

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-350-367

**Определение параметров неоднородности
анизотропного внешнего слоя упругого шара
по рассеянию плоской звуковой волны¹**

С. А. Скобельцын

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается задача определения вида неоднородности внешнего анизотропного слоя упругого шара по рассеянному полю плоской звуковой волны. Предполагается, что плотность и модули упругости материала внешнего слоя являются линейными функциями расстояния от центра шара. Считается, что законы изменения всех модулей упругости идентичны. По акустическому давлению в окрестности шара требуется определить коэффициенты в зависимостях для плотности и модулей упругости. Задача дифракции звука на шаре решается численно-аналитическим методом. Рассеянное акустическое поле и поле упругих колебаний в однородной части шара представляется разложением по сферическим гармоникам. Для компонентов смещения и вектора напряжений в неоднородном слое численно решается краевая задача, построенная на основе уравнений движения и граничных условий на поверхностях слоя. Для определения искоемых коэффициентов в зависимостях плотности и модулей упругости внешнего слоя выполняется сравнение наблюдаемых значений давления в некотором множестве точек на сферической поверхности с центром в центре шара и расчетных значений давления в этих точках. Предложен вариант формирования индикатора близости наблюдаемых и расчетных значений давления на основе разбиения точек наблюдения на группы. Предлагается использовать индикатор близости для идентификации коэффициентов в законах неоднородности плотности и модулей упругости в слое.

Ключевые слова: рассеяние звука, плоская звуковая волна, слоисто-неоднородный упругий шар, трансверсально-изотропный слой, численно-аналитическое решение задачи дифракции, коэффициентная обратная задача, индикатор близости.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

С. А. Скобельцын. Определение параметров неоднородности анизотропного внешнего слоя упругого шара по рассеянию плоской звуковой волны // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 350–367.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-350-367

Determination of the inhomogeneity parameters of an elastic ball anisotropic outer layer by the scattering of a plane sound wave

S. A. Skobel'tsyn

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: skbl@rambler.ru

Abstract

The problem of determining the type of inhomogeneity of the external anisotropic layer of an elastic ball from the scattered field of a plane sound wave is considered. It is assumed that the density and elastic moduli of the outer layer material are linear functions of the distance from the center of the ball. It is believed that the laws of dependency of all moduli of elasticity are identical. According to the acoustic pressure in the vicinity of the ball, it is required to determine the coefficients in the dependences for the density and elastic moduli. The problem of sound diffraction by a ball is solved by a numerical-analytical method. The scattered acoustic field and the field of elastic oscillations in the homogeneous part of the ball is represented by an expansion in terms of spherical harmonics. For the displacement and stress vector components in an inhomogeneous layer, a boundary value problem is numerically solved based on the equations of motion and boundary conditions on the layer surfaces. To determine the desired coefficients in the dependences of the density and elastic moduli of the outer layer, the observed pressure values are compared at a certain set of points on a spherical surface centered at the center of the ball and the calculated pressure values at these points. A variant of forming an indicator of the proximity of observed and calculated pressure values based on the division of observation points into groups is proposed. It is proposed to use the proximity indicator to identify the coefficients in the laws of density inhomogeneity and elastic moduli in the layer.

Keywords: sound scattering, plane sound wave, layered inhomogeneous elastic ball, transversally isotropic layer, numerical-analytical solution of the diffraction problem, coefficient inverse problem, proximity indicator.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

S. A. Skobel'tsyn, 2022, "Determination of the inhomogeneity parameters of an elastic ball anisotropic outer layer by the scattering of a plane sound wave", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 350–367.

1. Введение

Анализ акустического поля при рассеянии звуковой волны объектом позволяет судить о некоторых свойствах этого объекта. В качестве предмета для идентификации могут выступать: положение объекта (абсолютное в пространстве и относительное в ряду других объектов), размер, форма, ориентация, элементы внутренней структуры – наличие полостей, свойства материала объекта (внешних поверхностей и заполнителя). Ряд задач такого рода решается в гидроакустике, сейсмологии, ультразвуковой диагностике и дефектоскопии.

Интерпретация рассеянного акустического поля существенно усложняется, если в рассеивающем объекте возникают колебательные процессы под воздействием звуковой волны, а также, если материал препятствия является неоднородным или/и анизотропным.

Решение обратных задач рассеяния звуковых и упругих волн рассматривается в большом ряде работ. В частности в [1] предложен простой метод решения обратных задач рассеяния в области резонанса. В работе [2] рассматривается способ акустической визуализации в мелководном бассейне с тонким ледяным покрытием. Статья [3] посвящена идентификации полостей в полубесконечном твердом теле посредством упругих волн. В работе [5] предлагается решение акустической обратной задачи рассеяния для сферического тела с радиально-неоднородной сжимаемостью заполняющей жидкости. В статье [6] рассматривается задача идентификации неоднородных упругих свойств изотропного упругого цилиндра. Задача оценки законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе рассматривается в работе [7]. Коэффициентные обратные задачи и их приложения в механике и биомеханике представлены в статье [8].

В работах автора или с его участием [9-13] рассматривались геометрические и коэффициентные обратные задачи акустики по определению параметров неоднородных упругих объектов на основе известного отраженного/рассеянного акустического поля.

В данной работе рассматривается задача определения вида неоднородности внешнего анизотропного слоя упругого шара по рассеянному полю плоской звуковой волны.

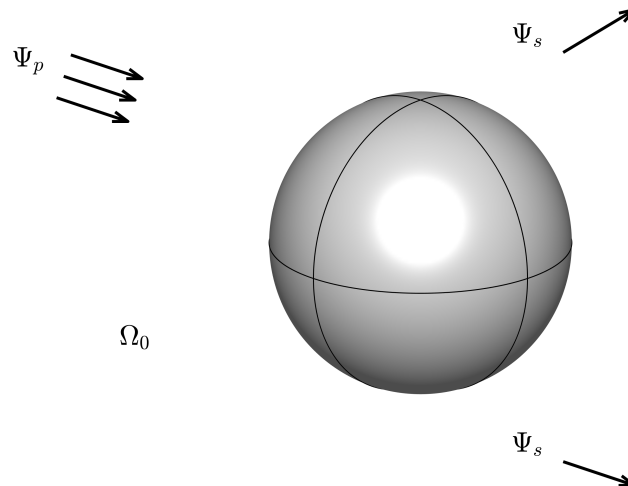


Рис. 1: Геометрия задачи

2. Постановка задачи

Пусть на упругий неоднородный шар радиуса r_1 , находящийся в неограниченном пространстве Ω_0 , заполненным идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 падает плоская звуковая волна с потенциалом смещения Ψ_p (см. рис. 1)

$$\Psi_p = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (1)$$

где $\mathbf{k}$ – волновой вектор, определяющий направление распространения и частоту падающей волны; $k = |\mathbf{k}| = \omega/c_0$ – волновое число в окружающей жидкости; ω – круговая частота; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения; t – время.

Без ограничения общности амплитуда потенциала смещения в падающей волне полагается равной единице. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ у Ψ_p и всех параметров движения, зависящих от времени, будем опускать (колебания – установившиеся).

Рассеянное поле на рисунке 1 схематично показано символами Ψ_s . Через Ψ_s будем обозначать потенциал смещения в рассеянной волне.

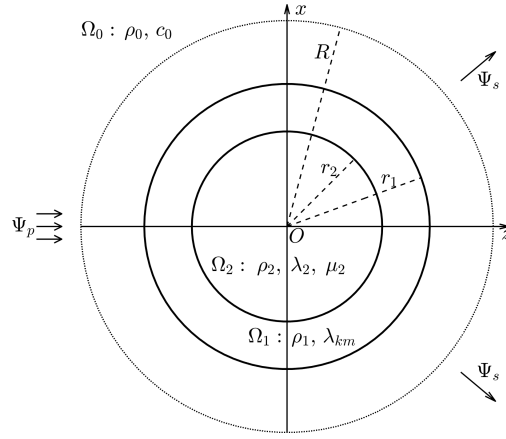


Рис. 2: Введение системы координат и обозначений

Известно, что внутренняя часть шара Ω_2 (см. рис. 2) с радиусом $r_2 < r_1$ заполнена однородным изотропным материалом, имеющим плотность ρ_2 и модули упругости Ламе λ_2, μ_2 . Внешний (сферический) слой шара Ω_1 с внутренним радиусом r_2 и внешним – r_1 (толщина $h = r_1 - r_2$) заполнен неоднородным трансверсально-изотропным материалом, имеющим плотность ρ_1 и модули упругости λ_{km} (предполагается использование двухиндексной нотации Фойгта [14] для компонентов тензора модулей упругости четвертого ранга).

На рисунке 2 представлено сечение упругого шара и прилегающей области Ω_0 плоскостью, содержащей волновой вектор $\mathbf{k}$ и проходящей через центр шара O .

Считается, что материал слоя Ω_1 является слоисто-неоднородным так, что плотность ρ_1 и модули упругости λ_{km} являются линейными функциями расстояния r от центра шара. Для материала такого типа в литературе используют название “функционально-градиентный” [15].

Форма зависимостей $\rho_1(r), \lambda_{km}(r)$ считается известной

$$\rho_1(r) = \rho^* \left(1 + \alpha \left(\frac{r - r_2}{h} - \frac{1}{2} \right) \right), \quad \lambda_{km}(r) = \lambda_{km}^* \left(1 + \beta \left(\frac{r - r_2}{h} - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (2)$$

где ρ^*, λ_{km}^* – заданные средние значения $\rho_1(r), \lambda(r)$ по толщине слоя, а α, β – два неизвестных коэффициента. Заметим, что для всех λ_{km} используется один коэффициент β . Предполагается, что α и β удовлетворяют условиям

$$-1 \leq \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \beta \leq 1. \quad (3)$$

Требуется по известному рассеянному акустическому полю Ψ_s определить коэффициенты α и β . Для определенности предполагается, что рассеянное акустическое поле наблюдается на апертуре, размещенной в точках сферической поверхности $r = R$ вблизи поверхности шара (в ближней зоне). Сечение поверхности $r = R$ представлено окружностью, изображенной пунктирной линией на рис. 2.

3. Математическая постановка задачи

Задачу определения коэффициентов α и β будем решать на основе подхода, использованного в работах [11, 12]. В основе этого подхода лежит сравнение наблюдаемых значений акустического давления p^* в некотором множестве точек апертуры $\mathbf{V}$ и расчетных значений $p(\mathbf{r} \in \mathbf{V}; \alpha, \beta)$ при некоторых значениях параметров α, β . Параметры α, β варьируются

в области допустимых значений D , например, в квадрате, определяемом условиями (3), до достижения максимального совпадения $p(\mathbf{r}; \alpha, \beta)$ с p^* во всех точках $\mathbf{V}$.

Найти $p(\mathbf{r}; \alpha, \beta)$ можно только решив задачу дифракции плоской звуковой волны (1) на неоднородном шаре $\Omega_1 \cup \Omega_2$ при заданных α, β .

Введем декартову систему координат x, y, z с началом O в центре шара так, чтобы ось Oz была направлена по направлению распространения падающей волны (по вектору $\mathbf{k}$). Схема введения декартовой системы координат показана на рис. 2. Единичные базисные векторы системы координат будем обозначать $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда волновой вектор падающей волны может быть представлен в виде $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$.

Также будем использовать сферическую систему координат r, θ, φ , связанную с x, y, z соотношениями $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Тогда уравнение поверхности шара (внешней поверхности неоднородного слоя) $\Gamma_1(\Omega_1)$ может быть записано в виде $r = r_1$, а уравнение внутренней поверхности неоднородного слоя (внешней поверхности однородной части шара) – в виде $\Gamma_2(\Omega_2) : r = r_2$.

Для решения задачи дифракции надо найти решения уравнений движения жидкости в Ω_0 и упругой среды в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, удовлетворяющих граничным условиям на поверхностях Γ_1, Γ_2 и условиям излучения звука на бесконечности [16].

Решение проводится в рамках моделей движения идеальной жидкости [17] и линейной теории упругости [18].

В результате отражения падающей звуковой волны от упругого тела формируется отраженное акустическое поле, а в шаре – упругие колебания. Как показано выше, потенциал смещения в рассеянном поле обозначен Ψ_s . Обозначим вектор смещения в Ω_j – $\mathbf{u}_j$ ($j = 1, 2$). При этом смещение частиц жидкости в Ω_0 будет выражаться соотношением $\mathbf{u}_0 = \text{grad } \Psi_0$, а акустическое давление $p = \rho_0 \omega^2 \Psi_0$, где $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s$.

Таким образом, искомыми функциями в задаче дифракции являются: потенциал смещения в рассеянном поле Ψ_s в области Ω_0 и смещения частиц упругой среды $\mathbf{u}_j$ в Ω_j .

С учетом гармонической зависимости Ψ_s и $\mathbf{u}_j$ от времени в отношении Ψ_s надо решать уравнение Гельмгольца [17]

$$\Omega_0 : \Delta \Psi_s + k^2 \Psi_s = 0. \quad (4)$$

Смещение $\mathbf{u}_j$ должно удовлетворять уравнениям движения упругой среды в напряжениях [18]

$$\Omega_j : \text{Div } \sigma_j = -\rho_j \omega^2 \mathbf{u}_j \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

где $\text{Div } \sigma$ – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений σ .

Тензор напряжений σ_1 (случай анизотропной среды) выражается через $\mathbf{u}_1$ обобщенным законом Гука

$$\sigma_1 = \Lambda \cdot \varepsilon_1, \quad (6)$$

где Λ – тензор модулей упругости, образуемый компонентами λ_{km} ; ε_1 – тензор малых деформаций Коши, компоненты которого в общем случае являются линейными комбинациями компонентов вектора $\mathbf{u}_1$ и их первых производных.

Тензор напряжений σ_2 (случай изотропной среды) выражается через $\mathbf{u}_2$ упрощенным законом Гука

$$\sigma_2 = \lambda_2 \text{div } \mathbf{u}_2 \delta + 2\mu_2 \varepsilon_2, \quad (7)$$

где δ – тензор Кронекера; ε_2 – тензор малых деформаций, формируемый компонентами вектора $\mathbf{u}_2$.

На поверхности шара Γ_1 должны выполняться условия сопряжения движений частиц жидкости и упругого материала, которые состоят в равенстве нормальных смещений и напряжений и отсутствии касательных напряжений в упругой среде [17]

$$r = r_1 : \quad u_{1r} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}; \quad \sigma_{1rr} = -\rho_0 \omega^2 \Psi_0; \quad \sigma_{1r\theta} = 0; \quad \sigma_{1r\varphi} = 0, \quad (8)$$

где u_{1r}, σ_{1rr} – проекции векторов $\mathbf{u}_1$ и вектора напряжений $\mathbf{p}_1 = \sigma_1 \cdot \mathbf{n}$ на внешнюю нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \mathbf{e}_r$ к Γ_1 в точках $r = r_1$; $\sigma_{1r\theta}, \sigma_{1r\varphi}$ – проекции $\mathbf{p}_1$ на векторы $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ в касательной плоскости к Γ_1 .

На поверхности однородной части шара $\Gamma_2 : r = r_2$ должны выполняться условия сопряжения движений частиц двух частей упругого тела, которые состоят в равенстве смещений и напряжений внутренней части шара и неоднородного слоя [17]

$$r = r_2 : \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1; \quad \sigma_{2rr} = \sigma_{1rr} \quad \sigma_{2r\theta} = \sigma_{1r\theta}; \quad \sigma_{2r\varphi} = \sigma_{1r\varphi}, \quad (9)$$

где компоненты с индексом 2 относятся к однородной части шара, а с индексом 1 – к неоднородному слою.

Условия излучения на бесконечности для потенциала рассеянной звуковой волны Ψ_s могут быть представлены в виде [16]

$$\text{при } r \rightarrow \infty : \quad \Psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik\Psi_s \right) = O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (10)$$

Таким образом, математически задача дифракции состоит в необходимости найти решения уравнений (4), (5), удовлетворяющих граничным условиям (8), (9) и условиям излучения на бесконечности (10).

4. Решение задачи дифракции

Решение задачи дифракции проводится по аналогии с решением задачи о рассеянии плоской волны сферическим неоднородным трансверсально-изотропным слоем, заполненным жидкостью [19].

Полагается, что анизотропия материала является сферической и согласованной с формой поверхности Ω_1 . В этом случае матрица физических компонент тензора модулей упругости в сферической системе координат имеет вид [14]

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix} \quad (11)$$

где $\lambda_{44} = (\lambda_{22} - \lambda_{23})/2$. При этом концентрические поверхности $r = \text{const}$ в слое Ω_1 являются поверхностями изотропии, а прямая, направленная по $\mathbf{e}_r$ в каждой точке слоя является осью симметрии бесконечного порядка.

Поскольку свойства материала шарового слоя не зависят от координаты φ , то в силу геометрической симметрии тела и принятого направления распространения падающей волны поля звуковых и упругих колебаний будут обладать осевой симметрией относительно оси Oz и не зависеть от координаты φ . Кроме того, будут тождественно равны нулю компоненты смещения $u_{j\varphi}$.

Во введенной выше сферической системе координат потенциал падающей волны представляется в виде [20]

$$\Psi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (12)$$

где $\gamma_n = (2n+1)i^n$, $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя первого рода порядка n , $P_n(x)$ – полином Лежандра степени n [22].

Потенциал смещения Ψ_s в отраженной волне ищется в виде разложения по сферическим волновым функциям

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (13)$$

где $h_n^{(1)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n , A_n – коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

В однородной среде Ω_2 упругие колебания описывается скалярным потенциалом Ψ_2 продольных волн и векторным потенциалом Φ_2 сдвиговых волн [21] такими, что вектор смещения частиц среды записывается следующим образом

$$\mathbf{u}_2 = \nabla \Psi_2 + \nabla \times \Phi_2. \quad (14)$$

Потенциалы Ψ_2 и Φ_2 должны удовлетворять волновым уравнениям [21]

$$\Delta \Psi_2 + k_2^2 \Psi_2 = 0, \quad \Delta \Phi_2 + \chi^2 \Phi_2 = 0, \quad (15)$$

где $k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}}$, $\chi = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}$ – волновые числа продольных и сдвиговых волн в материале упругой среды Ω_2 .

Векторное уравнение относительно Φ_2 может быть сведено к трем скалярным уравнениям [23] вида второго уравнения (15). Из условия симметрии задачи и независимости полей от координаты φ можно получить выражение вектора Φ_2 через одну скалярную функцию Φ_2 в виде

$$\Phi_2 = \nabla \times (r \Phi_2 \mathbf{e}_r). \quad (16)$$

где $\mathbf{e}_r$ – единичный орт координатной оси r .

Решая уравнения (15) методом разделения переменных, с учетом симметрии компонентов вектора смещений и ограниченности поля при $r = 0$ получим ряды для функций Ψ_2 и Φ_2

$$\Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_2 r) P_n(\cos \theta), \quad \Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(\chi r) P_n(\cos \theta), \quad (17)$$

где B_n, C_n – коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Уравнения движения упругой среды (5) в области анизотропного неоднородного слоя Ω_1 в сферической системе координат представляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{1rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{1r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{1rr} - \sigma_{1\theta\theta} - \sigma_{1\varphi\varphi} + \sigma_{1r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= -\rho_1 \omega^2 u_{1r}, \\ \frac{\partial \sigma_{1r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{1\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_{1\theta\theta} - \sigma_{1\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{1r\theta}] &= -\rho_1 \omega^2 u_{1\theta}, \end{aligned} \quad (18)$$

где u_{1r} и $u_{1\theta}$ – составляющие вектора смещения по осям сферической системы координат, σ_{1rr} , $\sigma_{1\theta r}$, $\sigma_{1\theta\theta}$, $\sigma_{1\varphi\varphi}$ – физические компоненты тензора напряжений.

Для упрощения решения системы (18) вводятся новые неизвестные функции [24] u_2 и σ_2 такие, что компоненты смещения $u_{1\theta}$ и тензора напряжений $\sigma_{1r\theta}$ выражаются через них следующим образом

$$u_{1\theta} = \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \quad \sigma_{1r\theta} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \theta}.$$

Неизвестные функции u_{1r} , u_2 , σ_{1rr} и σ_2 , являющиеся функциями двух координат – r и θ , можно разложить в ряды по ортогональным полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} u_{1r} &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}(r) P_n(\cos \theta), & u_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}(r) P_n(\cos \theta), \\ \sigma_{1rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{1n}(r) P_n(\cos \theta), & \sigma_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n}(r) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим эти ряды в уравнения движения (18). Тогда с учетом того, что в соответствии с дифференциальным уравнением Лежандра [22] и ортогональности полиномов Лежандра для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов U_{1n} , U_{2n} , σ_{1n} и σ_{2n} в рядах (19)

$$\mathbf{U}'_n = A\mathbf{U}_n + B\mathbf{S}_n, \quad \mathbf{S}'_n = (C - \rho\omega^2 I)\mathbf{U}_n + D\mathbf{S}_n \quad (20)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n})^T$, $\mathbf{S}_n = (\sigma_{1n}, \sigma_{2n})^T$, $A = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -2a & n_1 a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/\lambda_{11} & 0 \\ 0 & 1/\lambda_{55} \end{pmatrix}$,

$$C = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -2\lambda & n_1 \lambda \\ 2(\lambda_{44} - \zeta) & n_1 \zeta - 2\lambda_{44} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2(a-1) & n_1 \\ -a & 3 \end{pmatrix},$$

$a = \lambda_{12}/\lambda_{11}$, $n_1 = n(n+1)$, $\lambda = 2a\lambda_{12} - \lambda_{22} - \lambda_{23}$, $\zeta = \lambda_{22} - a\lambda_{12}$, I – единичная матрица, а штрих обозначает производную по переменной r .

Таким образом, колебания неоднородного сферического упругого слоя описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (20). Их решения должны удовлетворять граничным условиям, которые наложены на физические характеристики движения у поверхностей соприкосновения сред.

Подставив выражения (12), (13), (19) в первые уравнения систем (8), (9) и воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра [22], получим выражения для коэффициентов в рядах (13), (19) через значения функции $U_{1n}(r)$ на поверхностях слоя. В частности для коэффициентов в потенциале рассеянной волны будем иметь

$$A_n = \frac{U_{1n}(r_1) - \gamma_n k_0 j'_n(kr_1)}{kh'_n(kr_1)}. \quad (21)$$

Подставляя соотношения (21) в оставшиеся два условия системы (8), получим уравнение, связывающее компоненты векторов $\mathbf{U}_n$ и $\mathbf{S}_n$ на границе $r = r_1$

$$\mathbf{S}_n + E\mathbf{U}_n \Big|_{r=r_1} = \mathbf{G}, \quad (22)$$

где

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 \omega^2 h_n^{(1)}(kr_1)}{kh_n^{(1)'}(kr_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{-\rho_0 \omega^2 \gamma_n j'_n(kr_1) h_n^{(1)}(kr_1)}{h_n^{(1)'}(kr_1)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, используя выражения для B_n и C_n в оставшихся граничных условиях (9) на внутренней поверхности неоднородного слоя, получим систему

$$\mathbf{S}_n + F\mathbf{U}_n \Big|_{r=r_2} = 0. \quad (23)$$

где

$$F = -\frac{2\mu_2}{r_2} \begin{pmatrix} \left(n_1 - \frac{x_2^2}{2}\right) j_n(x_1) - 2x_1 j'_n(x_1) & n_1 [x_2 j'_n(x_2) - j_n(x_2)] \\ x_1 j'_n(x_1) - j_n(x_1) & \left(\frac{n_1-1}{r_2^2} - \frac{x_2^2}{2}\right) j_n(x_2) - x_2 j'_n(x_2) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} x_1 j'_n(x_1) & n_1 j_n(x_2) \\ j_n(x_1) & x_2 j'_n(x_2) + j_n(x_2) \end{pmatrix}^{-1}, \quad x_1 = k_2 r_2, \quad x_2 = \chi r_2.$$

Таким образом, для каждого значения $n = 0, 1, 2, \dots$ задача дифракции сведена к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (20) с краевыми условиями (22) и (23).

При фиксированном n решение краевой задачи ищется путем сведения к задачам Коши [19]. После решения определяются коэффициенты A_n , B_n , C_n . Проведя такие вычисления для достаточно большого числа n , получаем возможность анализировать волновые поля рассеянных и возбужденных внутри упругого шара волн.

5. О решении обратной задачи

Простейший вариант решения обратной коэффициентной задачи в отношении величин α и β из состоит в поиске таких значений α и β , которые обеспечивают наилучшее совпадение расчетных значений давления в точках $\mathbf{V}$ апертуры с наблюдаемыми значениями давления.

При этом характеристикой отличия множества наблюдаемых значений давления $\mathbf{P}^*$ от множества расчетных значений давления $\mathbf{P}$ может выступать норма разности этих векторов

$$\delta = |\mathbf{P}^* - \mathbf{P}|. \quad (24)$$

В процессе решения задачи идентификации ищется такое сочетание α и β , которое минимизирует δ . При этом неявно полагается, что вклад отдельных точек наблюдения в формирование целевой функции δ равноценен. Однако из практических наблюдений или из каких-либо рациональных соображений может потребоваться дифференцировать роль отдельных точек наблюдения. Тогда формулу (24) расчета характеристики отклонения $\mathbf{P}^*$ от $\mathbf{P}$ можно скорректировать, введя весовые коэффициенты.

В данной работе вместо δ (формула (24)) используется взвешенная характеристика отклонения $\mathbf{P}^*$ от $\mathbf{P}$ в виде

$$\varkappa = \sum_{m=1}^M \gamma_m |\mathbf{P}_m^* - \mathbf{P}_m|, \quad (25)$$

где M – число участков апертуры наблюдения/измерения давления в рассеянной объектом акустической волне; $\gamma_m \geq 0$ – “вес” участка $\mathbf{V}_m$.

В общем случае участки $\mathbf{V}_m$ могут иметь пересечения, но естественно положить, чтобы $\mathbf{V} = \bigcup_m \mathbf{V}_m$. Кажется удобным потребовать, чтобы сумма весовых коэффициентов была равна единице. Это позволяет исключить возможность введения разных наборов γ_m , определяющих одинаковую относительную степень влияния на $\varkappa$ отдельных участков $\mathbf{V}_m$ при фиксированном M .

Будем называть величину $\varkappa$ индикатором близости наблюдаемого $\mathbf{P}^*$ и расчетного $\mathbf{P}$ давлений.

Заметим, норма (24) является частным случаем индикатора близости (25). При $M = 1$ получим $\delta = \varkappa$. Кроме того, при любом M , непересекающихся $\mathbf{V}_m$ и одинаковых весовых коэффициентах ($\gamma_m = 1/M$) индикатор близости по сути будет совпадать с δ . При этом $\varkappa = \delta/M$.

Как и при использовании δ типичный алгоритм решения задачи – алгоритм минимизации величины $\varkappa$ путем изменения искомых параметров. Например, при двух параметрах α и β из зависимостей (2) надо решать задачу

$$\varkappa(\alpha, \beta) \xrightarrow{(\alpha, \beta) \in D} \text{MIN}. \quad (26)$$

Однако индикатор близости можно использовать и по-другому. Если наблюдается близость/совпадение $\varkappa(\alpha_2, \beta_2)$ и $\varkappa(\alpha_1, \beta_1)$ при фиксированном поле $\mathbf{P}^*$, то это можно считать косвенным признаком того, что наборы параметров α_2, β_2 и α_1, β_1 близки. В частном случае, когда множество D дискретное и конечное, то для фиксированного разбиения $\mathbf{V}$ на $\mathbf{V}_m$ можно построить такую систему весовых коэффициентов γ_m , что из $\varkappa(\alpha_2, \beta_2) = \varkappa(\alpha_1, \beta_1)$ будет следовать, что $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1)$.

6. Численные исследования

При проведении численных исследований проводились расчеты амплитуды нормированного давления $p' = |\Psi_0/\Psi_p|$ в окрестности упругого шара.

Как указано выше, использовалось множество точек $\mathbf{V}$ на сферической поверхности $r = R$. Из-за осевой симметрии задачи множество $\mathbf{V}$ было сокращено до множества точек при фиксированном $\varphi_0 = 0$, которые задавались значениями $\theta_j = j \cdot \Delta\theta$ ($j = 0, 1, \dots, J$). При угловом шаге размещения точек $\Delta\theta$. В частном случае было установлено $J = 12$, $\Delta\theta = \pi/12 = \pi/J$. Величина R задавалась соотношением $R = 2r_1$.

Для свойств однородных сред были выбраны значения:

$$\Omega_0 : \rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c_0 = 1485 \text{ м/с};$$

$$\Omega_2 : \rho_2 = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda_2 = 5.3 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu_2 = 2.6 \times 10^{10} \text{ Па}.$$

Для неоднородного слоя Ω_1 рассматривались 3 типа сочетаний λ_{km}^* (3 типа анизотропии материала):

$$\text{тип 0: } \lambda_{11}^* = 10.5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{12}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{22}^* = 10.5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{23}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ \lambda_{55}^* = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Па} \text{ (– изотропный материал);}$$

$$\text{тип 1: } \lambda_{11}^* = 5.74 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{12}^* = 3.28 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{22}^* = 16.4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{23}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ \lambda_{55}^* = 2.54 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$\text{тип 2: } \lambda_{11}^* = 16.4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{12}^* = 0.819 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{22}^* = 5.74 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \lambda_{23}^* = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ \lambda_{55}^* = 2.95 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Толщина неоднородного анизотропного слоя h такова, что $r_1/h = 2$.

Для частоты падающей волны ω рассматривались два фиксированных значения при которых $kr_1 = 5$ или $kr_1 = 7$.

Рассматривалась возможность идентификации пары параметров неоднородности α и β посредством индикатора близости $\varkappa$ при $M = 2$ когда множество $\mathbf{V}_1$ содержало точки с $\theta_j \leq \pi/2$ – в так называемой “теневого области” рассеянного поля, а множество $\mathbf{V}_2$ – точки с $\theta_j \geq \pi/2$ – в “освещенной области” рассеянного поля. При этом считалось, что каждый из параметров α и β может принимать только дискретное значение из множества $\{-1, 0, 1\}$. Так что, множество D в задаче (26) имеет вид $\{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$.

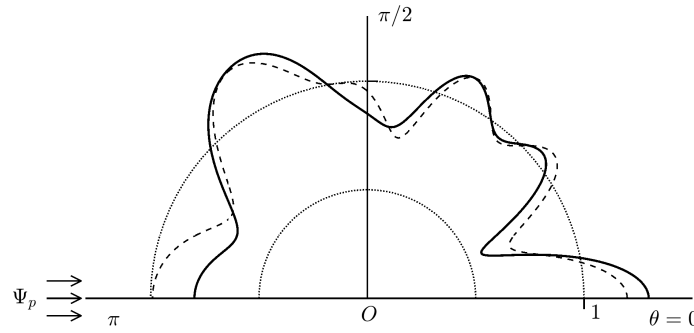


Рис. 3: Распределение давления p' , тип 1, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

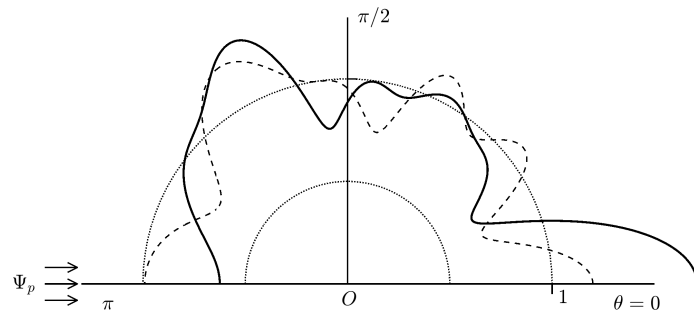


Рис. 4: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

Для начала проведен анализ влияния типов анизотропии и видов неоднородности на диаграммах зависимости $p'(\theta)$.

На рис. 3 показано распределение амплитуды давления на поверхности $r = R$ для случая однородного материала слоя ($\alpha = 0, \beta = 0$) при анизотропии типа 1. Штриховая линия построена для однородного изотропного шара из материала типа 0. Внешняя пунктирная полуокружность показывает контур наблюдения $r = R$. Кроме того, уровень точек этой полуокружности соответствует абсолютному значению давления в падающей волне ($p' = 1$). Внутренняя полуокружность характеризует поверхность шара. И соотношение радиусов полуокружностей соответствует отношению r_1/R . Все представленные на рисунках результаты, кроме рис. 9 получены $kr_1 = 5$.

Рис. 4 иллюстрирует соотношение диаграмм $p'(\theta)$ для случая однородных материалов при анизотропии типа 2 и изотропном материале.

Диаграммы показывают, что распределение $p'(\theta)$ заметно зависит от типа анизотропии.

На рис. 5-9 демонстрируется влияние неоднородности материала внешнего слоя шара на распределение $p'(\theta)$. Сплошная линия на рисунке построена для случая неоднородного материала слоя, а штриховая – для однородного.

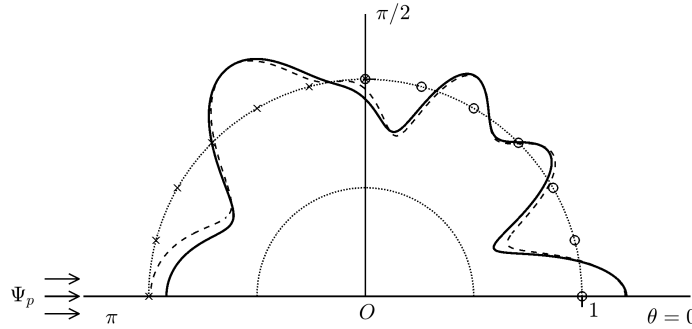


Рис. 5: Распределение давления p' , тип 0, $\alpha = -1, \beta = 0$

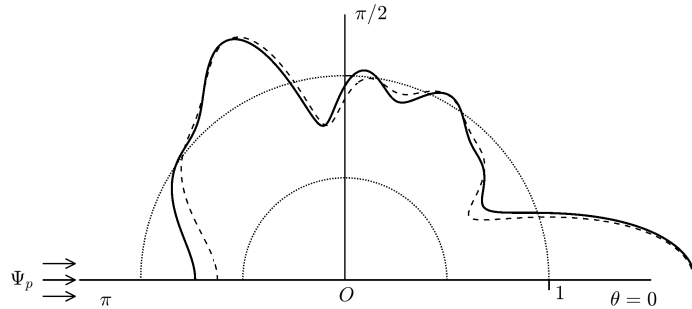


Рис. 6: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = -1, \beta = 0$

Рис. 5 построен для случая материала типа 0 (изотропного) в случае переменной плотности при $\alpha = -1$. Маркеры на контуре $p' = 1$ иллюстрируют размещение точек $\mathbf{V}$ апертуры. Маркеры вида "o" соответствуют подмножеству $\mathbf{V}_1$, а маркеры вида "x" соответствуют подмножеству $\mathbf{V}_2$.

На рис. 6-9 показано влияние на распределение $p'(\theta)$ неоднородностей материала типа 2. На рис. 6 показан случай с $\alpha = -1, \beta = 0$. Рис. 7 соответствует случаю с $\alpha = 0, \beta = -1$.

Неожиданный характер влияния неоднородности и плотности, и модулей упругости показан на рис. 7. В этом случае с увеличением координаты r плотность возрастает в 3 раза, а модули упругости убывают. Это должно приводить к заметному изменению скоростей парциальных упругих волн. Однако полученная диаграмма $p'(\theta)$ отличается от соответствующей

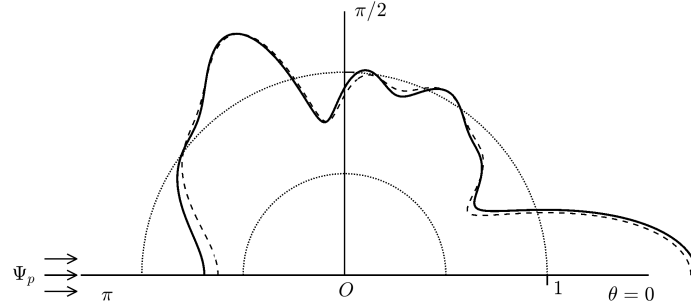


Рис. 7: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 0$, $\beta = -1$

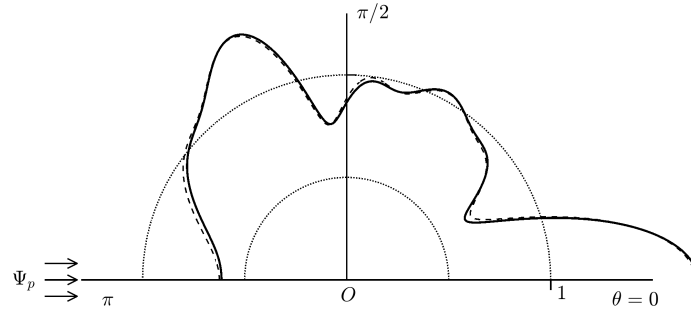


Рис. 8: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 1$, $\beta = -1$

диаграммы для однородного материала не более, чем на 3-5%.

Далее была проведена серия численных экспериментов по расчету индикатора близости. В качестве характеристики наблюдаемого рассеянного поля $\mathbf{P}^*$ рассматривались значения нормированного Ψ_0 для случая однородного изотропного материала в точках $\mathbf{V}$.

В таблицах 1-3 представлены результаты расчета индикатора близости при расчетных значениях рассеянного поля $\mathbf{P}$ при волновом размере шара $kr_1 = 5$. В таблице 1 показаны расчеты для шара с материалом слоя типа 0. В каждой строке таблицы представлены: порядковый номер эксперимента; значения α и β , характеризующие вид неоднородности; значения парциальных норм отклонения давления $|\mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1|$ и $|\mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2|$; значения двух индикаторов близости $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Первый из них – $\varkappa_1$ получен в результате выбора γ_1, γ_2 в формуле (25) такими, чтобы индикаторы $\varkappa$ для различных видов неоднородности из рассматриваемых вариантов имели максимальное различие. Второй индикатор близости рассчитывался при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$.

При найденных при $kr_1 = 5$ для $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.8$ минимальная разность значений $\varkappa_1$ для всех типов анизотропии и различных видах неоднородности составляет величину 0.016 (см. $\varkappa_1 = 0.258$ при $\alpha = 0/\beta = 1$ и $\varkappa_1 = 0.274$ при $\alpha = 1/\beta = 0$ в табл. 1). Это означает, что для

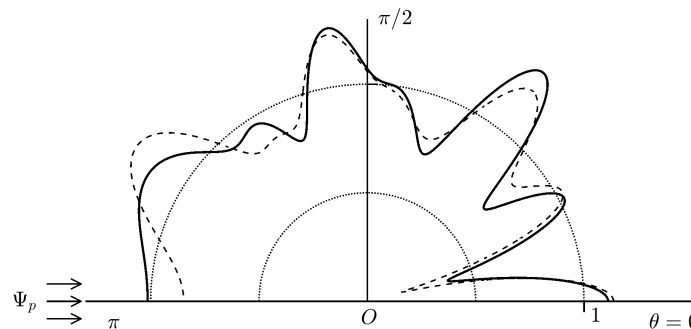


Рис. 9: Распределение давления p' , тип 2, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $kr_1 = 7$

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
1	-1	-1	0.224103	0.201634	0.206	0.213
2	-1	0	0.145081	0.145845	0.146	0.145
3	-1	1	0.036025	0.012060	0.017	0.024
4	0	-1	0.122172	0.091616	0.098	0.107
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.285653	0.251252	0.258	0.268
7	1	-1	0.123275	0.125769	0.125	0.125
8	1	0	0.285032	0.271415	0.274	0.278
9	1	1	0.656339	0.590864	0.604	0.624

Таблица 1: Расчет индикатора близости (тип 0, $kr_1 = 5$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
1	-1	-1	0.086491	0.026409	0.384	0.565
2	-1	0	0.025281	0.033819	0.321	0.296
3	-1	1	0.038634	0.024468	0.273	0.316
4	0	-1	0.082571	0.029964	0.405	0.563
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.049994	0.018597	0.249	0.343
7	1	-1	0.086982	0.075885	0.781	0.814
8	1	0	0.038037	0.047960	0.460	0.430
9	1	1	0.087586	0.069409	0.730	0.785

Таблица 2: Расчет индикатора близости (тип 1, $kr_1 = 5$)

каждый вид неоднородности (сочетание α и β) может быть устойчиво идентифицирован на основе сравнения $\varkappa_1$ со значениями, представленными в таблице.

При этом минимальная разность значений $\varkappa_1$ при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ для различных видов неоднородности составляет величину 0.002 (см. $\varkappa_1 = 0.565$ при $\alpha = -1/\beta = -1$ и $\varkappa_1 = 0.5634$ при $\alpha = 0/\beta = -1$ в табл. 2), что при наличии погрешностей в измерениях и/или вычислениях не позволяет надежно идентифицировать вид неоднородности на основе сравнения с табличными значениями.

Аналогичные результаты расчетов индикатора близости уже при $kr_1 = 7$ представлены в табл. 4-5. В этом случае “наилучшая разрешающая способность” получена при $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 0.1$ (см. $\varkappa_1$). При этом минимальная разность значений $\varkappa_1$ для всех типов анизотропии

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
1	-1	-1	0.380842	0.403898	3.993	3.924
2	-1	0	0.211299	0.217499	2.163	2.144
3	-1	1	0.021767	0.028119	0.268	0.249
4	0	-1	0.111245	0.135110	1.303	1.232
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.102753	0.168157	1.551	1.355
7	1	-1	0.096052	0.079530	0.828	0.878
8	1	0	0.132839	0.154536	1.502	1.437
9	1	1	0.172524	0.276953	2.561	2.247

Таблица 3: Расчет индикатора близости (тип 2, $kr_1 = 5$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
1	-1	-1	0.109987	0.140539	0.113	0.125
2	-1	0	0.058847	0.103342	0.063	0.081
3	-1	1	0.048275	0.022638	0.046	0.035
4	0	-1	0.087008	0.046266	0.083	0.067
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.140593	0.144860	0.141	0.143
7	1	-1	0.172308	0.122301	0.167	0.147
8	1	0	0.206171	0.232147	0.209	0.219
9	1	1	0.415240	0.407203	0.414	0.411

Таблица 4: Расчет индикатора близости (тип 0, $kr_1 = 7$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
1	-1	-1	0.441707	0.376064	0.435	0.409
2	-1	0	0.216572	0.233022	0.218	0.225
3	-1	1	0.065806	0.055897	0.065	0.061
4	0	-1	0.193385	0.075565	0.182	0.134
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.132091	0.092412	0.128	0.112
7	1	-1	0.154131	0.198381	0.159	0.176
8	1	0	0.114897	0.167966	0.120	0.141
9	1	1	0.186883	0.207395	0.189	0.197

Таблица 5: Расчет индикатора близости (тип 1, $kr_1 = 7$)

№	α	β	$ \mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_1 $	$ \mathbf{P}_2^* - \mathbf{P}_2 $	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
1	-1	-1	0.284132	0.278425	0.284	0.281
2	-1	0	0.194470	0.203761	0.195	0.199
3	-1	1	0.209523	0.181690	0.207	0.196
4	0	-1	0.153333	0.129266	0.151	0.141
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0.573292	0.509045	0.567	0.541
7	1	-1	0.417608	0.362875	0.412	0.390
8	1	0	0.397458	0.376329	0.395	0.387
9	1	1	0.782960	0.666716	0.771	0.725

Таблица 6: Расчет индикатора близости (тип 2, $kr_1 = 7$)

и различных видах неоднородности составляет величину 0.007. При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ (см. $\mathfrak{K}_2$) минимальная разность значений $\mathfrak{K}_1$ для всех типов анизотропии и различных видах неоднородности составляет величину 0.003. Этот результат – невысокая "разрешающая способность" индикатора близости (0.007 против 0.016 при $kr_1 = 5$) может объясняться тем, что частота падающей волны при $kr_1 = 5$ ближе к ряду резонансных частот неоднородного цилиндра, чем при $kr_1 = 7$.

7. Заключение

Таким образом, предложено решение задачи определения вида неоднородности внешнего трансверсально-изотропного слоя упругого шара по рассеянному полю плоской звуковой волны на основе использования индикатора близости, рассчитываемого по формуле (25).

Задача дифракции звука на шаре решена численно-аналитическим методом, при котором потенциал смещения в рассеянной волне и потенциалы продольных и поперечных волн в однородной части шара представлены разложениями по осесимметричным сферическим гармоникам. Решение уравнений движения в неоднородном анизотропном внешнем слое шара сведено к системе краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно.

Для определения искоемых коэффициентов в линейных зависимостях плотности и модулей упругости внешнего слоя выполняется сравнение наблюдаемых значений давления в некотором множестве точек на сферической поверхности с центром в центре шара и расчетных значений давления в этих точках. Предложен вариант формирования индикатора близости наблюдаемых и расчетных значений давления на основе разбиения точек наблюдения на группы. Предлагается использовать индикатор близости для идентификации коэффициентов в законах неоднородности плотности и модулей упругости в слое.

Проведены численные эксперименты, которые показывают, что для рассматриваемых видов неоднородности можно подобрать частоту падающей волны, которая позволяет наблюдать заметное проявление неоднородности в ближней зоне рассеянного поля.

Подбор разбиения $\mathbf{V}$ на $\mathbf{V}_m$ и весовых коэффициентов в выражении (25) позволяет использовать индикатор близости для идентификации вида неоднородности внешнего трансверсально-изотропного слоя упругого шара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colton D., Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region // *Inverse Problems*. 1996. V. 12, pp. 383–393.
2. Gilbert R. P., Xu Y. Acoustic imaging in a shallow ocean with a thin ice cap // *Inverse Problems*. 2000. V. 16, pp. 1799–1811.
3. Guzina B. B., Nintcheu S. F., Bonnet M. On the stress-wave imaging of cavities in a semi-infinite solid // *Int. J. Solids Struct.* 2003. V. 40, issue 6, pp. 1505–1523.
4. Martin P. A. Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles // *SIAM J. Appl. Math.* 2003. V. 64, pp. 297–308.
5. Bilgin E., Yapar A., Yelkenci T. An acoustic inverse scattering problem for spheres with radially inhomogeneous compressibility // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 133, issue 4, pp. 2097–2104.
6. Bogachev I. V., Nedin R. D., Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // *ZAMM - J. Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. V. 97, issue 3, pp. 358–364.

7. Vatul'yan A.O., Yurov V.O. On Estimating the Laws of Radial Inhomogeneity in a Cylindrical Waveguide // *Acoust. Phys.* 2020. V. 66, pp. 97–104.
8. Ватульян А. О. О коэффициентных обратных задачах и их приложениях в механике и биомеханике // *Mechanics – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia.* 2022. V. 75, no. 1, pp. 36–47.
9. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A., Tolokonnikov L. A. Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties // *Acoustical Physics.* 2015. V. 61. issue 5. pp. 504–510.
10. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородного покрытия упругого цилиндра с полостью для обеспечения заданных звукоотражающих свойств // *Изв. ТулГУ. Технические науки.* 2017. Вып. 7, с. 163–175.
11. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности покрытия эллиптического цилиндра по рассеянию звука в присутствии упругого полупространства // *Изв. ТулГУ. Технические науки,* 2018. Вып. 9, с. 290–302.
12. Skobelt'syn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // *J. Physics: Conference Series,* 2019. V. 1203, 012023, pp. 1–10.
13. Скобельцын С. А., Пешков Н. Ю. Определение толщины неоднородного покрытия конечного упругого цилиндра по рассеянному звуку в полупространстве // *Известия ТулГУ. Технические науки.* 2020. Вып. 10, с. 172–183.
14. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
15. Cherradi N., Kawasaki A., Gasik M. Worldwide trends in functional gradient materials research and development // *Composites Engineering.* 1994. V. 4, issue 8, pp. 883–894.
16. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.
17. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41, № 6, с. 917–923.
20. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
21. Гузь А. Н. и др. Дифракция упругих волн. Киев: Наук.думка, 1978. 307 с.
22. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
23. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т.2. М.: Изд.иностр.лит., 1960. 886 с.
24. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Свободные неосесимметричные колебания толстостенного трансверсально-изотропного полого шара // *Прикл. механика.* 1988. Т. 24, № 5, с. 12–17.

REFERENCES

1. D. Colton and A. Kirsch, 1996, "A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region" *Inverse Problems* vol. 12, pp. 383–393.
2. R. P. Gilbert and Y. Xu, 2000, "Acoustic imaging in a shallow ocean with a thin ice cap" *Inverse Problems* vol. 16, pp. 1799–1811.
3. B. B. Guzina, S. F. Nintcheu and M. Bonnet, 2003, "On the stress-wave imaging of cavities in a semi-infinite solid" *Int. J. Solids Struct.*, vol. 40, issue 6, pp. 1505–1523.
4. P. A. Martin, 2003, "Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles" *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 64, pp. 297–308.
5. E. Bilgin, A. Yapar and T. Yelkenci, 2013, "An acoustic inverse scattering problem for spheres with radially inhomogeneous compressibility" *J. Acoust. Soc. Am.*, V. 133, issue 4, pp. 2097–2104.
6. I. V. Bogachev, R. D. Nedin, A. O. Vatul'yan and O. V. Yavruyan, 2017, "Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder" *ZAMM - J. Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 97, issue 3, pp. 358–364.
7. Vatul'yan A. O. and V. O. Yurov, 2020 "On Estimating the Laws of Radial Inhomogeneity in a Cylindrical Waveguide" *Acoust. Phys.*, vol. 66, pp. 97–104.
8. A. O. Vatul'yan, 2022, "On coefficient inverse problems and their applications in mechanics and biomechanics" *Mechanics – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, vol. 75, no. 1, pp. 36–47.
9. N. V. Larin, S. A. Skobel'tsyn and L. A. Tolokonnikov, 2015, "Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties" *Acoust. Phys.*, vol. 61, issue 5, pp. 504–510.
10. S. A. Skobelt'syn, 2017, "Determination of the parameters of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder with a cavity to provide specified sound-reflecting properties" *News of TulGU. Technical science*, issue 7, pp. 163–175.
11. S. A. Skobelt'syn, 2018, "Determination of the parameters of the inhomogeneity of the coating of an elliptical cylinder by sound scattering in the presence of an elastic half-space" *News of TulGU. Technical science*, issue 9, pp. 290–302.
12. S. A. Skobelt'syn and N. Y. Peshkov, 2019, "Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border" *J. Physics: Conference Series*, vol. 1203, 012023, pp. 1–10.
13. S. A. Skobelt'syn and N. Y. Peshkov, 2020, "Determining the thickness of an inhomogeneous coating of a finite elastic cylinder from scattered sound in a half-space" *News of TulGU. Technical science*, issue 10, pp. 172–183.
14. F. I. Fedorov, 1965, *Theory of elastic waves in crystals [Teoriya uprugikh voln v kristallakh]*, Moscow, Nauka.
15. N. Cherradi, A. Kawasaki and M. Gasik, 1994, "Worldwide trends in functional gradient materials research and development" *Composites Engineering*, vol. 4, issue 8, pp. 883–894.

16. E. J. Skudryzk, 1971, *The Foundations Acoustic*, New York, Springer-Verlag.
17. M. A. Isakovich, 1973, *General acoustics [Obshchaya akustika]*, Moscow, Nauka.
18. W. Nowacki, 1963, *Dynamics of elastic systems*, New York, Wiley.
19. S. A. Skobel'tsyn and L. A. Tolokonnikov, 1995, "Sound scattering by an inhomogeneous transversally isotropic spherical layer" *Acoustical Physics*, vol. 41, no. 6, pp. 917–923.
20. E. J. Skudryzk, 1971, *The Foundations Acoustic*, New York, Springer-Verlag.
21. A. N. Guz and etc., 1978, *Diffraction of elastic waves [Difraktsiya uprugikh voln]*, Kyiv, Nauk. dumka.
22. G. A. Corn and T. M. Corn, 2000, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, New York, Dover Publications.
23. P. M. Morse and H. Feshbach, 1953, *Methods of Mathematical Physics*, New York, McGraw-Hill.
24. N. A. Shulga, A. Ya. Grigorenko and T. L. Efimova, 1988, "Free non-axisymmetric vibrations of a thick-walled transversely isotropic hollow sphere", *Appl. Mechanics*, vol. 24, no. 5, pp. 12–17.

Получено: 17.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022