новое доказательство ключевой леммы ДЭМ для вектор-матриц второго порядка, охватывающее оба случая гиперboloида, то с целью упрощения рассуждений будем использовать этот вариант ДЭМ.

При применениях ДЭМ несомненный интерес представляет получение оценок остаточных членов в асимптотических формулах эргодических теорем и теорем равномерного распределения целых точек по областям поверхности гиперboloида или по классам вычетов по данному модулю. Значительным недостатком ДЭМ при его использовании является введение вспомогательного простого числа p под условием $\left(\frac{-m}{p}\right) = 1$. Такое условие привносится самим методом при построении потоков целых точек на рассматриваемой поверхности. Его можно избежать, если будут доказаны некоторые гипотезы о поведении L -функции Дирихле, при этом и формулировка и сам вывод могут быть упрощены. Поэтому представляют интерес высказывания, которые можно сделать если принять расширенную гипотезу Римана или некоторые её ослабления. Достаточно определенное исследование в этом направлении проведены А. В. Малышевым (см. [12]) для случая целых точек на эллипсоидах. Аналогичное исследование проводилось Е. П. Голубевой [4, 5] методом А. И. Виноградова [6], являющиеся развитием дисперсионного метода Ю. В. Линника [7]. Результаты Е. П. Голубевой также являются условными, так как они предполагают выполнимость некоторых гипотез о нулях L -функции Дирихле (значительно более слабых, чем расширенная гипотеза Римана). В дальнейшем автором и А. В. Малышевым (см. [13]) для тернарных квадратичных форм более общего вида с использованием гипотез о нулях L -функции Дирихле проводилось исследование по оценкам остаточных членов в эргодических теоремах на двуполостных гиперboloидах специального вида.

2. Вспомогательные результаты из арифметики матриц второго порядка

Приведем теперь нужные нам сведения как из арифметики матриц второго порядка так и из арифметики квадратичных форм [14] и две гипотезы о поведении L -функции Дирихле, которые будут использованы при применении ДЭМ к вопросу о распределении целых точек на гиперboloидах специального вида.

Мы рассмотрим квадратные матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка над полем рациональных чисел $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Число $N(A) = \det A$ называем (по аналогии с алгеброй кватернионов) нормой матрицы A . След матрицы A , как обычно, определяется равенством $Sp A = \alpha_{11} + \alpha_{22}$. Если $Sp A = 0$, то A называем вектор-матрицей.

Любую матрицу A можно представить единственным способом в виде $A = l + L$, где $l = lE$ — скалярная матрица, L — вектор-матрица, причем число l определяется равенством $l = \frac{1}{2} Sp A$.

Вектор-матрицу

$$L = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \gamma & -\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

(ясно, что это общий вид вектор-матриц), сопоставляет с бинарной квадратичной формой $\varphi = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$, и каждую из них сопоставляем ещё точке $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Q}^3$.

В связи с этим можно говорить о положительной или неопределенной вектор-матрице. Вектор-матрица (1) называется приведенной, если соответствующая ей бинарная квадратичная форма $\varphi = (\alpha, \beta, \gamma)$ является приведенной. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2)$$

называем целой, если $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Говорим, что целая матрица (2) примитивна, если $\text{НОД}(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = 1$. В кольце $M_2(\mathbb{Z})$ целых матриц второго порядка определяем ассоциированность матриц слева и справа.

Матрицу A_1 называем ассоциированной слева с матрицей $A \in M_2(\mathbb{Z})$, если найдется такая целая матрица U с нормой $N(U) = \pm 1$, для которой $A_1 = UA$. Аналогично определяется ассоциированность матриц справа.

Определим также понятие делимости целых матриц справа и слева. Пусть $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$. Будем говорить, что A делится справа на невырожденную матрицу B и записывать A/B , если AB^{-1} — целая матрица. Аналогично определяется делимость $B \setminus A$ матрицы A слева на матрицу B .

Приведем также используемые нами результаты из арифметики матриц второго порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $q > 0$ — нечетное число. Обозначим через $\sigma_0(q)$ число неассоциированных слева (справа) примитивных матриц второго порядка нормы q .

Тогда

$$\sigma_0(q) = q \cdot \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [14].

Большую роль в ДЭМ играет следующий матричный аналог основной теоремой арифметики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A — целая матрица нормы $N(A) = a \neq 0$ и пусть $a = b \cdot c$, где b, c — целые числа. Тогда найдутся такие целые матрицы B и C , что $A = B \cdot C$, $N(B) = b$, $N(C) = c$. При этом, если $A = B_1 C_1$, $B_1 C_1 \in M_2(\mathbb{Z})$, $N(B_1) = b$, $N(C_1) = c$, то B_1 ассоциирована справа с B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [14]. По индукции предложение 2 обобщается на несколько сомножителей.

Следующее предложение, относящееся к вопросу делимости целых матриц второго порядка большой нормы, используется в доказательстве эргодической теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $q > 1$ — нечетное число, $t \geq 2$ — целое число. Пусть Q_1 и Q_2 — целые примитивные матрицы второго порядка нормы q .

Обозначим через $\sigma_0(q^t; Q_1, Q_2)$ число всех неассоциированных слева целых примитивных матриц B с условием

$$N(B) = q^t, Q_1 \setminus B, B/Q_2.$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\sigma_0(q^t; Q_1, Q_2) = \frac{\sigma_0(q^t)}{\sigma_0(q^2)} + O\left((q^t)^{\frac{11}{12} + \varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из предложения 4.2 в [14].

3. Ключевая лемма ДЭМ для простейших гиперboloидов и гипотезы о поведении L -функции Дирихле

Ключевая лемма ДЭМ играет существенную роль при доказательстве эргодических теорем. Рассмотрим некоторые её варианты, при этом мы существенно используем определения и предложения из арифметики матриц второго порядка (см. [14]), соответствующие случаю гиперboloидов.

В кольце целых матриц второго порядка $M_2(\mathbb{Z})$ рассмотрим матричные равенства

$$l + L_i = K_i T_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3)$$

где

$$L_1, \dots, L_n, N(L_i) = m \quad (4)$$

— различные целые приведенные примитивные вектор-матрицы нормы $m \neq 0$; K_i, T_i — целые матрицы, причем

$$N(K_i) = k, N(T_i) = t, \quad \text{НОД}(k, t) = 1, \quad (5)$$

l — целое число с условием

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod{k}. \quad (6)$$

Пусть $\xi = \xi(m)$, $\xi_1 = \xi_1(m)$, $\eta = \eta(m)$ — положительные вещественные функции аргумента $m \neq 0$ с условием

$$\xi(m) \rightarrow \infty, \xi_1(m) \rightarrow \infty, \eta(m) \rightarrow \infty, \quad \text{при } |m| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$\alpha, \alpha_1, 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \leq 1$ — вещественные постоянные. Следующее утверждение

$$Z = Z\{\xi, \eta\} = Z\{\xi, \xi_1, \eta, \alpha, \alpha_1\}$$

будем называть ключевой леммой типа $\{\xi, \eta\}$ дискретного эргодического метода.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ($Z\{\xi, \xi_1, \eta, \alpha, \alpha_1\}$). Пусть выполнены равенства (3) и пусть выполнены условия

$$n \gg r(m) |m|^{-\frac{1}{\xi(m)}}, \quad (8)$$

$$\text{НОД}(m, k) \ll |m|^{\frac{1}{\xi_1(m)}}, \quad (9)$$

$$\{r(m)\}^\alpha \ll \sigma_0(k) \ll \{r(m)\}^{\alpha_1}, \quad (10)$$

где $\sigma_0(k)$ — число примитивных неассоциированных справа матриц нормы k . Обозначим через w — число неассоциированных справа матриц $K_1, \dots, K_n$ в равенствах (3). Тогда

$$w \gg \sigma_0(k) |m|^{\frac{1}{\eta(m)}}, \quad (11)$$

где постоянные, входящие в оценку (11) зависят только от α , α_1 и постоянных, входящих в оценки (8)–(10).

Доказательство этого утверждения ведется аналогично случаю двуполостных гиперболоидов из работы [15] с учётом некоторых замечаний статьи Б. Ф. Скубенко [11]. В ходе доказательства получается, что

$$\eta(m) = \frac{1}{\frac{2}{\xi(m)} + \frac{8c+1}{2\xi_1(m)} + \frac{14}{\log \log |m|} + \frac{11,2c}{\xi_1 \log \log |m|} + 2\tilde{l}(m)}, \quad (12)$$

при этом $\eta(m) \rightarrow \infty$ при $|m| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь условные варианты ключевой леммы ДЭМ для вектор-матриц второго порядка, используя для этого две гипотезы о поведении L -функции Дирихле.

Пусть $\chi = \chi(x)$ — вещественный характер Дирихле по модулю m , имеющий наименьший модуль среди характеров, для которых $\chi(k) = \left(\frac{-m}{k}\right)$, если $\text{НОД}(k, 2m) = 1$. $L(s, \chi)$ есть L -функция Дирихле, определенная рядом

$$L(s, \chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}, \quad \text{Re } s > 1.$$

Обозначим

$$L(m) = L(1, \chi) = |m|^{-l(m)} \geq |m|^{-\tilde{l}(m)},$$

где

$$l(m) = -\frac{\log L(1, \chi)}{\log |m|},$$

$$\tilde{l}(m) = \max \left\{ \frac{1}{\log \log |m|}, l(m) \right\}.$$

Мы рассматриваем следующие гипотезы о поведении L -функции Дирихле, используемые при оценках остаточных членах в эргодических теоремах.

Гипотеза (H). В области

$$|s - 1| < \frac{(\log \log |m|)^2 \log \log \log |m|}{\sqrt{\log |m|}}$$

комплексного переменного s при достаточно больших $|m|$ нет нулей $L(s, \chi)$.

Гипотеза (K). При $|m| \rightarrow \infty$

$$l(m) \ll \frac{1}{\log \log |m|},$$

т.е. для некоторой постоянной $c > 0$ выполняется оценка

$$L(m) = L(1, \chi) \gg |m|^{-\frac{c}{\log \log |m|}}.$$

С учётом принятых гипотез из ключевой леммы получаем следующие две следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнена гипотеза (K). Тогда для любых вещественных постоянных $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ имеет место ключевая лемма

$$Z \{c_1 \log \log |m|, c_2 \log \log |m|, c_3 \log \log |m|; 0; 1\},$$

где $c_3(c) > 0$ определяется через c_1 , c_2 и c и постоянные гипотезы (K).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнена гипотеза (H). Пусть $m = m_1 \cdot m_2$, где m_1 бесквадратно, а m_2 — полный квадрат, причём

$$m_2 \ll |m|^{\frac{c_4}{\sqrt{\log |m|} \log \log |m|}},$$

$$\tau(k) \ll |m|^{\frac{c_5}{\sqrt{\log |m|} \log \log |m|}},$$

Пусть α_1 — любое наперед заданное число с условием $0 < \alpha_1 < 1$.

Тогда имеет место ключевая лемма

$$Z_{M,B} \left\{ \frac{1}{c_1} \sqrt{\log |m|} \log \log |m|, \frac{1}{c_2} \sqrt{\log |m|} \log \log |m|, \frac{1}{c} \sqrt{\log |m|} \log \log |m|; 0; 1 \right\},$$

где постоянная $c > 0$ определяется постоянными $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_4 > 0$, $c_5 > 0$ и α_1 ; $M = \{m\}$ — последовательность чисел m , определяемых оценкой для m_2 ; $B = \{b\}$ — последовательность целых чисел $b = b(m) > 0$, определяемых оценкой для $\tau(k)$.

Доказательство проводится по той же схеме, по которой доказывается ключевая лемма, но с учетом оценок для m_2 и $\tau(k)$.

4. Построение потока целых точек на простейшем гиперboloиде

Мы строим поток целых примитивных точек на простейшем гиперboloиде

$$x_1 x_3 - x_2^2 = m, \quad m \neq 0. \quad (13)$$

Пусть $q > 0$ — нечетное число, взаимно простое с m , причём $\left(\frac{-m}{p}\right) = 1$ для всех простых делителей числа q .

Тогда найдется целое число u , для которого

$$u^2 + m \equiv 0 \pmod{q}. \quad (14)$$

Обозначим через $\mathbb{H}_m$ множество всех приведенных примитивных вектор-матриц нормы m .

Зададимся целым числом $s \gg \log |m|$ и построим поток $\varkappa_s = \varkappa(\mathbb{H}_m; q, u)$ на множестве $\mathbb{H}_m$, отвечающие числа m , q , u и множеству $\mathbb{H}_m$.

Под потоком $\varkappa(\mathbb{H}_m; q, u)$ мы будем понимать совокупность $r(m)$ цепочек длины s целых примитивных вектор-матриц

$$L_k^{(1)}, L_k^{(2)}, \dots, L_k^{(s)} \quad (k = 1, \dots, r(m)), \quad (15)$$

(здесь $r(m) = |\mathbb{H}_m|$), которые строятся следующим образом. В силу (14) по основной теореме арифметики матриц (см. [14], предложение 2.12) можно записать

$$u + L = QU, \quad N(Q) = q, \quad (16)$$

где Q и U — целые матрицы, причём Q — примитивная матрица, определяемая матрицей $u + L$ однозначно с точностью до ассоциированности справа.

При этом в силу условия $\text{НОД}(q, 2m) = 1$ выводим, что

$$L' = Q^{-1}LQ, \quad (17)$$

— целая примитивная вектор-матрица нормы m .

В случае $m > 0$ (двуполостный гиперboloид) матрицу Q можно однозначно выбрать так, чтобы L' была приведенной вектор-матрицей (см. [14]).

Если же $m < 0$ (случай однополостного гиперboloида), то в этом случае соответственно периоду неопределенных бинарных квадратичных форм $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}$ (см. [2]) рассматриваем период неопределенных вектор-матриц $L_1, L_2, \dots, L_{2n}$, который можно продолжить периодически $(\bmod 2n)$ влево и вправо, причем

$$L_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k_i \end{pmatrix} L_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \dots, 2n)$$

где k_i — некоторое целое число; L_{i+1} — соседняя слева для L_i .

Как и в [2] определим матрицы

$$E^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k_{i-1} \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k_1 \end{pmatrix},$$

где $i = 1, \dots, 2n$; $E^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ясно, что

$$\pm \prod_{i=1}^{2n} \begin{pmatrix} K_i & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = T + uL_1,$$

где T и u — наименьшие положительные решения уравнения Пелля $T^2 - |m|u^2 = 1$.

Обозначим $E_L = T - uL$. Следуя [16] определим матрицу $\varepsilon_k(E_k)^q \cdot E^{(r)}$, где $k = 2n \cdot q + r, q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 2n$.

Тогда

$$A_k^{-1}L_kA_k = L', \quad A_k = \varepsilon_kA. \quad (18)$$

Среди матриц $A_k = \varepsilon_kA$ ассоциированных слева с матрицей A и переводящую одну из вектор-матриц L_k периода $\{L_1, L_2, \dots, L_{2n}\}$ в вектор-матрицу L' по формуле (18) можно подобрать матрицу (см. [11]), играющую особую роль при применении ДЭМ. Существование такой матрицы гарантирует следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если L, L' — приведенные неопределенные вектор-матрицы и A — целая матрица с условием $A^{-1}LA = L'$, $N(A) > 0$, то найдется такая матрица $A' = EA = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$, ассоциированная с A слева, для которой $L'' = (A')^{-1}LA' = E^{-1}L'E$, эквивалентная L' приведена, причем $\alpha'\beta'\gamma'\delta' \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. в [11].

Матрицу A из этого предложения 4 будем называть следуя [16] полупримитивной (а по терминологии [11] — удобной).

Итак, в равенстве (17) можно подобрать матрицу Q так, чтобы L' была приведенной вектор-матрицей. Операцию, по которой L ставится в соответствие L' будем обозначать через T , так что

$$L' = \mathbb{T}L, \quad \mathbb{T}L = Q^{-1}LQ,$$

где $\mathbb{T}$ — обратимая операция, действующая на множестве $\mathbb{H}_m$ всех приведенных примитивных вектор-матриц нормы m . Операция $\mathbb{T} = \mathbb{T}(m, q, u)$ зависит от m, q, u , причем второму решению

—и сравнения (14) отвечает операция $\mathbb{T}^{-1}$. Операция $\mathbb{T}$ задает поток $\varkappa = \varkappa_s(m, q, u)$ любой заданной длины s на множестве $\mathbb{H}_m$, а именно каждой вектор-матрице $L \in \mathbb{H}_m$ отвечает цепочка

$$L \rightarrow L^{(1)} \rightarrow L^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow L^{(s)}, \quad L \in \mathbb{H}_m, \quad (19)$$

где $L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(s)} \in \mathbb{H}_m$ определяются рекуррентно

$$L^{(i)} = \mathbb{T}L^{(i-1)} = \mathbb{T}^i L, \quad L^{(0)} = L.$$

Полный поток $\varkappa_s(m, q, u)$ состоит из $r(m) = h(-m) + h'(-m)$ таких цепочек, где $h(-m)$ и $h'(-m)$ — число примитивных собственно и несобственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m .

Пусть q, u — целые числа с условием $u^2 + m \equiv 0 \pmod{q}$, причем $\text{НОД}(q, 2m) = 1$.

Рассмотрим часть $\varkappa = \varkappa_s(m; q, u)$, состоящую из $r' \leq r(m)$ цепочек

$$L_k^{(1)} \rightarrow L_k^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow L_k^{(s)}, \quad (k = 1, 2, \dots, r')$$

длины $s \gg \log |m|$, начинающихся с вектор-матриц $L_k \in \mathbb{H}_m$ ($k = 1, 2, \dots, r'$) произвольно выбранных в $\mathbb{H}_m$.

Пусть имеет место ключевая лемма $Z\{\xi, \xi_1, \eta\}$, причем

$$\xi(m), \xi_1(m), \eta(m) \rightarrow \infty;$$

$$\xi(m), \xi_1(m), \eta(m) = O\left(\frac{\log |m|}{\log \log |m|}\right).$$

Пусть при $|m| \rightarrow \infty$

$$r' \gg \frac{r(m)}{\log^e |m|},$$

где $e \geq 2$ — заданное число;

$$\frac{g^2 \log(g+1)}{\lambda} = O\left(\frac{\eta(m)}{\log \eta(m)}\right).$$

Следующее предложение, представляющее самостоятельный интерес, будет использовано при доказательстве эргодической теоремы для потоков целых точек на простейшем гиперболюиде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (предварительная эргодическая теорема). Пусть $m \neq 0$ — целое число; g — нечетное число, взаимно простое с m ; b_1, b_2, b_3 — целые числа с условием $f_0(b_1, b_2, b_3) \equiv m \pmod{g}$.

Пусть $\Lambda_m = \Lambda_{f_0, m}$ — ограниченная квадрируемая область на поверхности $f_0(b_1, b_2, b_3) = x_1 x_3 - x_2^2 = m$ с фиксированной проекцией $\tilde{\Lambda}_m = \frac{1}{\sqrt{|m|}} \Lambda_m$; $\lambda = \lambda(\Lambda_m) > 0$ — её гиперболическая мера. Пусть q, u — целые числа с условием $u^2 + m \equiv 0 \pmod{q}$ и $\text{НОД}(q, 2m) = 1$.

Рассмотрим часть $\varkappa'_s \subset \varkappa_s$ потока $\varkappa_s(m; q, u)$ состоящую из $r' \leq r(m)$ цепочек

$$L_k^{(1)} \rightarrow L_k^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow L_k^{(s)}, \quad (k = 1, 2, \dots, r')$$

длины s , начинающихся с вектор-матриц $L + k \in \mathbb{H}_m$ ($k = 1, \dots, r'$). Пусть имеет место ключевая лемма $Z\{\xi, \xi_1, \eta\}$.

Пусть $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s_1} \leq s$ — фиксированное подмножество индексов $j = 1, \dots, s$, причем

$$q^s \leq r(m), s_1 \gg \frac{\log |m|}{\delta(m)\tau(m)},$$

где

$$\delta(m) = \left\lfloor \frac{s \log \eta(m)}{\log q} \right\rfloor;$$

$\tau(m) \geq 2$ — неубывающая функция m ; пусть $j_{v+1} - j_v \geq \delta(m)$ ($v = 1, \dots, s_1 - 1$).

Тогда цепочки потока $\mathcal{X}'_s$ можно разбить на две категории:

(а) «хорошие», для которых

$$\begin{aligned} r_k(j_1 < j_2 < \dots < j_{s_1}) &= r_k(\mathcal{X}'_s; j_1 < j_2 < \dots < j_{s_1}; \Lambda_m; g, b_1, b_2, b_3) = \\ &= \# \left\{ j = j_v \mid v = 1, \dots, s_1, L_k^{(j)} \in \Lambda_m, L_k^{(j)} \equiv \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix} \pmod{g} \right\} = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} \cdot s_1 \left(1 + O \left(\sqrt{\tau(m)} \cdot \gamma(m) \right) \right); \end{aligned} \quad (*)$$

(б) «плохие» цепочки, общее количество которых

$$\ll \frac{1}{\log^e |m|} r';$$

постоянные, входящие в $r_k(j_1, \dots, j_{s_1})$ и в оценку для «плохих» цепочек, зависят от q , e и постоянных, входящих в ключевую лемму $Z\{\xi, \xi_1, \eta\}$.

Это предложение доказывается аналогично доказательству теоремы 3.2 работы [15] с учетом рассуждений, изложенных в [2], гл. VI, применяя при этом ключевую лемму и предположение 3.

5. Эргодические теоремы для целых точек простейшего гиперболюида в связи с гипотезами для L -функции Дирихле

ТЕОРЕМА 1 (эргодическая). Пусть $m \neq 0$ — целое число; g — нечетное число, взаимно простое с m ; b_1, b_2, b_3 — целые числа, удовлетворяющие сравнению

$$f_0(b_1, b_2, b_3) \equiv m \pmod{q}.$$

Пусть $\Lambda_m = \Lambda_{f_0, m}$ — ограниченная квадратируемая область на гиперболюиде $x_1 x_3 - x_2^2 = m$ с фиксированной проекцией $\tilde{\Lambda}_m = \frac{1}{\sqrt{|m|}} \Lambda_m$; $\lambda = \lambda(\Lambda_m) > 0$ — её гиперболическая мера (площадь).

Тогда цепочки можно разбить на две категории:

(а) «хорошие» цепочки, обладающие свойствами «эргодичности»: если k — индекс, отвечающий «хорошей» цепочке, то

$$\begin{aligned} \# \left\{ j \mid j = 1, \dots, s, \mathbb{T}^j L_k \in \Lambda_m, \mathbb{T}^j L_k \equiv \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix} \pmod{q} \right\} = \\ = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} s (1 + O(\gamma(m))); \end{aligned}$$

(б) «плохие» цепочки, которых мало, их общее количество

$$\ll \frac{1}{\log^e |m|} r',$$

где λ_0 — гиперболическая мера области приведения бинарных квадратичных форм определителя m ; $\rho(g, m)$ — число решений сравнения

$$f_0(b_1, b_2, b_3) \equiv m \pmod{g};$$

$$\gamma(m) = \frac{g\sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\log \eta(m)}{\eta(m)}};$$

постоянные, входящие в асимптотическую формулу для r_k и в оценку для «плохих» цепочек, зависят только от q , g и Λ_m и постоянных, входящих в ключевую лемму $Z\{\xi, \xi_1, \eta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = [c_0 \log |m|]$, где c_0 — малое фиксированное число. Следуя [17] каждую цепочку из $\mathcal{K}'_s$ следующим образом разобьём на «секции» — подцепочки, удовлетворяющие условиям предварительной эргодической теоремы.

Пусть $v = 0, 1, \dots, \delta(m) - 1, t_w = ws_0$ ($w = 0, 1, \dots, [\frac{s}{s_0}] - 1$) и значит, $t_{[\frac{s}{s_0}]} = s$. Тогда секцией (v, w) цепочки

$$Z^k: L_k^{(1)} \rightarrow L_k^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow L_k^{(s)}$$

мы будем называть (см. [17]) секцией (v, w) последовательность

$$Z_{v,w}^k = \left\{ L_k^{(j_{v,w}^{(1)})}, \dots, L_k^{(j_{v,w}^{(s_1)})} \right\},$$

где

$$j_{v,w}^{(l)} \equiv v \pmod{\delta(m)}, \quad t_w < j_{v,w}^{(l)} \leq t_{w+1} \\ \left(v = 0, \dots, \delta(m) - 1; w = 0, \dots, \left[\frac{s}{s_0} \right] - 1 \right).$$

Секции $Z_{v,w}^{(k)}$ попарно не пересекаются и в совокупности дают цепочку $Z^{(k)}$. Для каждой секции справедлива предварительная эргодическая теорема ибо

$$Z_s^{(k)} = \bigcup_{v=0}^{\delta(m)-1} Z_{v,w}^{(k)}$$

— цепочка, начинающаяся с $L_k^{(t_w+1)}$ длины $\leq 2s_0$. Действительно, в силу условия $t_w = ws_0$ имеем $t_{w+1} - t_w = s$ и значит,

$$t_w < j_{0,w}^{(1)} \leq t_w + s_0,$$

откуда $j_{0,w}^{(1)} \geq t_w + 1$.

Значит, $Z_w^{(k)}$ есть цепочка, начинающаяся с вектор-матрицы $L_k^{(t_w+1)}$. Кроме того, из условий которым подчинены индексы $j_{v,w}^{(l)}$ получаем, что цепочка $Z_w^{(k)}$ имеет длину $\leq 2s_0$. Секции цепочки разбиваются на «плохие» и «хорошие». При этом, если она представляет собой «хорошую» цепочку в смысле употребляемом в предварительной эргодической теореме (аналогичный смысл имеет понятие «плохой» секции). $\square$

Общее число плохих секций в силу оценки $\ll \frac{1}{\log^e |m|} r'$ для плохих цепочек будет

$$\ll \frac{1}{\log^e |m|} r' \cdot \delta(m) \left[\frac{s}{s_0} \right]. \quad (20)$$

Цепочку $Z^{(k)}$ будем называть «хорошей» если в ней число «плохих» секций

$$\ll \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} \sqrt{\tau(m)} \gamma(m) \delta(m) \left[\frac{s}{s_0} \right], \quad (21)$$

в противном случае цепочку $Z^{(k)}$ будем называть «плохой».

Ввиду (20) и (21) общее число «плохих» цепочек оценивается как

$$\ll \frac{1}{\log^{e-1} |m|} r'. \quad (22)$$

Для хороших цепочек в силу (20)–(21) мы получаем асимптотическую форму (*).

Используя ключевую лемму $Z\{\xi, \xi_1, \eta\}$ мы прямо из эргодической теоремы для целых точек простейшего гиперболоида выводим следующие предложения.

Следствие 1. Пусть в условиях эргодической теоремы

$$\frac{g^2 \log(g+1)}{\sqrt{\lambda}} = O\left(\frac{1}{\tilde{l}(m) |\log \tilde{l}(m)|}\right).$$

Тогда цепочки множества $\mathcal{X}'_s$ можно разбить на две категории:

(а) «плохие», общее количество которых

$$\ll \frac{1}{\log^e |m|} r';$$

(б) «хорошие», обладающие свойством «эргодичности»:

$$r_k = \frac{1}{\rho(g, m)} s \left(1 + O\left(\frac{g \sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\tilde{l}(m) |\log \tilde{l}(m)|}\right) \right)$$

постоянные, входящие в r_k зависят только от q , e и от постоянных, входящих в оценку $\ll \frac{1}{\log^e |m|} r'$.

Для получения результатов, лучших, чем следствие 1, нужно использовать дополнительные сведения о поведении $L(s, \chi)$ или $\tilde{l}(m)$.

Следствие 2. В условиях следствия 1 пусть

$$\frac{g^2 \log(g+1)}{\sqrt{\lambda}} = O\left(\frac{\log \log |m|}{\log \log \log |m|}\right).$$

Пусть справедлива гипотеза (K). Тогда цепочки потока $\mathcal{X}'_s$ разбиваются на две категории:

(а) «плохие», которых $O(r')$,

(б) «хорошие» цепочки, для которых

$$r_k = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} s \left(1 + O\left(\frac{g \sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\log \log \log |m|}{\log \log |m|}}\right) \right).$$

Следствие 2 вытекает из следствия 1.

Следствие 3. Пусть в условиях следствия 1

$$\frac{g^2 \log(g+1)}{\lambda} = O\left(\sqrt{\log|m|}\right),$$

прич $m = m_1 m_2$, где m_1 — бесквадратно, а $m_2 \ll |m|^{\frac{c}{\sqrt{\log|m|} \log \log|m|}}$.

Пусть выполнена гипотеза (H). Тогда цепочки потока $\mathcal{X}'_s$ разбиваются на две категории:

- (а) «плохие» цепочки, общее количество которых $O(r')$;
- (б) «хорошие» цепочки, для которых

$$r_k = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} s \left(1 + O\left(\frac{g \sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(\log m)^{\frac{1}{4}}} \right) \right).$$

Из эргодической теоремы можно вывести следующую «теорему перемешивания» для простейших гиперболюидов.

ТЕОРЕМА 2 (о перемешивании). В обозначениях и условиях эргодической теоремы пусть $\tau(m) \geq 2$ — неубывающая функция, причём $\tau(m) = O(\gamma(m))$. Тогда индексы $j = 1, \dots, s$ можно разбить на две категории:

- (а) «хорошо перемешивающие» индексы j , для которых

$$\begin{aligned} r^{(j)} &= r^{(j)}(\mathcal{X}'_s; \Lambda_m; g, b_1, b_2, b_3) = \\ &= \# \left\{ k \mid k = 1, \dots, r', \mathbb{T}^j L_k \in \Lambda_m, \mathbb{T}^j L_k \equiv \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix} \pmod{g} \right\} = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} r' (1 + O(\tau(m) \gamma(m))); \end{aligned}$$

- (б) «плохие» индексы j , общее число которых

$$\ll \frac{1}{\tau(m)} s,$$

постоянные, входящие в $r^{(j)}$, зависят только от q , e и постоянных, входящих в ключевую лемму $Z\{\xi, \xi_1, \eta\}$.

Следствие. В условиях эргодической теоремы и при выполнении гипотезы (H) индексы j в потоке $\mathcal{X}'_s$ можно разбить на две категории:

- (а) «хорошие» индексы j , для которых

$$r^{(j)} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} r' \left(1 + O\left(\frac{g \sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}} \frac{\tau(m)}{(\log|m|)^{\frac{1}{4}}} \right) \right);$$

- (б) «плохие» индексы j , общее число которых

$$\ll \frac{1}{\tau(m)} s.$$

Применяя это следствие к потоку $\mathcal{X}'_s$, в котором для каждого $j = 1, \dots, s$ его «сечение» $J_j = \{\mathbb{T}^{j-1} L_k \mid k = 1, \dots, r'\}$ инвариантно, т.е. например $J_j = J_1$, мы фиксируя один из «хороших» индексов, придем к асимптотической формуле для числа $r(\Lambda_m; g, b_1, b_2, b_3)$ целых примитивных точек на гиперболюиде с условиями

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_m, (x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}$$

с остаточным членом, указанным в следствии.

Заключение

Изложенные в работе результаты могут быть перенесены на некоторые более общие виды тернарных квадратичных форм f . Однако род таких форм может быть неодноклассным и поток примитивных точек строится сложнее с помощью рассмотрения всех гиперboloидов рода f . Представляет также интерес вопрос о получении в эргодических теоремах для целых точек гиперboloидов задаваемых формой f с логарифмическим понижением в остаточном члене асимптотических формулы. Пользуясь гипотезой (H) , результат такого вида для положительных тернарных квадратичных форм получен в [3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами// Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, Т. 4, №4/5, С. 363—402.
2. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Изд-во Ленинградского университета, 1967, — 208 с.
3. Малышев А. В., Пачев У.М. О представлении целых чисел положительными тернарными квадратичными формами (новый вариант дискретного эргодического метода)// Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1979, Т. 82, с. 33—87.
4. Голубева Е. П. О представлении больших чисел тернарными квадратичными формами// ДАН СССР, 1970, Т. 191, №3, С. 519—521.
5. Голубева Е. П. Асимптотика числа целых точек на некоторых эллипсоидах// Мат. заметки, 1972, Т. 11, №6, С. 625—634.
6. Виноградов А. И. Общее уравнение Харди—Литтлвуда// Мат. заметки, 1967, Т. 1, №2, С. 189—197.
7. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах// Л., издво ЛГУ, 1961, 208 с.
8. Малышев А. В., Широков Б. М. Новое доказательство ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц второго порядка// Вестн. Ленингр. унта, — 1991. Сер. 1, вып. 2, — С. 34—40.
9. Duke W. Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maas forms// Invent. Math. 1988. V. 92. P. 78—90.
10. Iwaniec H. Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight// Invent. Math. 87. 385—401. (1987).
11. Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперboloиде и эргодические теоремы// Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, Т. 26, №5, С. 721—752.
12. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами// Труды Мат. инта АН СССР, 1962, Т. 65, — 212 с.
13. Малышев А. В., Пачев У. М. Об остаточных членах в эргодических теоремах для целых точек на некоторых двуполостных гиперboloидах// Аналитическая теория чисел. Межвуз. сб. Петрозаводск, 1986, С. 46—51.

14. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т. 93. (1980), С. 41–86.
15. Пачев У. М. О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперboloидах // Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т. 93. (1980). С. 87–141.
16. Малышев А. В., Нгуен Нгор Гой О распределение целых точек на некоторых однополостных гиперboloидах Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983, Т. 121, С. 83–93.
17. Белова Н. Н., Малышев А. В. Эргодические свойства целых точек на эллипсоидах рода $G_{[\Omega,1]}$ // Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т. 106. 1981. С. 17–51.

REFERENCES

1. Linnik Yu. V. 1940, "On the representation of large numbers by positive ternary quadratic forms", *Izv. AN USSR. Ser. mat.*, 4, pp. 363–402.
2. Linnik Yu. V. 1967, *Ergodic properties of algebraic fields* Leningrad.
3. Malyshev A. V., Pachev U. M. 1979, "Representation of integers by positive ternary quadratic forms (a new modification of the discrete ergodic method)", *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*, V. 1, pp. 33–87.
4. Golubeva E. P. 1970, "On the representation of large numbers by ternary quadratic forms" *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 191, pp. 519–521.
5. Golubeva E. P. 1972, "Asymptotic behaviour of the number of integer points on certain ellipsoids" *Mat. Zametki*, 11, pp. 625–634.
6. Vinogradov A. I. 1967, "The general Hardy–Littlewood equation", *Mat. Zametki*, 1, pp. 189–197.
7. Linnik Yu. V. 1961, *The dispersion method in binary additive problems* // L., 208 p.
8. Malyshev A. V., Shirokov B. M. 1991, "A new proof of a key lemma of the discrete ergodic method of second–order vector matrices", *Vestn. Leningr. univ.*, 24, no. 2, pp. 39–45.
9. Duke W. 1988, "Hyperbolic distribution problems and half–integral weight Maas forms", *Invent. Math.* V. 92. pp. 78–90.
10. Iwaniec H. "Fourier coefficients of modular forms of half–integral weight", *Invent. Math.* 87 (1987), pp. 385–401.
11. Skubenko B. F. 1962, "Asymptotic distribution of integral points on hyperboloids of one sheet and ergodic theorems", *Izv. AN USSR. Ser. mat.* 26, no. 5, pp. 721–752.
12. Malyshev A. V. 1962, "On the representation of integers by positive quadratic forms", *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 65 *Acad. Sci. USSR. Moscow.*, pp. 3–212.
13. Malyshev A. V., Pachev U. M. 1986, "Estimates of the remainder term in ergodic theorems for integral points on some two–sheeted hyperboloids", *Petrosavodsk.*, pp. 46–51.
14. Malyshev A. V., Pachev U. M. 1980, "On the arithmetic of matrices of order 2", *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*. V. 93. pp. 41–86.
15. Pachev U. M. 1980, "On the distribution of integer points on certain two–sheeted hyperboloids", *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*. V. 93. pp. 87–141.

16. 1983, Malyshev A. V., Ngueyen Ngror Khooy 1983, "Distribution of integral points on some hyperboloids of one sheet", *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*. V. 121, pp. 83–93.
17. Belova N. N., Malyshev A. V. 1981, "Ergodic properties of integral points on ellipsoids of genus $G_{[\Omega,1]}$ ", *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*. V. 106. pp. 17–51.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова

Получено 09.12.2015 г.

Принято в печать 10.03.2016 г.