

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-368-381

Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием¹

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической монохроматической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным анизотропным упругим покрытием. Полагается, что тело располагается в свободном пространстве, заполненном идеальной жидкостью. Получено аналитическое решение задачи.

В случае установившихся колебаний распространение малых возмущений в идеальной жидкости описывается скалярным уравнением Гельмгольца. Поле излучения сферического источника записывается в виде разложения в ряд по цилиндрическим волновым функциям. Распространение упругих волн в изотропном упругом цилиндре описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца. Колебания неоднородного анизотропного упругого цилиндрического слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Методом перевала получена асимптотическая формула для дальней зоны поля.

Проведены численные расчеты частотных характеристик рассеянного поля для упругих цилиндров с однородными и неоднородными трансверсально-изотропными покрытиями, а также для случая однородного изотропного покрытия. Выявлено существенное влияние и взаимовлияние неоднородности и анизотропии материала покрытия на акустические свойства рассеивающего цилиндрического тела.

Ключевые слова: дифракция, сферическая звуковая волна, однородный упругий цилиндр, неоднородное анизотропное покрытие.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 368–381.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-368-381

**Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder
with an non-uniform anisotropic coating**

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

In paper the problem of the diffraction of a spherical monochromatic sound wave on a homogeneous isotropic elastic cylinder with a radially non-uniform anisotropic elastic coating. It is assumed that the body is located in a free space filled with an ideal liquid. The analytical solution of the problem is obtained.

In the case of steady-state oscillations, the propagation of small perturbations in an ideal fluid is described by the Helmholtz scalar equation. The radiation field of a spherical source is written as a series expansion in cylindrical wave functions. The propagation of elastic waves in an isotropic elastic cylinder is described by the scalar and vector Helmholtz equations. The oscillations of an non-uniform anisotropic elastic cylindrical layer are described by the general equations of motion of a continuous medium.

The asymptotic formula for the far field zone is obtained by the steepest descent method.

Numerical calculations of the frequency characteristics of the scattered field are carried out for elastic cylinders with homogeneous and inhomogeneous transversally isotropic coatings, as well as for the case of a homogeneous isotropic coating. A significant influence and mutual influence of the inhomogeneity and anisotropy of the coating material on the acoustic properties of the scattering cylindrical body is revealed.

Keywords: diffraction, spherical sound wave, uniform elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic coating.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2022, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 368–381.

1. Введение

Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. Обычно покрытия применяются для повышения звукопоглощения и уменьшения отражения звука в определенном направлении. Значительный интерес представляют рассеиватели, имеющие форму кругового цилиндра, так как многие реальные объекты достаточно хорошо аппроксимируются телами цилиндрической формы. Задачи дифракции

звуковых волн на одиночных цилиндрах с покрытиями, находящихся в безграничной жидкости, рассматривались во многих работах.

Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. В [1] для обеспечения заданного уровня гашения поля дифракции на абсолютно твердом цилиндре использовалось перфорированное покрытие в виде набора резонаторов Гельмгольца, распределенных по окружности цилиндра. В [2] предложена общая схема формирования поглощающих и нерассеивающих покрытий нового типа с повышенной эффективностью – т.е. покрытий с протяженной реакцией. В [3] выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов однородного покрытия и упругой цилиндрической оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Изменение звукоотражающих свойств упругих тел можно осуществить с помощью непрерывно-неоднородных покрытий. С помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Серия работ посвящена изучению влияния неоднородных изотропных покрытий твердых тел цилиндрической формы на их звукоотражающие свойства. Задача о рассеянии плоской звуковой волны жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решена в [4]. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [5], а с дискретно-слоистым покрытием — в [6]. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [7].

Однако представление первичного акустического поля в виде плоской волны справедливо только тогда, когда расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике это условие часто не выполняется. В этом случае нельзя не учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям дифракционной картины. Наибольший интерес представляет изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием изучена в [8, 9], при этом в [8] цилиндр полагался абсолютно жестким, в [9] — изотропным упругим. Решение задачи дифракции сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием получено в [10].

Во всех упомянутых выше работах неоднородные покрытия цилиндрических тел рассматривались как изотропные. Анизотропия материала покрытия не учитывалась. Решения задач о рассеянии плоской и цилиндрической звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем получены в [11, 12]. В работах [13, 14] рассматривалась дифракция плоских звуковых волн для абсолютно жесткого и упругого цилиндров с трансверсально-изотропным неоднородным упругим покрытием. В [15] осуществлено математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука в случае, когда источником первичного акустического возмущения является цилиндрическая звуковая волна.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородной изотропный упругий цилиндр бесконечной длины и радиуса r_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр покрыт упругим радиально-неоднородным трансверсально-изотропным слоем с внешним радиусом r_1 . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что коорди-

натная ось z совпадает с осью вращения цилиндра и является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия. Полагаем, что модули упругости λ_{ijkl} материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты r : $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(r)$, $\rho = \rho(r)$.

Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, цилиндрические координаты которого (r_0, φ_0, z_0) . Потенциал скорости падающей волны

$$\Psi_0 = A \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0| - i\omega t)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|}, \quad (2.1)$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_0$ — радиус-векторы точки наблюдения и точки, в которой располагается источник; ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном трансверсально-изотропном слое.

3. Аналитическое решение задачи

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [16]:

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля. При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи потенциал Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_S — потенциал скорости рассеянной волны.

Запишем сферическую звуковую волну (2.1) в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям [17]

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= A \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_0(h) dh, \\ \tilde{\Psi}_0(h) &= \frac{i}{2} e^{ih(z-z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(k_h r_0) J_n(k_h r), & r < r_0; \\ J_n(k_h r_0) H_n(k_h r), & r > r_0. \end{cases} \\ k_h &= \sqrt{k^2 - h^2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка n ; $H_n(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Без ограничения общности положим $z_0 = 0$.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал скорости рассеянной волны Ψ_S , являющийся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде [17]

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh. \quad (3.2)$$

Рассмотрим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре. Представим вектор смещения $\mathbf{u}_0$ частиц однородного изотропного упругого цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } F + \text{rot } \Phi,$$

где F и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [16]:

$$\begin{aligned}\Delta F + k_l^2 F &= 0, \\ \Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi &= 0,\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Представим вектор Φ в виде [5]

$$\Phi = \text{rot } (W \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где W и M — функции пространственных координат; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z .

Тогда векторное уравнение (3.3) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций W и M

$$\begin{aligned}\Delta W + k_\tau^2 W &= 0, \\ \Delta M + k_\tau^2 M &= 0.\end{aligned}$$

С учетом условия ограниченности функции F , W и M будем искать в виде [17]

$$\begin{aligned}F &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(h) J_n(k_1 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ W &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(h) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n(h) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - h^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - h^2}$.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_0$ в цилиндрической системе координат записываются через функции F , W , M следующим образом

$$u_{0r} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi}, \quad u_{0\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial z} - k_\tau \frac{\partial M}{\partial r}, \quad u_{0z} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k_\tau^2 W.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{0ij} и вектора смещения $\mathbf{u}_0$ в однородном изотропном цилиндре имеют вид [18]:

$$\begin{aligned}\sigma_{0rr} &= \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}_0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \quad \sigma_{0\varphi\varphi} = \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}_0 + 2\mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{0r}}{r} \right), \\ \sigma_{0zz} &= \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}_0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial z}, \quad \sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r} \right), \\ \sigma_{0rz} &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_{0z}}{\partial r} + \frac{\partial u_{0r}}{\partial z} \right), \quad \sigma_{0\varphi z} = \mu_0 \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0z}}{\partial \varphi} \right),\end{aligned}\tag{3.5}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) + \frac{\partial u_{0z}}{\partial z}$.

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где u_r , u_φ , u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое; $\rho = \rho(r)$.

Для трансверсально-изотропного покрытия цилиндра осью упругой симметрии является всякая прямая, проходящая через ось анизотропии и перпендикулярная к ней. При этом поверхностями изотропии являются цилиндрические поверхности, а тензор модулей упругости Λ в соответствии с нотацией Фойгта [19] может быть записан в матричной форме

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix},$$

где λ_{ik} — модули упругости материала покрытия в двухиндексном обозначении, где $i, k = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

В соответствии с обобщенным законом Гука компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами тензора деформации ε_{ij} соотношениями [18]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_{11}\varepsilon_{rr} + \lambda_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{12}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{23}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{22}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\varphi}, & \sigma_{rz} &= 2\lambda_{55}\varepsilon_{rz}, & \sigma_{\varphi z} &= (\lambda_{22} - \lambda_{23})\varepsilon_{\varphi z}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим, что представленные выражения позволяют легко получить описание волновых полей для случая изотропного неоднородного покрытия цилиндра. Для этого достаточно положить $\lambda_{11} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{12} = \lambda$, $\lambda_{22} = \lambda + 2\mu$, $\lambda_{23} = \lambda$, $\lambda_{55} = \mu$, где λ и μ — модули упругости неоднородной изотропной упругой среды.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r , u_φ , u_z будем искать в виде рядов Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ u_\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ u_z &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{3n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя разложения (3.9) в уравнения (3.6) с учетом (3.7) и (3.8), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ для каждого n и h :

$$\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r, h), U_{2n}(r, h), U_{3n}(r, h))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$ — матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} a_{n11} &= \lambda_{11}r^2, \quad a_{n22} = \lambda_{55}r^2, \quad a_{n33} = \lambda_{55}r^2, \quad a_{nij} = 0, \quad i \neq j, \\ b_{n11} &= \lambda'_{11}r^2 + \lambda_{11}r, \quad b_{n12} = b_{n21} = in(\lambda_{12} + \lambda_{55})r, \quad b_{n13} = b_{n31} = ih(\lambda_{12} + \lambda_{55})r^2, \\ b_{n22} &= b_{n33} = \lambda'_{55}r^2 + \lambda_{55}r, \quad b_{n23} = b_{n32} = 0, \\ c_{n11} &= \omega^2r^2\rho - \lambda_{55}(n^2 + h^2r^2) + \lambda'_{12}r - \lambda_{22}, \quad c_{n12} = in(\lambda'_{12}r - \lambda_{55} - \lambda_{22}), \\ c_{n13} &= ih(\lambda'_{12}r + \lambda_{12} - \lambda_{23})r, \quad c_{n21} = in(\lambda'_{55}r + \lambda_{55} + \lambda_{22}), \\ c_{n22} &= \omega^2r^2\rho - n^2\lambda_{22} - \lambda'_{55}r - \lambda_{55} + h^2r^2(\lambda_{23} - \lambda_{22})/2, \quad c_{n23} = c_{n32} = -hn(\lambda_{22} + \lambda_{23})r/2, \\ c_{n31} &= ih(\lambda'_{55}r + \lambda_{55} + \lambda_{23})r, \quad c_{n33} = \omega^2r^2\rho - h^2\lambda_{22}r^2 + n^2(\lambda_{23} - \lambda_{22})/2. \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_n(h)$, $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$ разложений (3.2), (3.4) и функции $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ из разложений (3.9) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений [5]:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (3.11)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

при $r = r_2$

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}. \quad (3.12)$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1n}(r_1, h)$:

$$A_n(h) = -\frac{AiH_n(k_h r_0)k_h J'_n(k_h r_1) + 2i\omega U_{1n}(r_1, h)}{2k_h H'_n(k_h r_1)}. \quad (3.13)$$

Из оставшихся граничных условий на внешней поверхности цилиндра при $r = r_1$ находим три краевых условия, которым должна удовлетворять краевая задача (3.10)

$$\left(\frac{1}{r} \hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{E}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} = \mathbf{W}_n, \quad (3.14)$$

где элементы матриц $\mathbf{W}_n = (w_{n1}, 0, 0)^T$; $\mathbf{E}_n = (e_{nij})_{3 \times 3}$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} w_{n1} &= \frac{iA\rho_1\omega H_n(k_h r_0)}{\pi k r H'_n(kr)}, \quad e_{n11} = \frac{\lambda_{12}}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n(k_h r)}{k H'_n(k_h r)}, \\ e_{n12} &= \frac{in\lambda_{12}}{r}, \quad e_{n13} = ih\lambda_{12}, \quad e_{n21} = \frac{in\lambda_{55}}{r}, \quad e_{n22} = -\frac{\lambda_{55}}{r}, \\ e_{n23} &= e_{32} = e_{33} = 0, \quad e_{n31} = ih\lambda_{55}. \end{aligned}$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находим неизвестные коэффициенты $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$ выраженные через $U_{1n}(r_2, h)$, $U_{2n}(r_2, h)$, $U_{3n}(r_2, h)$:

$$\mathbf{K}_n = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{U}_n,$$

где $\mathbf{K}_n = (B_n(h), C_n(h), D_n(h))^T$; $\mathbf{M}_n = (m_{nij})_{3 \times 3}$:

$$\begin{aligned} m_{n11} &= k_1 J'_n(k_1 r_2), \quad m_{n12} = ihk_2 J'_n(k_2 r_2), \quad m_{n13} = ink_\tau J_n(k_2 r_2)/r_2, \\ m_{n21} &= inJ_n(k_1 r_2)/r_2, \quad m_{n22} = -hnJ_n(k_2 r_2)/r_2, \quad m_{n23} = -k_2 k_\tau J'_n(k_2 r_2), \\ m_{n31} &= ihJ_n(k_1 r_2), \quad m_{n32} = k_2^2 J_n(k_2 r_2), \quad m_{n33} = 0. \end{aligned}$$

Из оставшихся трех граничных условий (3.12), состоящих в равенстве напряжений, находим

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{F}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_2} = \mathbf{G}_n \mathbf{K}_n,$$

где $\mathbf{F}_n = (f_{npm})_{3 \times 3}$, $\mathbf{G}_n = (\gamma_{npm})_{3 \times 3}$ — матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} f_{n11} &= \lambda_{12}(r_2)/r_2, \quad f_{n12} = in\lambda_{12}(r_2)/r_2, \quad f_{n13} = ih\lambda_{12}(r_2), \quad f_{n21} = in\lambda_{55}(r_2)/r_2, \\ f_{n22} &= -\lambda_{55}(r_2)/r_2, \quad f_{n23} = f_{n32} = f_{n33} = 0, \quad f_{n31} = ih\lambda_{55}(r_2), \\ \gamma_{n11} &= 2\mu_0 k_1^2 J''_n(k_1 r_2) - \lambda_0(k_1^2 + h^2) J_n(k_1 r_2), \quad \gamma_{n12} = 2ih\mu_0 k_2^2 J''_n(k_2 r_2), \\ \gamma_{n13} &= 2ink_\tau \mu_0 (k_2 r_2 J'_n(k_2 r_2) - J_n(k_2 r_2))/r_2^2, \quad \gamma_{n21} = 2in\mu_0 (k_1 r_2 J'_n(k_1 r_2) - J_n(k_1 r_2))/r_2^2, \\ \gamma_{n22} &= 2nh\mu_0 (k_2 r_2 J'_n(k_2 r_2) - J_n(k_2 r_2))/r_2^2, \\ \gamma_{n23} &= -\mu_0 k_\tau (k_2^2 r_2^2 J''_n(k_2 r_2) - k_2 r_2 J'_n(k_2 r_2) + n^2 J_n(k_2 r_2))/r_2^2, \\ \gamma_{n31} &= 2ih\mu_0 k_1 J'_n(k_1 r_2), \quad \gamma_{n32} = -\mu_0 k_2 (h^2 - k_2^2) J'_n(k_2 r_2), \\ \gamma_{nq33} &= -nh\mu_0 k_\tau J_n(k_2 r_2)/r_2. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее соотношение выражение для $\mathbf{K}_n$, получим краевые условия для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на внутренней поверхности покрытия:

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{T}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_2} = 0, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{T}_n = \mathbf{F}_n - \mathbf{G}_n[\mathbf{M}_n]^{-1}$.

Решая краевую задачу (3.10), (3.14), (3.15) каким-либо методом, определяем неизвестные функции $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ из разложений (3.9). Затем вычислим коэффициенты $A_n(h)$, $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$. В результате получаем аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

Подробный анализ интеграла (3.2) был проведен в работе [10]. Здесь покажем способ вычисления такого интеграла в частном случае. В дальней зоне акустического поля при $kr \gg 1$ интеграл (3.2) может быть вычислен методом перевала [20]

$$\int_{\Gamma} g(\gamma) e^{Qf(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi}{Q|f''(\gamma_0)|}} g(\gamma_0) e^{Qf(\gamma_0)+i\phi}, \quad Q \gg 1, \quad (3.16)$$

где Γ — некоторый контур на комплексной плоскости γ ; ϕ — угол, определяющий направление линии наискорейшего убывания функции $\operatorname{Re} f(\gamma)$, проходящей через точку перевала γ_0 , определяемую как точку резкого максимума функции $f(\gamma)$, т.е. $f'(\gamma_0) = 0$, $f''(\gamma_0) \neq 0$.

Заменим цилиндрическую функцию Ганкеля в (3.2) ее асимптотической формулой при больших значениях аргумента [21]

$$H_n(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \exp[i(k_h r - \pi n/2 - \pi/4)],$$

а также выполним замену $h = k \sin \gamma$. Получим:

$$\begin{aligned} \Psi_S &= e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n(k \sin \gamma) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] k \cos \gamma d\gamma, \end{aligned}$$

где Γ — контур Зоммерфельда на комплексной плоскости γ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$).

Тогда точка перевала γ_0 определяется как

$$\gamma_0 = \arctan \left(\frac{z}{r} \right),$$

а угол наискорейшего спуска может быть найден из уравнения [22]

$$2\phi + \arg f''(\gamma_0) = \pi + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Для рассматриваемого случая $\phi = -\pi/4$.

В результате в соответствии с формулой (3.16) будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi_S &\approx \frac{2}{r} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] k \cos \gamma_0 \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{n+1} A_n(k \sin \gamma_0) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned}$$

4. Численные исследования

Были проведены расчеты частотной зависимости безразмерной амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ от волнового размера тела kr_1 в фиксированной точке наблюдения с цилиндрическими координатами $(r, \varphi, z) = (100, \pi, 0)$. Полагалось, что магниевый цилиндр ($\rho_0 = 1,74 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 1,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_2 = 0,8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). При расчетах использовались следующие характерные значения модулей упругости, приведенные в таблице.

Характерные величины модулей упругости ($\times 10^{10}$) Н/м²

Материал	λ_{11}^1	λ_{12}^1	λ_{22}^1	λ_{23}^1	λ_{55}^1
Тип 1	5,74	3,28	16,4	3,28	2,54
Тип 2	16,4	0,82	5,74	0,82	2,95
Изотропный	10,5	5,3	10,5	5,3	2,6

Изотропной базой материалов был алюминий с характерной плотностью $\rho^1 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Краевая задача (3.10), (3.14), (3.15) решалась методом сплайн-коллокации [23], а в качестве порядка усечения бесконечных рядов использовалась величина $N = 2[kr_1] + 1$, где $[\cdot]$ — целая часть числа. Интеграл (3.2) вычислялся с использованием квадратурной формулы Гаусса [24].

Предполагалось, что точечный источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 4r_1$ и $\varphi_0 = \pi$.

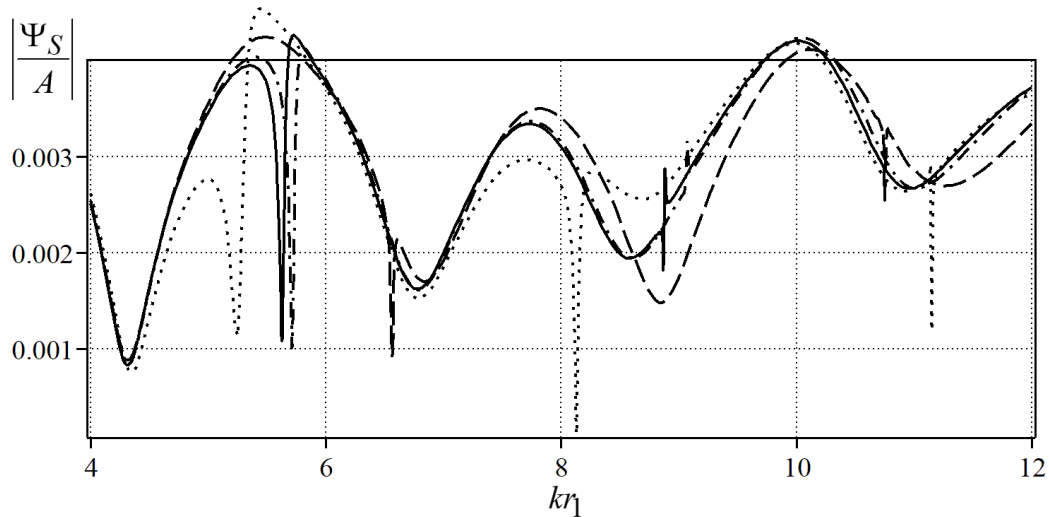


Рис. 1: Зависимость амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием

На рис. представлены частотные зависимости амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ в диапазоне частот, соответствующем изменению волнового размера в диапазоне $4 \leq kr_1 \leq 12$ для цилиндра с неоднородным покрытием, механические характеристики которого менялись по законам

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ik}^1, \quad \rho = \rho^1 \cdot f(r), \quad f(r) = 0.75 \left[\left(\frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \right)^2 + 1 \right], \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

При этом штриховая и пунктирная линии соответствуют материалам с анизотропией типов 1 и 2 соответственно, сплошной линией построена кривая для изотропного случая, а штрихпунктирной для случая изотропного однородного покрытия, где полагалось $\rho = \rho^1$.

Таким образом из рис. можно видеть как значительное влияние неоднородности материала покрытия на рассеянное акустическое поле, так и существенное взаимовлияние неоднородности и анизотропии материала покрытия.

5. Заключение

На основе полученного аналитического решения задачи проведены численные расчеты, которые выявили возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью взаимовлияния неоднородности и анизотропии упругих покрытий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
3. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
4. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
5. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
6. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
7. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.
8. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
9. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472.
10. Толоконников Л.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215-226.
11. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 134-138.

12. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 9-11.
13. Ларин Н. В., Белкин А. Э. Рассеяние звука на твёрдом цилиндре с упругим анизотропным неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 11. С. 107–117.
14. Скобельцын С. А. Задача о дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 11. С. 230–239.
15. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 293–311.
16. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
17. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
20. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
21. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
22. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
23. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
24. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

REFERENCES

1. Ivanov, V. P. 2006, "Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating", *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.
2. Bobrovnikskii, Yu. I. 2008, "A nonscattering coating for a cylinder", *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.
3. Kosarev, O. I. 2012, "Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating", *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34-37, [in Russian].
4. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
5. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].

6. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164-169.
7. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733-742.
8. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].
9. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215-226, [in Russian].
11. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, "Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylinder layer", *Acoustical Physics*, vol. 41, no 1, pp. 114-117.
12. Tolokonnikov L. A. 1998, "Difraktsiia tsilindricheskikh voln na neodnorodnoi transversalnoizotropnoi tsilindricheskoi obolochke", *Oboronnaia tekhnika*, no. 4-5, pp. 9-11, [in Russian].
13. Larin, N. V. & Belkin, A. E. 2021, "Sound scattering on a solid cylinder with an elastic anisotropic inhomogeneous coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11, pp. 107-117, [in Russian].
14. Skobel'tsyn, S. A. 2021, "Diffraction problem of plane sound wave by elastic cylinder with transversely-isotropic inhomogeneous coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11, pp. 230-239, [in Russian].
15. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2022, "Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293-311, [in Russian].
16. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
17. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
18. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprężystości", PWN, Warszawa.
19. Fedorov, F. I. 1965, "Theory of elastic waves in crystals", Nauka, Moscow, 388 p., [in Russian].
20. Ilyin, A. M. & Danilin, A. R. 2009, "Asymptotic Methods in Analysis", Fizmatlit, Moscow, 248 p, [in Russian].
21. Lebedev, N. N. 1963, "Special Functions and their Applications", Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].
22. Bhatnagar, P. L. 1979, *Nonlinear Waves in One-dimensional Dispersive Systems*, Oxford University Press, 142 p.

-
23. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, "*Spline function methods*", Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].
 24. Samarskii, A. A. & Gulin, A. V. 1989, "*Numerical methods*", Moscow, Nauka, 432 p., [in Russian].

Получено: 21.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022