

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-327-349

Эволюция основных положений теории устойчивости¹

Р. Р. Мухин

Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: mukhinu@mail.ru

Аннотация

Целью работы является изучение эволюции понятия устойчивости, представляющей структурообразующее понятие во всех областях науки и техники, и даже за их пределами. Этапы этой длительной эволюции соответствовали доминирующим тенденциям математики своего времени. К концу XIX в. была осознана сложность понятия устойчивости, встал вопрос о математически строгом подходе к проблеме. Была построена общая теория устойчивости движения на прочном математическом фундаменте. Это стало вехой не только в развитии самого предмета, но составило одно из оснований построения качественной теории. В дальнейшем теория устойчивости разделилась на две ветви: одна — расширение теории вширь на старой идейной базе, усиление связей с приложениями; другая — устойчивость в контексте теории динамических систем. В последнем случае устойчивые движения рассматриваются в ряду всех движений, в дихотомии устойчивость-неустойчивость оба полюса равноправны и содержательны. Неустойчивость оказывается тоже сложным понятием, с многообразием форм. Неустойчивость приобрела конструктивное значение, она обеспечивает новации, развитие. Типичным является сосуществование устойчивости и неустойчивости со сложной топологией такой структуры. Многообразные виды неустойчивости демонстрирует явление турбулентности. Изучение этого явления на современном уровне требует использование математики по канонам строгости, принятых в самой математике. Можно поставить вопрос о границах применимости возможностей самого качественного описания и понятия устойчивости. В этом отношении имеются первые результаты, требуются новые идеи.

Ключевые слова: устойчивость, возмущение, критерий устойчивости, динамическая система, неустойчивость, турбулентность.

Библиография: 81 название.

Для цитирования:

Р. Р. Мухин. Эволюция основных положений теории устойчивости // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 327–349.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402 А.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-327-349

Evolution of the main provisions of the theory of stability²

R. R. Mukhin

Mukhin Ravil' Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Sary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Sary Oskol).

e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

The aim of the work is to study the evolution of the concept of stability, which is a structure-forming concept in all areas of science and technology, and even beyond them. The stages of this long evolution corresponded to the dominant trends in the mathematics of their time. By the end of the XIX century, the complexity of the concept of stability was realized, the question arose of a mathematically rigorous approach to the problem. A general theory of motion stability was built on a solid mathematical foundation. This became a milestone not only in the development of the subject itself, but was one of the foundations for constructing a qualitative theory. Subsequently, the theory of stability was divided into two branches: one - the expansion of the theory in breadth based on old ideas, strengthening the links with applications; the other is stability in the context of the theory of dynamical systems. In the latter case, stable movements are considered in the series of all movements; in the stability-instability dichotomy both poles are equal and meaningful. Instability also turns out to be a complex concept that has a variety of forms. Instability has acquired a constructive meaning; it ensures innovation and development. Typical is the coexistence of stability and instability with a complex topology of such a structure. Diverse types of instability demonstrate the phenomenon of turbulence. The study of this phenomenon at the modern level requires the use of mathematics according to the canons of rigor adopted in mathematics itself. One can raise the question of the limits of applicability of the possibilities of the most qualitative description and the concept of stability. In this regard, there are first results, new ideas are required.

Keywords: stability, perturbation, stability criterion, dynamical system, instability, turbulence.

Bibliography: 81 titles.

For citation:

R. R. Mukhin, 2022, “Evolution of the main provisions of the theory of stability”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 327–349.

1. Введение

Устойчивость представляет структурообразующую категорию не только во всех областях науки и техники, но и за их пределами, в экономической, социальной и политической жизни. Идеи об устойчивости восходят еще к античности, и в науке Нового времени постоянно находятся в поле зрения. Эти задачи были поставлены практическими потребностями, в первую

²The work was supported by the RFBR grant No. 20-011-00402 A.

очередь обеспечением устойчивостью судов (С. Стевин, Х. Гюйгенс, Д. Бернулли) [1]. Их рассмотрение носило чисто геометрический характер. Л. Эйлер, видимо, был первым, кто ввел устойчивость в обиход последовательного математического изучения на основе аналитических методов. Само понятие устойчивости, как и многое в математике того времени, казалось интуитивно ясным. Первыми были задачи об устойчивости равновесия. В сочинениях Эйлера об упругой неустойчивости стержня под воздействием продольных сжимающих сил (1744) [2] и об устойчивости плавающих тел (1749) [3] впервые строго была поставлена задача об устойчивости и отчетливо высказана идея о влиянии малых возмущений на нарушение равновесия. В случае стержня при критической нагрузке система находится в неустойчивом равновесии и бесконечно малое возмущение приводит к изгибу стержня. Эти идеи легли в основу исследований Ж. Л. Лагранжа по устойчивости положения равновесия. В небольшой заметке (1798) [4], позже включенное им во второе издание *Аналитической механики* (1811) [5, Р. 97], Лагранж рассматривал равновесие консервативной механической системы. Он не только доказал важнейшую теорему механики, но впервые дал определение устойчивости и сформулировал условие (критерий) устойчивости. В данном случае достаточное условие равновесия будет следующим:

«Когда эта функция [потенциальная энергия, Р. М.] является минимумом, то в этом случае имеет место устойчивое равновесие в том смысле, что если сначала система находилась в состоянии равновесия, а затем была немного из него выведена, то она сама собою стремится вернуться к этому состоянию» [6, С. 97].

Доказательство проведено Лагранжем с помощью разложения потенциальной энергии в ряд с точностью до второго порядка. Недостаток подхода Лагранжа очевиден и в последующем он был в значительной степени восполнен П. Г. Лежен-Дирихле (1846), который указал, что могут вносить вклад также четвертый и более высокие порядки, но значение минимума потенциальной энергии по-прежнему сохраняется [7, 8]. Выше говорилось об устойчивости равновесия. Понятие устойчивости продолжало расширяться. «Астрономический» XVIII век дал еще одно направление исследованиям проблемы устойчивости, и оно касается самих основ мироздания. Речь идет об устойчивости таких объектов, как Солнечная система (Ж. Л. Лагранж (1774, 1781-1782) [9, 10]; П. С. Лаплас (1773) [11], (1788) [12], С. Д. Пуассон [13]), этот вопрос до настоящего времени продолжает оставаться предметом дискуссий. Речь уже идет об устойчивости динамической системы как целого, здесь не только новый объект, но и новый вид устойчивости. Названные авторы сделали первые шаги для решения этой грандиозной задачи, которая, по всей вероятности, не имеет окончательного решения. Но это тот случай, когда важна сама постановка задачи. Сошлемся на слова А. Эйнштейна:

«Формулировка проблемы часто более существенна, чем ее разрешение, которое может быть делом лишь математического или экспериментального искусства. Постановка новых вопросов, развитие новых возможностей, рассмотрение старых проблем под новым углом зрения требует творческого воображения и отражает действительный успех в науке» [14, С. 78].

Вопрос об устойчивости Солнечной системы дал мощный импульс исследованиям в XX в.

До середины XIX в. в идейном отношении наблюдалось некоторое затишье, хотя исследования устойчивости проводились по целому ряду вопросов (проблема устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы, К. Г. Якоби (1834), Ж. Лиувилль (1834); устойчивость колец Сатурна, Дж. К. Максвелл (1859), С. Ковалевская (1885)). Примечательным событием явилась публикация двухтомного сочинения У. Томсона и Р. Г. Тэта *Treatise on Natural Philosophy* (1867) [15]. Новый этап развития аналитической механики в XIX в. связан с У. Гамильтоном, который 1834-1835 гг. предложил новый формализм, но в течение нескольких десятилетий он не получил большого признания [16]. У Томсона и Тэта вопросы устойчивости рассматриваются на языке гамильтонова формализма. Кроме того, Томсон и Тэт впервые обратились к общим вопросам устойчивости из еще более фундаментальных позиций, исходя из

принципа наименьшего действия. И второй момент, Томсон и Тэт впервые обратились к вопросу об устойчивости движения, в том числе движения жидкости. Однако они не дали математически строгого определения устойчивости, исходя из понимания устойчивости Лагранжа [5], и на этой основе сформулировать критерий устойчивости. Надо отметить исследования Э. Рауса, близко подошедшего к общим вопросам устойчивости, но он ограничился только первым приближением (1877) [17]. Задача общего случая досталась следующему поколению исследователей – А. Пуанкаре, Н. Е. Жуковскому, А. М. Ляпунову. Здесь надо коснуться некоторых тенденций развития математики XIX в. Утверждалась методология, направленная на выяснение условий и границ истинности каждого утверждения, новых канонов строгости и доказательности. Особое значение получили теоремы существования, в частности, существования и единственности решений дифференциальных уравнений и четко различие необходимых и достаточных условий. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о разрешимости той или иной задачи. В русле обозначенных тенденций находится вопрос строго определения устойчивости и на этой основе построение теории устойчивости.

2. Создание современной теории устойчивости: А. Пуанкаре, Н. Е. Жуковский, А. М. Ляпунов

Пуанкаре, наверно, был первым, кто ясно осознал два тесно связанных между собой важнейших положения: 1) устойчивость – многообразное понятие, оно по-разному проявляется в различных ситуациях, и 2) требуется дать четкое определение устойчивости, чтобы сделать ее предметом строгого математического исследования. Вопрос об устойчивости Пуанкаре ставит в третьем мемуаре своего труда *Memoire sur les courbes définies par une équations différentielle* (1885) [18], где он заложил основы самой качественной теории (русский перевод [19]). Подробно вопрос об устойчивости изучен Пуанкаре в главе XXVI третьего тома *Новых методов небесной механики* [20]. Как уже упоминалось, фундаментальная проблема устойчивости Солнечной системы была поставлена в XVIII в. Лагранжем и Лапласом [9]–[12]. Лагранж показал, что при пренебрежении квадратичными членами большие оси орбит остаются неизменными. В рамках этого приближения большие оси можно представить рядами с членами вида

$$A \sin(\alpha t + \beta) \quad (1)$$

где A , α и β – постоянные.

Если эти ряды равномерно сходятся, то большие оси остаются заключенными в определенных пределах, и система находится в состоянии полной устойчивости. Положение меняется при учете следующего приближения теории возмущений. В своей работе 1808 г. С. Д. Пуассон установил [13], что в этом случае в рядах, помимо членов (1), появляются секулярные члены вида

$$At \sin(\alpha t + \beta)$$

Величина большой полуоси будет испытывать непрерывные колебания, система бесконечно много раз сколь угодно близко приближается к начальному положению, но нельзя сказать, что система значительно не удаляется от него, т.е. система неустойчива. Таким образом, имеются два различных по смыслу понятия устойчивости: устойчивость по Лагранжу и устойчивость по Пуассону [20, Т. 2. С. 130–131]. Устойчивость по Пуассону Пуанкаре рассматривал еще ранее [19, С. 110]. Надо отметить, что данное понятие устойчивости по Лагранжу отлично от упомянутой выше устойчивости равновесия консервативной механической системы. Таким образом, оказывается, что казавшееся интуитивно ясным понятие устойчивости имеет многообразный смысл. Сам Пуанкаре в четвертом мемуаре (1886) [19, С. 262] вводит еще один вид устойчивости – орбитальную устойчивость:

«Если движущаяся точка была очень близка к замкнутой траектории в момент $t = 0$, то она все время будет оставаться очень близкой к ней как при положительных, так и при отрицательных значениях t »

Здесь следует указать на забытую докторскую диссертацию Н. Е. Жуковского «О прочности движения» (1882) [21, 22, Р. 324-325]. Жуковский дал строгое определение орбитальной устойчивости, проведя параметризацию времени $\tau(t)$, причем $\tau(t_0) = t_0$, и сформулировал общие теоремы. Устойчивость по Жуковскому согласуется с устойчивостью по Пуанкаре в случае равновесия или периодических движений. Пуанкаре не решил задачу построения общей теории устойчивости, это заслуга А. М. Ляпунова, но идеи Пуанкаре оказали на него значительное влияние и явились источником вдохновения, что он отмечает в своем труде [23, С. 28-29].

Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

и рассматривает какое-либо частное решение $x_s = f_s(t)$, и

«Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть невозмущенным, а все остальные, с которыми оно сравнивается, возмущенными» [23, С. 28].

Подход Ляпунова к постановке задачи устойчивости находится в русле идей качественной теории. Речь идет уже не об одной траектории, а при определенных условиях о всем множестве траекторий посредством привлечения возмущенного движения. На современном языке устойчивость по Ляпунову означает устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, когда при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех векторов $x(t)$ таких, что $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ при $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$. Кроме того, Ляпунов еще вводит важное понятие асимптотической устойчивости, если еще $|x(t) - x_0(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Труд Ляпунова [23] явился исходным пунктом всех последующих исследований, где используется понятие устойчивости, и с его работы берет свое начало современная теория устойчивости, и не только в контексте механики. Другой исходный пункт связан с именем Дж. Биркгофа, выдвинувшие новые, совершенно нетривиальные идеи.

3. Понятие устойчивости в теории динамических систем.

Дж. Биркгоф

С именем Дж. Биркгофа связан новый этап развития не просто теории устойчивости, а самой качественной теории. Биркгоф вместе с Пуанкаре является основателем теории динамических систем. Появилось новое фундаментальное понятие – динамическая система, и сама теория у Биркгофа обрела четкие контуры. Биркгоф переходит на более общие и абстрактные позиции. Это касается и вопросов устойчивости. В деятельности Биркгофа важное значение имел коллоквиум математиков в университете Чикаго (1920), где он прочел цикл лекций «Динамические системы» [24]. Материал лекций составил ядро основного труда Биркгофа *Динамические системы* (1927) [25]. Значительное место в исследованиях Биркгофа отводится вопросам устойчивости, и наиболее полно они изложены в его большой статье в *Acta Mathematica*, вышедшей в том же самом 1920 г. [26]. Перейдем к этой работе.

С самого начала Биркгоф исследует вопросы устойчивости. Заметим, что во всех исследованиях по динамическим системам у Биркгофа явно ощущается влияние Пуанкаре. Не стала исключением и данная работа. Толчком исследований Биркгофа явилось доказательство геометрической теоремы Пуанкаре (теорема Пуанкаре-Биркгофа). В это доказательства Биркгоф

внес главный вклад. В данной теореме исключительное место занимают периодические движения. Их значение определяется тем, что при условии плотности заполнения ими какой-либо области с помощью периодических движений предполагалось изучать свойства всех других решений. Теорема Пуанкаре-Биркгофа была установлена для систем с двумя степенями свободы, которым Биркгоф вообще уделял пристальное внимание. Это простейшие неинтегрируемые системы. В данной работе Биркгоф широко использует метод сечения Пуанкаре, что позволяет понизить размерность задачи. Тогда движение описывается рекуррентными соотношениями с дискретным временем. Динамическая проблема сводится к дискретному преобразованию T замкнутой $(n-1)$ -мерной поверхности в себя, свойства движения сводятся к изучению свойств этого преобразования. Периодические траектории отображаются на поверхности в неподвижные точки. Биркгоф представил координаты трансформированных точек в виде ряда

$$u_1 = au + bv + \dots, \quad v_1 = cu + dv + \dots, \quad (2)$$

где u, v координаты неподвижных точек, и поставил задачу классификации инвариантных точек. Решение основывается на анализе линейного преобразования в разложении (2) и задача сводится к исследованию корней квадратного уравнения

$$\rho^2 - (a + d)\rho + ad - dc = 0, \quad (3)$$

$ad - dc = 1$, его корни обозначим через ρ и $1/\rho$. Представляя преобразование T в виде нормальной формы, можно выделить три случая: ρ действительное число, $\rho \neq \pm 1$; ρ является комплексным числом, $\rho = e^{i\theta}$, $|\rho| = 1$. В зависимости от значения угла θ рассматриваются три варианта: $\theta/2\pi$ – иррациональное число; $\theta = 0$; $\theta/2\pi$ – рациональное число. Тогда в линейном приближении получается

- I) $u_1 = \rho u, v_1 = \frac{v}{\rho}$ ($\rho \neq \pm 1$),
- II) $u_1 = u \cos \theta - v \sin \theta, v_1 = u \sin \theta + v \cos \theta$,
- III) $u_1 = \pm u, v_1 = \pm v + du$ ($d \neq 0$).

Этим случаям отвечают инварианты функций $uv, u^2 + v^2, u^2$ соответственно. В первом случае инвариантная точка P относится к гиперболическому типу $uv = \text{const}$. В третьем случае P будет двигаться вдоль пары параллельных прямых $u^2 = \text{const}$. Второй случай относится к эллиптическому типу, когда преобразование T соответствует вращению вокруг начального положения $(0,0)$ на угол θ [26, Р. 113-115]. Далее Биркгоф, следуя Т. Леви-Чивита [27], формулирует следующее основополагающее положение:

«Если окрестность инвариантной точки может быть выбрана такой, что точки, произвольно близкие к инвариантной точке, покидают эту окрестность при преобразовании T (или T^{-1}), инвариантная точка является неустойчивой, в противном случае инвариантная точка устойчива» [26, Р. 115].

В линейном приближении типы I и III являются неустойчивыми, тип II – устойчивым. Что очень примечательно, Биркгоф рассматривает вопросы устойчивости в контексте других проблем динамики: интегрируемости, классификации движений и др. Видение Биркгофом самого понятия устойчивости согласуется с понятием устойчивости по Ляпунову, но отличается в концептуальном отношении. В главе VII *Динамических систем* [25] Биркгоф выдвинул программу, в которой в полной общности ставится задача исследования динамических систем (программа Пуанкаре-Биркгофа):

«Конечной целью теории движения динамической системы должно служить качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» [25, С. 194].

Для Биркгофа устойчивые движения находятся в ряду между всеми движениями и естественным образом связаны с классификацией движений. В отличие от всего предыдущего развития теории устойчивости, где во главу угла ставилась устойчивость, а неустойчивость уходила

далеко на задний план, у Биркгофа принципиально иное видение. Неустойчивость впервые приобретает равные права с устойчивостью. Если ранее в бинарной оппозиции устойчивость-неустойчивость центр тяготел к полюсу устойчивости, то Биркгофа он смещается к середине между ними. Произошел концептуальный сдвиг, фактически новый взгляд на мир. Эта идея Биркгофа не произвела впечатления на современников. По достоинству она была оценена лишь во второй половине прошлого века. Тогда стало возможным говорить не просто о неустойчивости, а оказалось, что неустойчивость сама имеет сложную структуру и можно ввести количественную меру степени неустойчивости. Неустойчивость и сложные движения (хаос) становятся сущностными характеристиками, они играют конструктивную роль. Хаос не просто неупорядоченность, через него формируются новации, происходит развитие.

К 1920-м годам теория устойчивости Ляпунова являлась самой разработанной частью и некоторое время она развивалась относительно самостоятельно от общей теории динамических систем. Здесь имеются важные достижения, в частности, значительный вклад отечественных математиков (Н. Г. Четаев, К. П. Персидский, И. Г. Малкин, Н. Д. Моисеев, Е. А. Барбашин и др.). Это направление довольно подробно освещено в литературе (см., например, [28]-[30]). Выделим исследования Н. Г. Четаева (обращение теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, теоремы о неустойчивости) [31, 32]. При всей важности всех этих исследований они все же лежат в стороне от принципиальных вопросов теории устойчивости. Обратимся к принципиальным моментам в дальнейшем развитии понятия устойчивости. И здесь важное значение имеет деятельность школы Андропова.

4. Структурная устойчивость. Различные виды оппозиции устойчивость – неустойчивость

Обратимся к фундаментальному понятию бифуркации, введенное Пуанкаре (1885) [33], и занявшее центральное место в исследованиях А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкой массы и Э. Шмидта по нелинейным интегральным уравнениям. В точке бифуркации происходит разделение качественным образом различающихся состояний при малом изменении параметров системы. В этом контексте устойчивость предстает под новым ракурсом.

А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным было введено понятие структурной устойчивости (1937) [34], позднее оно получило развитие у М. Пейксото [35]. Структурно устойчивые системы – класс динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях самих дифференциальных уравнений. В понятии структурной устойчивости формализована такая сторона качественной теории, как глобальное описание. Структурная устойчивость легла в основу исследований в школе Андропова. В 1933 г. Андронов сформулировал программу исследований динамических систем [36], которая представляет частный случай программы Пуанкаре-Биркгофа. Рассматривается динамическая система, описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_i}{dt} = f_i(w_1, w_2, \dots, w_m; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

где $w_1, w_2, \dots, w_m$ – фазовые переменные, $p_1, p_2, \dots, p_n$ – параметры системы. Андронов поставил задачу исследования структуры разбиения фазового пространства на фазовые траектории и изучение изменения этой структуры в зависимости от значений параметров p_j . Пространство параметров разбивается на области, соответствующие различным разбиениям фазового пространства. Границы этих областей соответствуют бифуркационным значениям параметров, когда их малое изменение приводит к изменению топологической структуры разбиения фазового пространства. В школе Андропова эта программа на основе понятия структурной

устойчивости исчерпывающим образом была реализована для двумерных систем.

Структурная устойчивость оказалась очень конструктивным понятием. С 1950-х гг. происходит смещение исследований структурной устойчивости в сторону общей теории динамических систем (С. Лефшец, Г. Баггис, М. Пейксото). Исследования в этом направлении стали поворотным пунктом в развитии теории динамических систем и понятия устойчивости, и вместе с другими событиями явились началом новой эпохи в науке вообще. Одно из главных событий связано с именем С. Смейла, который поставил скромно звучащую задачу обобщения понятия структурной устойчивости на многомерные системы. Смейл выдвинул гипотезу, что представления, развитые для описания двумерных систем, остаются справедливыми и в многомерном случае, и существуют структурно устойчивые системы в пространстве многомерных динамических систем ($n \geq 3$) [37]. Фактически гипотеза Смейла была попыткой распространить программу Андронова на многомерный случай. По мысли Смейла, мир устроен просто, добавление еще одного измерения ничего принципиально не меняет. Такие динамические системы действительно существуют (системы Морса-Смейла), но как неожиданно установил сам Смейл [37], они не составляют плотного множества, не являются типичными. В многомерном случае типичны более сложно устроенные системы, для которых ключевым понятием, восходящим еще к Пуанкаре, являются гомоклинические структуры. Для многомерных систем характерна сложная динамика. В таких системах структурная устойчивость выступает в новом, совершенно неожиданном качестве. Гомоклинические структуры локально неустойчивы в каждой точке инвариантного множества. Но сама структура в целом в качественном отношении устойчива к малым внешним возмущениям. Другими словами, области неустойчивости сами являются устойчивыми. Структурная устойчивость не только продолжает играть важную роль в современной теории динамических систем. Это понятие приобрело общенаучное значение, оно вышло за рамки математики, проникает в другие области, в том числе в гуманитарную сферу.

Теория устойчивости Ляпунова дала мощный аналитический инструмент для исследования устойчивости - характеристические показатели Ляпунова [23, С. 48-49]. Это критерий наличия сложных движений в системе. На современном языке идея характеристических чисел заключается в том, что рост нормы $|x(t)|$ решения системы $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется по шкале ростов, заданной семейством функций действительного переменного (в данном случае $e^{\lambda t}$), и тем самым данному решению приписывается определенная числовая характеристика (характеристическое число λ). Таким образом, семейство решений получает упорядочение по шкале ростов [38, С. 10]. Другими словами, производится сравнение асимптотического поведения решений $x(t)$ с асимптотическим поведением некоторой монотонной функции $f(t)$.

О. Перрон дал эквивалентное определение показателей Ляпунова (1930) [39], которое в настоящее время является общепринятым [39, S. 10]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$$

Характеристические показатели были введены Ляпуновым для определения устойчивости одной траектории. Фундаментальное значение показателей Ляпунова заключается в том, что они характеризуют устойчивость почти всех (по мере) траекторий на аттракторе. В основе использования показателей Ляпунова лежит мультипликативная эргодическая теорема о существовании и конечности множества возможных значений показателей, которую доказали В.И. Оселедец [40] и Миллиончиков [41]. Мультипликативная эргодическая теорема позволяет обобщить показатели Ляпунова на совокупность траекторий и дает строгое обоснование для их вычисления. Показатели Ляпунова являются количественной мерой сложности движений. Для регулярных движений показатели равны нулю. Значения $\lambda_i > 0$ свидетельствуют о наличии сложных движений и показатели могут быть упорядочены по мере возрастания

сложности $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$. Показатели Ляпунова сейчас являются одним из главных инструментов исследования сложных движений.

Развитие теории динамических систем привело к открытию новых форм дихотомии устойчивость-неустойчивость с существенно новым содержанием. В многомерных динамических системах ($n > 2$) становится возможным объединение стохастических слоев на поверхности постоянной энергии в связанную систему. По образовавшейся таким образом паутине становится возможным движение, т.е. появляется механизм распространения неустойчивости (диффузия Арнольда) [42]. Скорость диффузии Арнольда очень мала, но этот механизм имеет универсальный характер. В настоящее время можно утверждать, что диффузия Арнольда – это реально существующее явление в физических системах.

Изучение вырожденных динамических систем, когда якобиан частот w_i по импульсам p_j равен нулю

$$\det \left| \frac{\partial w_i}{\partial p_j} \right| = 0,$$

привело к еще одному существенно новому результату. При рациональном отношении между частотами с ростом возмущения увеличивается ширина стохастического слоя, и наступает момент, когда перекрываются щели между сепаратрисами. Тогда стохастические слои соединяются и происходит образование структуры, получившей название паутины Заславского [43]–[45]. В паутине движение неустойчиво, и по ней частицы могут блуждать сколь угодно далеко. Такой механизм диффузии также имеет универсальный характер. Но скорость диффузии по паутине Заславского значительно превышает скорость диффузии Арнольда. Особенность паутины Заславского заключается в том, что в ряде случаев покрытие фазовой плоскости имеет замечательно симметричную форму (рис. 1).

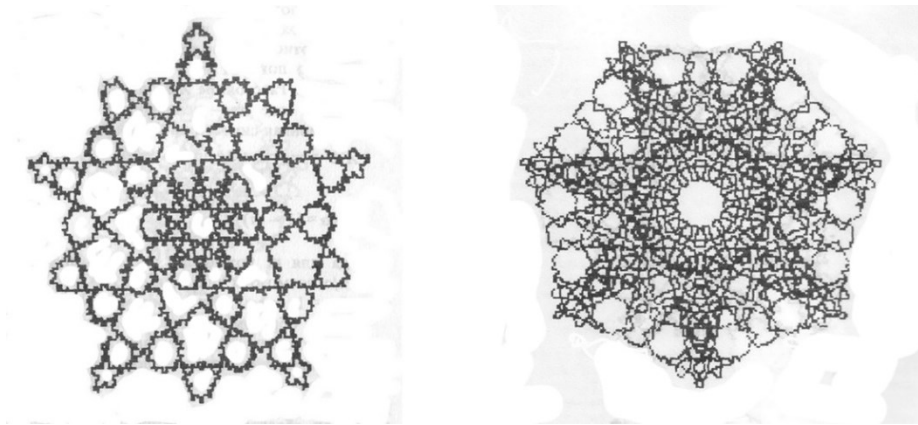


Рис. 1: Стохастическая паутина с симметрией 5-го и 7-го порядков ([45]).

Границы фигур образуют фрактальные линии. Здесь мы сталкиваемся с неожиданной связью между совершенно разнородными явлениями, когда неустойчивость формирует упорядоченность, фигуры образуются хаотическими движениями.

Другое направление в эволюции устойчивости дало нетривиальное обобщение этого понятия – динамическая устойчивость. Начало было положено исследованием простой системы – маятника с вибрирующим подвесом (А. Стефенсон [46], Н. Н. Боголюбов [47], П. Л. Капица [48] и др.) [49]. У маятника с вибрирующей точкой подвеса при достаточно большой частоте верхнее положение становится устойчивым, тогда как у обычного маятника устойчиво нижнее положение. Маятник с вибрирующим подвесом может демонстрировать сложные движения, имеются точки бифуркации. В настоящее время это одна из важнейших базовых моделей нелинейной механики. Эта модель послужила толчком для обширных исследований

В.Н. Челомея по повышению устойчивости упругих систем с помощью вибраций, возможностью управления бифуркациями с помощью внешнего воздействия и т.д. [50, 51]. Аналоги систем с вибрирующей точкой подвеса имеются и за пределами механики (физика плазмы, ускорительная техника, локализация частиц в неоднородных электромагнитных полях и др.). Поле исследований динамической устойчивости стремительно расширяется.

5. Гидродинамическая неустойчивость

Понятие устойчивости занимает центральное место в гидродинамических течениях. По словам Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица: «Не всякое решение уравнений движения, даже если оно является точным, может реально осуществиться в природе. Осуществляющиеся в природе движения должны не только удовлетворять гидродинамическим уравнениям, но должны быть устойчивыми» [52, С. 137]. Из опыта известно, что в гидродинамических течениях ламинарное движение с ростом числа Рейнольдса сменяется турбулентным режимом. Несмотря на более чем полутора столетнюю историю изучения турбулентности, проблема далека от решения. По словам С. Голдстейна:

«Я вспоминаю, что на съезде Британской Ассоциации в Лондоне в 1932 г. Лэмб заметил: «Я уже стар, и когда умру и отправлюсь на небеса, я надеюсь пролить свет на два вопроса. Первый из них – квантовая электродинамика, а другой – турбулентное движение в жидкостях. И по первому вопросу я настроен оптимистично». Он был прав будучи более оптимистичным относительно квантовой электродинамики, чем по проблеме турбулентности» [53, Р. 23].

Можно напомнить, что тогда в 1930-е гг. в физике сложилась кризисная ситуация: при вычислении физических величин по теории возмущений появлялись расходимости уже во втором порядке. В 1940-1950-е гг. этот кризис был разрешен, чего нельзя сказать о проблеме турбулентности вплоть до настоящего времени.

Проблему турбулентности можно сформулировать следующим образом: как, исходя из первых принципов (в этом качестве выступают уравнения Навье-Стокса), заданное ламинарное течение теряет устойчивость и развиваются сложные движения в широком диапазоне пространственно-временных масштабов? В таком построении, учитывая крайнюю сложность проблемы, недостаточен подход А. Пуанкаре и Ф. Клейна, который утверждает об освобождении от излишней строгости при использовании математики в естественных науках, т.е. необязательно придерживаться такой строгости, как в математике, это излишнее усложнение. Но вот что говорит Дж. Марсен:

«Для полных уравнений Навье-Стокса мы не только не знаем ни одного турбулентного решения, но даже неизвестно, существует ли такое» [54, С. 11].

Задачу гидродинамической устойчивости при заданном течении можно свести к задаче определения устойчивости относительно малых возмущений. В 1908 г. в Трудах IV Международного конгресса математиков в Риме Зоммерфельд опубликовал работу [55], где он, исходя из уравнений Навье-Стокса, получил линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое затем было использовано для изучения устойчивости течения. В этой же работе было введено понятие числа Рейнольдса. Такое же уравнение было получено ирландским математиком У. Орром [56] и в литературе оно известно как уравнение Орра-Зоммерфельда. Задачу об устойчивости плоского течения Пуазейля в линейном приближении решил В. Гейзенберг (это была его диссертация) (1924) [57]. Этот результат не разрешил проблемы турбулентности, но он ныне признан классическим.

В настоящее время теорию турбулентности не рассматривают лишь как ветвь классической гидродинамики. Она скорее представляется общей теорией, которая дает возможность установить глубокие связи между различными областями науки. Возникновение и самоподдер-

жание структур, характерных для турбулентных течений, является общенаучной проблемой для гидродинамики, физики плазмы, биохимии, экологии и т.д. Тогда в этом более широком плане теория турбулентности пытается ответить на фундаментальный вопрос: каким образом нелинейное поле становится неупорядоченным и каким способом это можно описывать?

В математическом отношении первостепенное значение приобретает установление существования решений уравнения Навье-Стокса. Ранее вопрос о существовании решений уравнений математической физики обычно решался просто нахождением этих решений. Теперь эта традиция оказалась нарушенной. Во всей общности встал вопрос исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Теперь возможен совершенно другой взгляд на место математики в приложениях. Здесь можно вспомнить слова А.М. Ляпунова:

«Я думаю, что если в некоторых случаях и допустимо пользоваться неясными рассуждениями, когда желают установить новый принцип, <...> однако же невозможно так поступать, когда надо решать определенную задачу (механики или физики), которая поставлена математически совершенно точно. Эта задача становится тогда проблемой чистого анализа и должна быть решена как таковая» [58, С. 209].

Указанная выше задача не является в этом отношении чем-то исключительным. В обиход физиков входят множества меры нуль, различие рациональных чисел от иррациональных, теоремы существования и единственности и т.д., ранее не свойственные физическому мировоззрению.

Разработка математической теории уравнений Навье-Стокса в первую очередь связано с именем Ж. Лере (1933-1934) [59]-[61]. Наибольшую известность получила его большая статья в *Acta Mathematica* [61]. Лере ставит задачу установить существование, единственность и гладкость трехмерных уравнений Навье-Стокса при заданных начальных условиях. В начале работы Лере ссылается на своего предшественника, шведского математика К. Озена, который пытался решить ту же задачу [62]. Но Озену удалось установить существование решений лишь для очень короткого интервала времени. Лере исходит из уравнения Навье-Стокса

$$\nu \Delta u_i(x, t) - \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} = u_k(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} = 0, \quad (4)$$

где постоянные ν и ρ вязкость и плотность соответственно, p – давление, u_i – компоненты скорости. Лере рассматривает регулярные решения $u_i(x, t)$ в некотором временном интервале при $\Theta \leq t < T$ и доказывает теорему единственности: два регулярных решения для $\Theta \leq t < T$ равны, если они равны при $t = \Theta$; и теорему существования: для каждого регулярного начального значения $u_i(x, 0)$ соответствует решение $u_i(x, t)$, определенное при $0 \leq t < \tau$ и которое переходит в $u_i(x, 0)$ для $t = 0$. Следующий результат работы представляется наиболее важным. Решения $u_i(x, t)$ при $t > T$ теряют регулярность и за пределами указанного интервала могут быть продолжены только как слабые (обобщенные) решения (см., например, [63]), Лере их называет турбулентными решениями. Заметим, что теория обобщенных функций тогда еще только создавалась, и относительно завершенную форму она получила уже в 1950-е гг. Как известно, условия в постановке краевых задач в контексте обобщенных решений значительно ослаблены, уже не требуется дифференцируемости решений. Лере представляет турбулентные решения в следующем виде: если краевая задача имеет ненулевое решение, из него можно сконструировать турбулентное решение

$$U_i(x, t) = [2\alpha(T - t)]^{-1/2} U_i[2\alpha(T - t)^{-1/2}, x]$$

для $t < T$ и $U_i(x, t) = 0$ для $t > T$. На временной оси при $t = T$ функция претерпевает разрыв. Таким образом, переход к турбулентному режиму отвечает разрушению решений и время существования регулярных решений оказывается конечным. Работа Лере [61] явилась основой всех последующих исследований в этом направлении (Э. Хопф (1951) [64], О. А. Ладыженская

[65], В. Шеффер [66], Л. Каффарелли, Р. Кон, Л. Ниренберг [67] и др.), но успехи не очень значительны.

Исследования Лере не смогли разрешить проблемы турбулентности. Полученные выводы не согласуются с эмпирическими данными. Во многих случаях разрушения решений с течением времени не обнаружено [54]. Если такое разрушение и имеет место, то оно не является общим свойством. Но результаты Лере весьма существенны. Они поставили ряд глубоких вопросов, которые выходят собственно за пределы проблемы развития гидродинамических неустойчивостей. Еще раз подчеркиваем, во всей общности встали вопросы существования и единственности решений нелинейных уравнений. Традиционный путь решения задач культивировавшийся в физике, здесь оказался неприменимым. Установление существования и единственности решений становится отдельной задачей. Эти вопросы остаются открытыми не только для уравнений гидродинамики, но для многих других задач физики, механики, химии, техники. К тому же ряду относится и регулярность решений. Что касается проблемы турбулентности, она отнесена к числу важнейших нерешенных задач третьего тысячелетия. Другой важный вопрос, который поставила работа Лере, касается границ применимости классической постановки задачи решения уравнения с заданными начальными и граничными условиями. Можно ли считать, что поставленная таким образом задача адекватно описывает явление турбулентности? Поскольку указанные вопросы остаются пока без ответа, предметом обсуждения становится фундаментальность самих уравнений Навье-Стокса. Не требуется ли их модификация на основе новых физических идей?

Открытие явления динамического хаоса породило новые надежды в установлении природы гидродинамической неустойчивости. Еще с XIX в. переход к турбулентности рассматривался через возникновение и эволюцию неустойчивостей (см., например, [68]). Появилось понятие сценария возникновения турбулентности (Ландау-Хопфа, Рюэля-Такенса, Фейгенбаума, через перемежаемость и др.). Примечательной является работа Д. Рюэля и Ф. Такенса (1971) [69], в которой они развили общий подход, далеко выходящий за рамки первоначальной задачи. Рюэль и Такенс рассмотрели развитие неустойчивостей на бесконечномерном векторном пространстве H через эволюцию поля скоростей, задаваемой уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{dv}{dt} = X_\mu(v),$$

где X_μ – векторное поле на H , параметр μ определяется физическими характеристиками, такими как числа Рейнольдса или Рэлея. Точная форма уравнений нигде не использовалась. Ими была изучено развитие неустойчивостей и возникновение сложной динамики. Первоначальная гидродинамическая задача представляет одну из возможных реализаций.

Аппроксимация моделей развития гидродинамической неустойчивости конечномерными динамическими системами рассматривают как новый конструктивный путь, который позволяет выявить качественные особенности явления. При этом возникают сложные вопросы, такие как все еще не доказанные гипотезы Колмогорова о существовании минимального аттрактора, размерность которого неограниченно растет при исчезающей вязкости [70, 71]. Имеется целый ряд строгих результатов. Вопросы обоснования привели А. М. Обухова к формулировке общих требований, которым должны удовлетворять упрощенные модели, и введению понятия систем гидродинамического типа [72, 73]. Так называется система, у которой общие свойства уравнений с точки зрения характера нелинейности и законов сохранения такие же, как и у изучаемого гидродинамического объекта, но имеющая конечное число степеней свободы. Несмотря на некоторые успехи и не совсем угасшие надежды аппроксимации гидродинамических течений конечномерными динамическими системами, разрешить на таком пути проблему гидродинамической неустойчивости пока не удается.

Вернемся к конечномерным динамическим системам. При более детальном изучении оказалось, что реальные системы являются неоднородными, в них всегда имеются области с

регулярными и хаотическими движениями. В случае сильной неинтегрируемости система становится локально неустойчивой почти всюду, за исключением областей малой, но конечной меры. Простая картина движения, когда отдельно существуют области регулярности и сложный движений, является сильно идеализированным представлением. В реальных системах присутствует бесконечное число эллиптических точек, окруженных островками инвариантных кривых. Вокруг каждого островка существует цепочка вторичных островков, которые в свою очередь окружены цепочками следующего уровня и т.д. Имеет место сложная иерархическая структура разделения фазового пространства.

Подобная же ситуация и в диссипативных системах. В сценариях перехода к турбулентному движению цепочки бифуркаций не приводят к гиперболическому аттрактору в строгом смысле этого слова. В большинстве случаев возникают объекты (квазиаттракторы), обладающие свойствами «истинного» странного аттрактора, и в то же время в них присутствуют устойчивые периодические орбиты [74]. В квазиаттракторах область неустойчивости является неоднородной, в них присутствуют регулярные движения. Таким образом, в динамических системах имеет место новый, более высокий уровень сложности. Формы сосуществования устойчивости и неустойчивости сказанным не исчерпываются и являются весьма многообразными [75]–[77]. Мы сталкиваемся с новой нетривиальной ситуацией. Не просто имеются устойчивые и неустойчивые движения, а они сосуществуют вместе, формируют единую структуру, имеющее сложное топологическое устройство.

Еще более высокий уровень сложности присущ гидродинамическим системам. Характерной чертой турбулентности является наличие многих масштабов, т.е. здесь не один какой-то вид движения, а целый класс движений. Соответственно в гидродинамических течениях присутствуют различные типы неустойчивостей (Рэлея-Тейлора, Кельвина-Гельмгольца, Рихтмайера-Мешкова и др.). Наименьшим из масштабов является масштаб Колмогорова

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4},$$

где ε – величина диссипации кинетической энергии на единицу массы, ν – вязкость. Если взять отношение характерного размера турбулентного вихря l к масштабу Колмогорова, то $l/\eta = R_l^{3/4}$, где R_l – число Рейнольдса. Масштабы турбулентности при $R_l > 10^3$ могут варьироваться на несколько порядков [78, Р. 19]. Наличие многих масштабов непосредственно связано с упорядоченностью (когерентностью) в явлении турбулентности в соответствии со шкалой изменения пространственных характеристик. Когерентные структуры являются типичным свойством турбулентности и представляют упорядоченные компоненты турбулентного потока, скоррелированные по фазе во всей области занимаемого ими пространства. Эти структуры устойчивы в течение продолжительного времени. Виды упорядоченности в гидродинамических системах весьма разнообразны [78, 79]. В гидродинамических течениях были обнаружены фигуры, подобные паутине Заславского [45]. Причем такая квазисимметричная паутина образуется не в фазовом, а в обычном пространстве. Стационарные течения, создавая упорядоченность, одновременно порождают области с неустойчивым хаотическим расположением линий тока.

6. Заключение

Что же получается в итоге? Понятие устойчивости прошло длинный путь развития в соответствии с доминирующими тенденциями математики своего времени, и при этом можно выделить несколько этапов с явно проглядываемыми чертами. После того, как устойчивость стала предметом математического изучения (середина XVIII в.), поначалу изучалась устойчивость равновесия статической системы и устойчивость динамической (т.е. находящейся в

движении) системы как целого. Лишь через столетие спустя, в середине XIX в., был поставлен вопрос об устойчивости самих движений. В конце XIX в. стала вырисовываться картина сложности понятия устойчивости, многообразие ее форм и видов. В соответствии с духом математики второй половины XIX в., с утверждением новых канонических математической строгости, первостепенное значение приобрел вопрос строгого определения устойчивости и на этой основе построение последовательной теории. Реализация этой программы привела в 1920-е гг. к выделению двух ветвей в развитии теории устойчивости. Первая ветвь – расширение теории вширь на старой идейно базе. Это касалось аппаратной части теории, разработки новых методов, значительного усиления связей с приложениями. Другая ветвь – устойчивость в контексте общей теории динамических систем, где отчетливо проявляется значение оппозиции устойчивость-неустойчивость. Сделанный шаг имел принципиальное значение. Неустойчивость обрела равные права с устойчивостью, стала предметом изучения. Не только устойчивость, но и неустойчивость оказывается сложным понятием и имеются ее различные виды, которые проявляются в различных формах. Более того, во многих системах устойчивость и неустойчивость сосуществуют, образуя сложную топологическую картину. Рассматривая устойчивые движения в ряду всех движений, можно предположить, что многообразие понятия устойчивости определяется многообразием самих динамических систем. В этой связи можно поставить вопрос о границах применимости понятия устойчивости. В этом отношении уже имеются некоторые результаты. Так, в системах с гомоклиническими касаниями оказывается невозможным *полное описание динамики* (Л. П. Шильников и др. [80, 81]). Другими словами, в таких системах невозможен полный качественный анализ – факт фундаментальной важности. Требуются новые идеи и, может быть, новая математика.

Автор выражает благодарность участникам Международной конференции Российского национального комитета по истории и философии науки и техники РАН 28 марта – 1 апреля 2022 г. за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leine R.L. The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson, Lyapunov stability // *Nonlinear Dyn.* 2010. Vol. 59. Pp. 173–182.
2. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук. М.-Л.: ГТТИ, 1934. 603 с.
3. Euler L. *Scintia novalis seu tractatus de consruendis ac dirigendis*. St. Petersburg, Academiae Scientiarum, 1749. 536 p.
4. Lagrange J.L. Sur le principe des vitesses virtuelles // *Oeuvres de Lagrange*. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877. Pp. 317–321
5. *Mécanique analytique*, par J.L. Lagrange. T. Première. Paris, 1811. 422 p.
6. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 594 с.
7. Lejeune-Dirichlet P.G. Über die Stabilität des Gleichgewichts // *CRELLE, J. Reine Angew. Math.* 1846. B. 32. Pp. 85–88.
8. Лежен-Дирихле П. Г. Об устойчивости равновесия // Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 537–540.

9. Lagrange J. L. Sur le mouvement des noeuds des orbits planétaires // *Mém. Acad. Sci.* 1774. Pp. 276–307.
10. Lagrange J. L. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes // *Oeuvres de Lagrange*. T. V. Paris: Gautier-Villars, 1870. Pp. 127–207, 208–344.
11. Laplace P. S. Sur le principe de la gravitation universelle et sur le inégalité séculaires des planètes qui en dépendent // *Oeuvres de Laplace*. T. VIII. Paris: Gautier-Villars, 1841. Pp. 201–275.
12. Laplace P. S. Sur le équation séculaire de la lune // *Mém. Acad. Sci.* 1788. Pp. 243–271.
13. Poisson S. D. Mémoire sur les inégalité séculaires des moyens mouvements des planètes // *J. Ecole Polytech.* 1808. T. XV. Pp. 1–56.
14. Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. М.: Гостехиздат, 1965. 328 с.
15. Thomson W., Tait P. G. *Treatise on Natural Philosophy*. Oxford: Clarendon Press, 1867. XXIII, 737 p.
16. Wise N. M., William Thomson and Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, First edition (1867) // *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. I. Grattan-Guinness (ed.). Amsterdam: Elsevier, 2005. Pp. 521-533.
17. Routh E. G. *A treatise of stability of a given state of motion*. L.: Macmillan and Com., 1877. 129 p.
18. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // *J. math. pures et appl. Sér. 3.* 1881. V. 7. P. 375-422; 1882. V. 8. P. 251-296; *Sér. 4.* 1885. V. 1. P. 167-244; 1886. V. 2. pp. 151–217.
19. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
20. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. // *Избр. труды: В 3 т.* / М.: Наука, 1971. Т. 2. 998 с.
21. Жуковский Н. Е. О прочности движения // *Соч. Н. Е. Жуковского*. Т. 1. М.: Типография Император. Моск. Ун-та, 1912. С. 194–296.
22. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi A. I. *Frequently methods in oscillation theory. Mathematics and its applications*. V. 357. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996. 403 p.
23. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // *Ляпунов А. М. Избр. труды: работы по теории устойчивости*. М.: Наука, 2007. С. 27–298.
24. Hurvitz, W. A. The Chicago Colloquium // *Bull. AMS.* 1920. V. 27. Pp. 65–71.
25. Birkhoff G. D. *Dynamical Systems*. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p. / *Рус. пер.: Дж. Биркгоф Динамические системы* / Пер. с англ. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.
26. Birkhoff G. D. *Surface transformations and their dynamical applications* // *George David Birkhoff. Coll. Math. Papers*. V. II. N.Y.: AMS, 1950. Pp. 111–229.
27. Levi-Civita T. *Sopra alcuni criteri di instabilità* // *Annali di Math.* 1901. Ser. III. V. 5. Pp. 221–308.
28. Моисеев Н. Д. *Очерки развития теории устойчивости*. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 663 с.

29. Математика в СССР за сорок лет 1917-1957. Т. 1. Под ред. А. Г. Куроша. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 1000 с.
30. Григорьян А. Т., Погребысский И. Б. История механики с конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука, 1972. 417 с.
31. Четаев Н. Г. Одна теорема о неустойчивости // ДАН СССР. 1934. Т. 1. С. 529–530.
32. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
33. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta. Math. 1885. Т. 7. Рр. 259–380 ; Oeuvres de Henri Poincaré. Т. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Рр. 40–140.
34. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–252.
35. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. Vol. 1. N 2. Рр. 101–120.
36. Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний // I Всесоюзн. конф. по колебаниям. Т. I. М.: Гостехтеориздат, 1933. С. 32–71.
37. Smale S. A structurally stable differential homomorphism with an infinite number of periodic points // Труды межд. симп. по нелинейным колебаниям 1961. Киев: АН УССР, 1963. С. 365–366.
38. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. Н., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
39. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Mathem. Zeitschr. 1930. В. 31. S. 748–766.
40. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. общества. 1968. Т. 19. С. 179–210.
41. Миллионщиков М. Д. Критерий устойчивости вероятностного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами // Мат. сб. 1969. Т. 78. № 2. С. 179–202.
42. Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156. № 1. С. 9–12.
43. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Генерация упорядоченных структур с осью симметрии из гамильтоновой динамики // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 144. В. 7. С. 349–353.
44. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. В. 5. С. 500–516.
45. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991. 236 с.

-
46. Stephenson A. On a class of forced oscillations // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1906. V. 37. № 148. Pp. 353–360.
 47. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. трудов Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. Т. 14 С. 9–34.
 48. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып.5. С. 588–597.
 49. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н. Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П. Л. Капица и другие // Изв. вузов «ПНД». 2017. Т. 25. № 5. С. 69–87.
 50. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 345–347.
 51. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 62–67.
 52. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
 53. Goldstein S. Fluid mechanics in the first half of this century // Annu. Rev. Fluid Mech. 1969. V. 1. Pp. 1–29.
 54. Марсден Дж. Соотношение между уравнениями Навье-Стокса и турбулентностью // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 7–20.
 55. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodyhamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen // Proc. 4th Int. Congr. Rome. 1908. Pp. 116–124.
 56. Orr W. The stability or instability of the steady motions of a liquid // Proc. Roy. Irish Acad. 1906. A 27. V. 27. Pp. 9–68, 69–138.
 57. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // Ann. der Phys. 1924. B. 74. № 15. Pp. 577–624.
 58. Ляпунов А. М. Об одной задаче Чебышева // Зап. Акад. Наук по Физ.-мат. отд. 1905. 8 сер. Т. 17. № 3. С. 1–32; А. М. Ляпунов. Собр. Соч. Т. 3. М. –Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–236.
 59. Leray J. Etude de diverses équations intégrals non linéarais et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. V. 12. Pp. 1–82.
 60. Leray J. Essai sur le mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois // J. Math. Pures Appl. 1934. V. 13. Pp. 341–418.
 61. Leray J. Sur le mouvements d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta Math. 1934. V. 63. Pp. 193–248.
 62. Oseen C. W. Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig : Academie Verlag, 1927. 337 S.
 63. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
 64. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // Math. Nachrich. 1951. B. 4. S. 213–231.

-
65. Ladyzhenskaya O.A. Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Lincei Lectures. Cambridge: CUP, 1991. 73 p.
66. Scheffer V. (1976), Turbulence and Hausdorff dimension. // Turbulence and Navier-Stokes equations // Proc. Conf. Univ. Paris-Sud, Orsay, 1975. Berlin: Springer Verlag, 1976. Pp. 174–183.
67. Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35(6). Pp. 771–831.
68. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т.1. - С.-Птб: Гидрометеиздат, 1992. 692 с.
69. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. Pp. 167–192 / Рус. пер. в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117–151.
70. Arnold V.I. Kolmogorov's hydrodynamic attractors // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1991. V. 434. Pp. 19–22.
71. Arnold V., Khesin B. Topological methods in hydrodynamics. N.Y.: Springer, 1998. 374 p.
72. Обухов А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа // ДАН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 309–312.
73. Нелинейные системы гидродинамического типа. Под ред. А. М. Обухова. М.: Наука, 1974. 160 с.
74. Afraimovich V.A., Shilnikov L.P. On strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence. Boston-London-Melbourn: Pitman, 1983. Pp. 1–34.
75. Zaslavsky G.M. Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws // Physics Today. 1999. Vol. 52. Pp. 39–45.
76. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 76–125.
77. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков О. А., Козлов А. Д. Математическая теория динамического хаоса // Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.
78. Holmes P., Lumley J., Bercooz G., Rowley C. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. Cambridge: CUP, 2012. 386 p.
79. Фомин Н. Н., Чечеткин В. М. Когерентные гидродинамические структуры и вихревая динамика. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Препринт № 1 за 2015 г.
80. Шильников Л. П. Гомоклинические траектории: от Пуанкаре до наших дней // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 465–489.
81. Гонченко С. В., Тураев Д. Б., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Совр. математика и ее прилож. 1999. Т. 67. С. 69–128.

REFERENCES

1. Leine R.L. The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson, Lyapunov stability // *Nonlinear Dyn.* 2010. V. 59. Pp. 173–182.
2. The method of finding curves of lines with the properties of a maximum or a minimum, or the solution of an isoperimetric problem, taken in the broadest sense of Leonard Euler, a royal professor and a member of the Imperial Petersburg Academy of Sciences. Moscow-Leningrad: GTTI, 1934. 603 p. (in Russian).
3. Euler L. *Scintia novalis seu tractatus de consruendis ac dirigendis*. St. Petersburg, Academiae Scientiarum, 1749. 536 p.
4. Lagrange J.L. Sur le principe des vitesses virtuelles // *Oeuvres de Lagrange*. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877. Pp. 317–321.
5. *Mécanique analytique*, par J.L. Lagrange. T. Première. Paris, 1811. 422 p.
6. Lagrange J.L. *Analytical mechanics*. T. 1. M.-L.: GITTL, 1950. 594 p. (in Russian).
7. Lejeune-Dirichlet P.G. Über die Stabilität des Gleichgewichts // *CRELLE, J. Reine Angew. Math.* 1846. B. 32. Pp. 85–88.
8. Lejeune-Dirichlet P.G. On the Stability of Equilibrium // *Lagrange J. Analytical Mechanics*. T. 1. Moscow-Leningrad: GITTL, 1950. Pp. 537–540 (in Russian).
9. Lagrange J.L. Sur le mouvement des noeuds des orbits planétaires // *Mém. Acad. Sci.* 1774. Pp. 276–307.
10. Lagrange J.L. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes // *Oeuvres de Lagrange*. T. V. Paris: Gautier-Villars, 1870. Pp. 127–207, 208–344.
11. Laplace P.S. Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent // *Oeuvres de Laplace*. T. VIII. Paris: Gautier-Villars, 1841. Pp. 201–275.
12. Laplace P.S. Sur l'équation séculaire de la lune // *Mém. Acad. Sci.* 1788. Pp. 243–271.
13. Poisson S.D. Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes // *J. Ecole Polytech.* 1808. T. XV. Pp. 1–56.
14. Einstein A., Infeld L. *The Evolution of Physics*. Simon and Schuster, 1942. 351 p.
15. Thomson W., Tait P.G. *Treatise on Natural Philosophy*. Oxford: Clarendon Press, 1867. XXIII. 737 p.
16. Wise N.M., William Thomson and Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, First edition (1867) // *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940*. I. Grattan-Guinness (ed.). Amsterdam: Elsevier, 2005. Pp. 521–533.
17. Routh E.G. *A treatise of stability of a given state of motion*. L.: Macmillan and Co., 1877. 129 p.
18. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle // *J. math. pures et appl. Sér. 3*. 1881. V. 7. Pp. 375–422; 1882. V. 8. Pp. 251–296; *Sér. 4*. 1885. V. 1. Pp. 167–244; 1886. V. 2. P. 151–217.

19. Poincaré H. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Moscow: GITTL, 1947. 392 p. (in Russian).
20. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899. 410 p.
21. Zhukovsky N. E. On the Strength of Motion // Scholar notes of Moscow University. Department of Physics and Mathematics. sciences. 1882. V. 4. Pp. 10–21 (in Russian).
22. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi A. I. Frequently methods in oscillation theory. Mathematics and its applications. V. 357. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996. 403 p.
23. Lyapunov A. M. The general problem of the stability of motion // Lyapunov A. M. Select. works: works on the stability of motion. Moscow Nauka, 2007. Pp. 27–298 (in Russian).
24. Hurvitz, W. A. The Chicago Colloquium // Bull. AMS. 1920. V. 27. Pp. 65–71.
25. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 1927. IX + 295 p.
26. Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical applications // George David Birkhoff. Coll. Math. Papers. V. II. N.Y.: AMS, 1950. Pp. 111–229.
27. Levi-Civita T. Sopra alcuni criteri di instabilità // Annali di Math. 1901. Ser. III. V. 5. Pp. 221–308.
28. Moiseyev N. D. Essais on the development of the theory of stability. Moscow-Leningrad: GITTL, 1949. 664 p. (in Russian).
29. Mathematics in the USSR for forty years 1917-1957. T. 1. Ed. A. G. Kurosh. M.: State. Publ. House of Phys.-Math. Lit., 1959. 1000 p. (in Russian).
30. Grigoryan A. T., Pogrebyssky I. B. History of mechanics from the end of the 18th century to the middle of the 20th century. M.: Nauka, 1972. 417 p. (in Russian).
31. Chetaev N. G. One theorem on instability // Rep. Acad. Sci. USSR. 1934. T. 1. Pp. 529–530 (in Russian).
32. Chetaev N. G. Movement stability. Works on analytical mechanics. M.: Publ. House Acad. Sci. USSR, 1962. 535 p. (in Russian).
33. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta. Math. 1885. T. 7. Pp. 259–380 ; Oeuvres de Henri Poincaré. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. Pp. 40–140.
34. Andronov A. A., Pontryagin L. S. Rough systems // Rep. Acad. Sci. USSR. 1937. V. 14, Pp. 247–250. (in Russian).
35. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. V. 1. № 2. Pp. 101–120.
36. Andronov A. A. Mathematical problems in self-oscillation theory // A. A. Andronov. Coll. Works, M.: Acad. Sci. USSR, 1956. Pp. 32–71 (in Russian).
37. Smale S. A structurally stable differential homomorphism with an infinite number of periodic points // Proc. Int. Congress on non-linear oscillations. Kiev 1961. Kiev: Ukrainian Acad. Sci., 1963. Pp. 365–366.

38. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. N., Nemytsky V. V. The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems. M.: Nauka, 1966. 576 p. (in Russian).
39. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Mathem. Zeitschr. 1930. B. 31. Pp. 748–766.
40. Oseledets V.I. The multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems // Proc. Moscow mat. soc. T. 19. Pp. 179–210 (in Russian).
41. Millionshchikov M.D. A stability criterion for the probability spectrum of linear systems of differential equations with recurrent coefficients and a criterion for almost reducibility of systems with almost periodic coefficients // Mat. collection 1969. T. 78. № 2. Pp. 179–202 (in Russian).
42. Arnold V.I. On the instability of dynamical systems with many degrees of freedom // Rep. Acad. Sci. USSR. 1964. V. 156. № 1. Pp. 9–12 (in Russian).
43. Zaslavsky G. M., Zakharov M. Yu., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Chernikov A. A. Generation of ordered structures with an axis of symmetry from Hamiltonian dynamics // JETP Letters. 1986. T. 144. V. 7. Pp. 349–353 (in Russian).
44. Zaslavsky G. M., Zakharov M. Yu., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Chernikov A. A. Stochastic web and diffusion of particles in a magnetic field // JETP. 1986. T. 91. V. 5. Pp. 500–516 (in Russian).
45. Zaslavsky G. M., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Chernikov A. A. Weak chaos and quasi-regular structures. M.: Nauka, 1991. 236 p. (in Russian).
46. Stephenson A. On a class of forced oscillations // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1906. V. 37. № 148. Pp. 353–360.
47. Bogolyubov N.N. Perturbation theory in nonlinear mechanics // Proc. Institute Struct. Mechanics Acad. Sci. Ukrainian SSR. 1950. T. 14., Pp. 9–34 (in Russian).
48. Kapitsa P. L. Dynamic stability of a pendulum with an oscillating suspension point // JETP.. 1951. V. 21. Issue 5. Pp. 588–597 (in Russian).
49. Bogatov E. M., Mukhin R. R. Averaging method, pendulum with vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P. L. Kapitsa and others // Proc. of universities “PND”. 2017. V. 25. № 5. Pp. 69–87 (in Russian).
50. Chelomey V.N. On the Possibility of Increasing the Stability of Elastic Systems Using Vibrations// Rep. Acad. Sci. USSR. 1956. V. 110. No. 3. Pp. 345–347 (in Russian).
51. Chelomey V. N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations // Rep. Acad. Sci. USSR. 1983. V. 270. No. 1. Pp. 62–67 (in Russian).
52. Landau L. D., Lifshitz E. M. Hydrodynamics. M.: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian).
53. Goldstein S. Fluid mechanics in the first half of this century // Annu. Rev. Fluid Mech. 1969. V. 1. Pp. 1–29.
54. Marsden J. Relationship between the Navier-Stokes equations and turbulence // Strange attractors. M.: Mir, 1981. Pp. 7–20 (in Russian).
55. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodyhamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Proc. 4th Int. Congr. Rome. 1908. Pp. 116–124.

-
56. Orr W. The stability or instability of the steady motions of a liquid // *Proc. Roy. Irish Acad.* 1906. A 27. V. 27. Pp. 9–68, 69–138.
57. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // *Ann. der Phys.* 1924. Bd. 74. No. 15. Pp. 577–624.
58. Lyapunov A.M. On one problem of Chebyshev // *Proc. Akad. Sciences in Phys.-Math. department* 1905. 8 ser. T. 17. No. 3. Pp. 1–32; A.M. Lyapunov. *Coll. Works.* T. 3. M.-L.: Publ. House Acad. Sci. USSR, 1959. Pp. 207–236 (in Russian).
59. Leray J. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique // *J. Math. Pures Appl.* 1933. V. 12. Pp. 1–82.
60. Leray J. Essai sur le mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois // *J. Math. Pures Appl.* 1934. V. 13. Pp. 341–418.
61. Leray J. Sur le mouvements d'un liquide visqueux emplissant l'espace // *Acta Math.* 1934. V. 63. Pp. 193–248.
62. Oseen C. W. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.* Leipzig : Academie Verlag, 1927. 337 S.
63. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. M.: Nauka, 1981. 448 p. (in Russian).
64. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // *Math. Nachr.* 1951. B. 4. S. 213–231.
65. Ladyzhenskaya O.A. *Attractors for Semigroups and Evolution Equations.* Lincei Lectures. Cambridge: CUP, 1991. 73 p.
66. Scheffer V. (1976), Turbulence and Hausdorff dimension. // *Turbulence and Navier-Stokes equations.* Proc. Conf. Univ. Paris-Sud, Orsay, 1975. Berlin: Springer Verlag, 1976. Pp. 174–183.
67. Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1982. V. 35(6). Pp. 771–831.
68. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statistical fluid mechanics : mechanics of turbulence.* Boston: MIT Press, 1971. 782 p.
69. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence // *Comm. Math. Phys.* 1971. V. 20. Pp. 167–192 / Рус. пер. в кн.: *Странные аттракторы.* М.: Мир, 1981. Pp. 117–151.
70. Arnold V.I. Kolmogorov's hydrodynamic attractors // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1991. V. 434. Pp. 19–22.
71. Arnold V., Khesin B. *Topological methods in hydrodynamics.* N.Y.: Springer, 1998. 374 p.
72. Obukhov A.M. On integral invariants in systems of hydrodynamic type // *Rep. Acad. Sci. USSR.* 1969. V. 184. № 2. Pp. 309–312 (in Russian).
73. *Nonlinear systems of hydrodynamic type.* Ed. A.M. Obukhov. M.: Nauka, 1974. 160 p. (in Russian).
74. Afraimovich V.A., Shilnikov L.P. On strange attractors and quasiattractors // *Nonlinear dynamics and turbulence.* Boston-London-Melbourn: Pitman, 1983. Pp. 1–34.

-
75. Zaslavsky G. M. Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws // *Physics Today*. 1999. V. 52. Pp. 39–45.
 76. Gonchenko S. V. et al. On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms that are close to diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic contour // *Proc. o MIAN*. Moscow: Nauka, 1997. V. 216. Pp. 76–125 (in Russian).
 77. Gonchenko S. V. et al. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: review // *Proc. Universities “PND”*. 2017. V. 25. Issue 2. Pp. 4–36 (in Russian).
 78. Holmes P., Lumley J., Bercooz G., Rowley C. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge: CUP, 2012. 386 p.
 79. Fomin N. N., Chechetkin V. M. Coherent hydrodynamic structures and vortex dynamics. IPM M.V. Keldysh. Preprint No. 1 for 2015. (in Russian).
 80. Shilnikov L. P. Homoclinic trajectories from Poincare to the Present // *Mathematical events of the Twentieth Century*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. Pp. 347–370.
 81. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Homoclinic Tangencies of an Arbitrary Order in Newhouse Domains // *J. Math. Sci.*, 2001. V. 105. Issue 1. Pp. 1738–1778.

Получено: 29.04.2022

Принято в печать: 8.12.2022