

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.853.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326

Топологическая оптимизация элементов конструкций с учетом структурной неоднородности материала с использованием градиентного метода¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, П. А. Васильев

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Вершинин Анатолий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: versh1984@mail.ru

Васильев Петр Андреевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: petr.vasilyev.1996@yandex.ru

Аннотация

В данной работе представлен и реализован алгоритм, выполняющий топологическую оптимизацию распределения массы двумерного тела под нагрузкой. Конечной целью алгоритма является минимизация веса тела при ограничении на максимальные напряжения в его точках. За основу взята идея переменной плотности, а также алгоритм BESO, добавляющий и удаляющий элементы в зависимости от узловых напряжений.

Алгоритм использует метод конечных элементов и представляет из себя итеративный процесс, на каждом шаге которого сначала происходит вычисление напряжений в теле при помощи CAE Fidesys, а затем результаты расчёта анализируются. По результатам анализа модули Юнга в узлах конечноэлементной сетки изменяются, чтобы отражать новое распределение массы, скорректированное для лучшего соответствия нагрузкам. Особенностью используемого подхода является использование целевой функции со слагаемым, которое представляет из себя сумму квадратов разностных производных плотности по четырём направлениям. Это позволяет избежать резких изменений плотности и возникновения решётчатых структур на ранних итерациях. Для определения плотностей на каждой итерации используется модификация метода градиентного спуска Adam.

Реализованный алгоритм верифицирован на ряде тестовых примеров для плоских статических задач теории упругости. Приведены результаты расчетов, выполнено сравнение с результатами, полученными другими авторами. Для одной из задач представлены результаты расчетов на разных сетках, которые позволяют сделать вывод о сеточной сходимости алгоритма.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, структурно-неоднородный материал, прочностной инженерный анализ, Fidesys, градиентный спуск.

Библиография: 42 названия.

¹Исследования были выполнены в МГУ им. М. В. Ломоносова и Институте физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН в рамках работ по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук МД-208.2021.1.1. (разделы 4–6) и грантам Российского научного фонда (проект № 22-11-00110, разделы 1, 2; проект № 19-71-10008, раздел 3; проект № 19-77-10062, разделы 7, 8).

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин, П. А. Васильев. Топологическая оптимизация элементов конструкций с учетом структурной неоднородности материала с использованием градиентного метода // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 308–326.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.853.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-308-326

Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material's structural inhomogeneity

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, P. A. Vasiliev

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman@rambler.ru

Vershinin Anatoliy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: versh1984@mail.ru

Vasilyev Petr Andreevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: petr.vasilyev.1996@yandex.ru

Abstract

This paper presents and implements an algorithm that performs topological optimization of the mass distribution of a two-dimensional body under load. The ultimate goal of the algorithm is to minimize body weight under stress constraints at the points of the body. The approach is based on the idea of variable density and the BESO algorithm that adds and deletes elements depending on stresses.

The algorithm uses the finite element method and is an iterative process. At each iteration the stresses in the body are calculated using CAE Fidesys, and then the calculation results are analyzed. According to the analysis, Young's moduli at the nodes of the finite element mesh are changed to reflect new mass distribution adjusted for better compliance with loads.

The specific feature of the used approach is utilization of objective function with the special term. This term is the sum of the squares of the differential derivatives of density in four directions. This feature permits one to avoid sharp changes in density and the appearance of lattice structures in the early iterations. The Adam gradient method is used to determine densities at each iteration.

The implemented algorithm is verified on a number of test cases for plane static problems of the theory of elasticity. The results of computations are presented. A comparison is made with the results obtained by other authors. For one of the problems, the results of calculations on different grids are given. These results allows one to conclude about the grid convergence of the algorithm.

Keywords: topological optimization, structurally inhomogeneous material, engineering strength analysis, Fidesys, gradient descent.

Bibliography: 42 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, P. A. Vasiliev, 2022, “Topology optimization of structural elements using gradient method with account for the material’s structural inhomogeneity“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 308–326.

1. Введение

Топологическая оптимизация — подход, призванный сократить массу тела и распределить её так, чтобы оно продолжало выдерживать заданные нагрузки и соответствовало другим наложенным на него требованиям [1, 2]. Топологическая оптимизация применяется в разных отраслях промышленности. С её помощью изготавливают педали, ручки, детали двигателей. Но наибольшую важность этот подход имеет в авиастроении и космической отрасли, где уменьшение веса конструкции позволяет существенно сократить расходы на топливо [3, 4]. Сейчас важность топологической оптимизации возрастает в связи с активным развитием аддитивных технологий, которые позволяют создавать конструкции практически любой формы, что уменьшает ограничения на их сложность и даёт возможность производить в промышленных масштабах детали так называемого бионического дизайна, форма которых определяется в результате оптимизации [5]. Примеры применения топологической оптимизации и обзор существующего программного обеспечения для её реализации приведены в [6].

Существуют разные подходы к топологической оптимизации [7, 8, 9]. Все они прежде всего строят в проектной области расчетную сетку. Построение различных видов сеток описано в [10, 11, 12, 13]. После построения сетки постепенно уменьшают количество материала в одних частях сетки и увеличивают в других, пока не получают итоговую конструкцию.

Одной из известных проблем, возникающих при топологической оптимизации, является проблема «шахматного поля» (рис. 1). Она возникает, когда количество материала в некоторой области конструкции является избыточным, а нагрузка распределена по ней приблизительно равномерно. Тогда алгоритмы оптимизации, использующие дискретное представление элементов, часто начинают беспорядочно удалять отдельные элементы из описанной области, приводя к «шахматной» структуре. В реальности такая «шахматная» конструкция приводила бы к концентрациям напряжений и разрушению, поэтому при разработке алгоритмов топологической оптимизации следует стремиться к тому, чтобы избежать возникновения таких структур. Одним из методов, позволяющих это сделать, является введение переменной плотности конструкции [14].

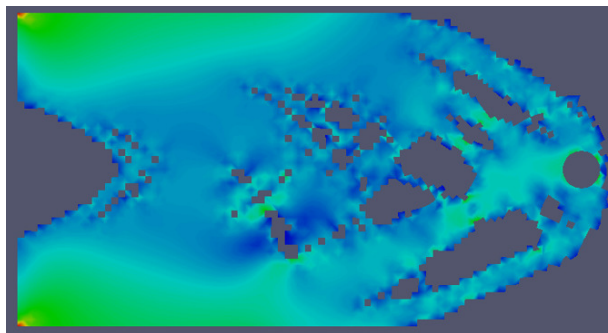


Рис. 1: Пример «шахматной» конструкции

Некоторые методы, такие как ESO и BESO, работают с элементами дискретно: каждый элемент проектной области либо входит в оптимизируемую конструкцию, либо нет (рис. 2). Другие методы, например, такие, как SIMP, вводят понятие плотности элементов, которая

задается вещественным числом на отрезке от 0 до 1 (рис. 3). Подробнее эти методы изложены в [3, 15, 7].

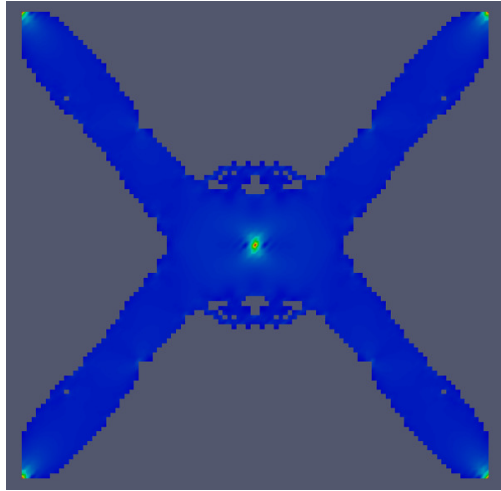


Рис. 2: Пример конструкции с дискретной плотностью: каждого элемента либо нет (серый цвет), либо он есть (другие цвета)

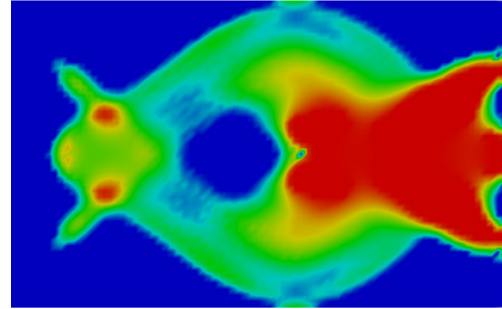


Рис. 3: Пример конструкции с непрерывной плотностью

В методах, использующих переменную плотность, существует два подхода к интерпретации результатов плотности, отличной от 0 или 1. Один из них заключается в том, чтобы на завершающем этапе работы алгоритма оптимизации избавляться от участков с такой плотностью, постепенно сводя её к 0 или 1. Другой подход [16] заключается в построении решётчатой структуры с толщиной решётки, зависящей от плотности (рис. 4). Такие решётчатые структуры могут использоваться, например, при изготовлении деталей при помощи аддитивных технологий [17].

Иногда возникает необходимость проектировать конструкцию под несколько разных нагрузок одновременно. Один из методов топологической оптимизации, позволяющих это сделать, изложен в [18].

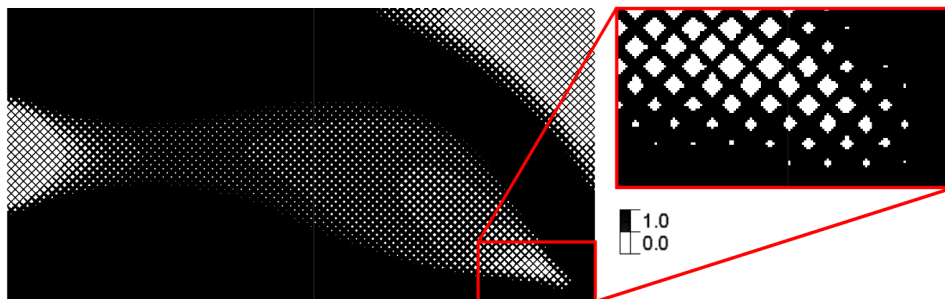


Рис. 4: Пример конструкции с решётчатой структурой, взятый из [16]

2. Механическая постановка задачи топологической оптимизации

Задана проектная область V , в которой должен располагаться оптимизируемый элемент конструкции (рис. 5). В этой области заданы граничные условия, которые определяют закрепление элемента конструкции и нагрузки, которые он должен выдерживать. В частности, в области V могут быть заданы точечные силы. Также известны свойства материала, из которого эта конструкция состоит, в том числе максимальные напряжения, которые он может безопасно выдерживать.



Рис. 5: Пример проектной области и граничных условий

Задача — спроектировать такую конструкцию в области V , чтобы она выдерживала заданную нагрузку при выполнении ограничений на напряжения и при этом имела бы минимальную массу.

3. Понятие плотности

В данной работе используется подход, в котором плотность точек тела варьируется в пределах от нуля до единицы. Сразу оговоримся, что понятие плотности, принятое в топологической оптимизации, отличается от того, которое обычно принято в механике. Определим его строго:

$\rho(\vec{x})$ — непрерывное поле, определённое в проектной области V и связанное с модулем Юнга $E = E(\vec{x})$ соотношением

$$E = \rho E_{\max}, \quad (1)$$

где $E_{\max}$ — заданный модуль Юнга материала.

В случае двумерных задач для пластин или оболочек [19, 20, 21, 22] плотность можно представлять себе как толщину тела по третьему измерению в этой точке, поскольку чем толще пластина или оболочка, тем более жесткой она является по отношению к прилагаемым нагрузкам. В общем случае трёхмерных тел удобной аналогии нет. Можно считать, что в точках с промежуточной плотностью материал имеет решётчатую или пористую структуру, но на деле эффективные свойства таких материалов не всегда будут такими, какими предполагаются свойства материалов с промежуточной плотностью в данной работе [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

В рамках подхода, принятого при решении задач топологической оптимизации, плотность обычно является чисто математической абстракцией, нужной для того, чтобы алгоритм оптимизации лучше сходился и получаемая в результате его работы форма границы изделия была более гладкой. Поскольку плотность в рамках такого подхода не имеет физического смысла, предполагается, что в тех частях проектной области, где плотность не равна 0 или 1, она будет заменена на 0 или 1 при интерпретации результатов работы алгоритма оптимизации.

Многие методы топологической оптимизации, включая представленный в этой работе, используют разные приёмы, чтобы такие участки промежуточной плотности занимали в итоговом результате как можно меньшую часть проектной области.

4. Математическая постановка задачи топологической оптимизации

Найти

$$\rho(\vec{x}) : \int_V \rho dV \rightarrow \min \quad (2)$$

такую, что

$$\sigma_m(\vec{x}) < \sigma_{кр}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in V \quad (3)$$

в условиях задачи линейной упругости [31] для изотропного материала

$$\begin{cases} E = \rho E_{\max} \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon, E) \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}^0 \text{ на } D_1 \\ \vec{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \vec{P}^0 \text{ на } D_2 \\ D_1, D_2 &\subset \partial V, \end{aligned} \quad (5)$$

где V — проектная область,

ε — тензор деформаций,

$\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений,

σ_m — значение напряжения по Мизесу,

$\sigma_{кр}$ — максимально допустимое значение напряжения по Мизесу,

$\vec{u}$ — вектор перемещений,

$\vec{N}$ — вектор единичной нормали к границе,

$\vec{P}^0$ — вектор граничных нагрузок,

E — модуль Юнга в точке тела,

$E_{\max}$ — модуль Юнга заданного материала,

D_1, D_2 — границы, на которых заданы граничные условия по перемещениям и нагрузкам соответственно.

Интеграл из соотношения (2) можно заменить на $\int_V f(\rho) dV$, где f — возрастающая функция от плотности, требующая минимизации. Такая функция может использоваться например для того, чтобы ограничить использование промежуточных значений плотности.

Возможны и другие математические постановки задачи оптимизации конструкций, например, минимизация податливости конструкции при ограниченной массе [3], но в данной работе мы остановимся на постановке, приведённой выше. Задача топологической оптимизации конструкции носит прикладной характер, поэтому первичной стоит признать именно механическую постановку — создание хорошей конструкции. Тем более, что методы оптимизации в большинстве своём являются эвристическими, и точная математическая постановка играет не очень большую роль.

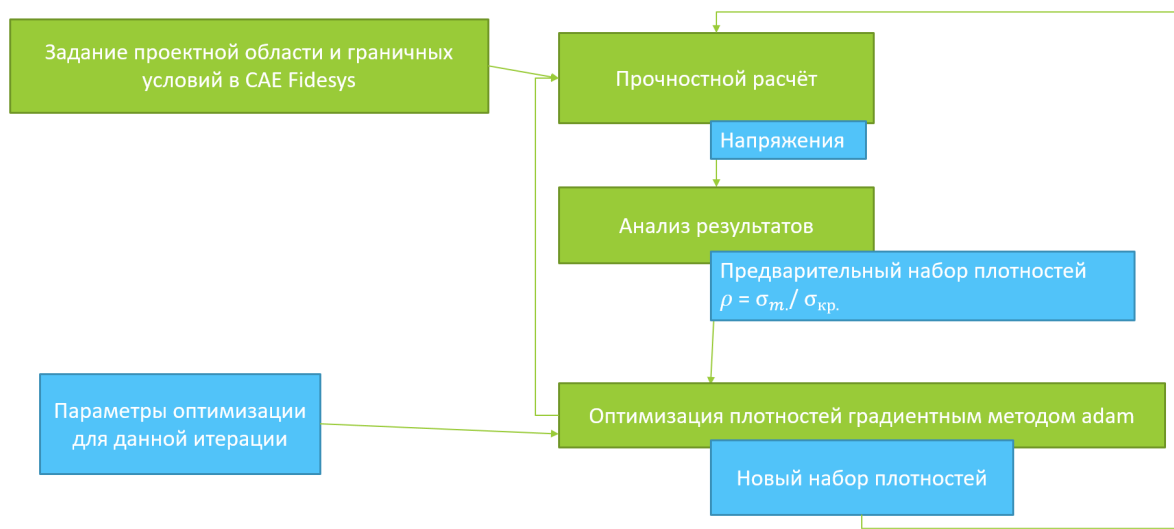


Рис. 6: Схема алгоритма топологической оптимизации, представленного в этой работе

5. Укрупненный алгоритм топологической оптимизации

Прежде всего задаётся проектная область на плоскости в форме прямоугольника. В области строится равномерная квадратная сетка. Задаются граничные условия: закрепления искомой конструкции в точках или на кривых и точечные, массовые и поверхностные силы, действующие на элемент конструкции. Далее задаются свойства материала и максимальные допустимые напряжения $\sigma_{кр.}$. Начальная плотность во всех узлах проектной области инициализируется значением $\rho_{нач} = 0.5$. После этого в цикле выполняется следующая последовательность действий:

1. Выполняется конечноэлементный расчёт элемента конструкции с текущим распределением плотности, результатом которого является напряженно-деформированное состояние элемента конструкции в узлах сетки (массив напряжений).
2. Вычисляется предварительный набор плотностей в узлах сетки: $\rho_{предв.} = \sigma_m / \sigma_{кр.}$. При этом минимально возможная плотность задается малым положительным числом (при расчетах это число считалось равным 10^{-6}), чтобы матрица жёсткости в методе конечных элементов не становилась сингулярной. Проблема сингулярности матриц жёсткости описывается в [10], а также затрагивается в [23]. На последних итерациях плотностям, не превысившим определённый порог, присваивается минимальное значение. Это делается для того, чтобы в итоге все плотности были близки к 0 или 1.
3. После этого на основе предварительных значений плотностей и других параметров происходит вычисление итоговых для данной итерации значений плотностей в узлах. Этот процесс описан ниже.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 6.

6. Метод определения плотностей на каждой итерации

Изложим подробно третий шаг алгоритма, приведенного в предыдущем параграфе. Пусть имеется равномерная конечноэлементная сетка с шагом d по вертикали и горизонтали. Под $[\rho]$ будем понимать матрицу значений плотностей в узлах этой сетки, элементы этой матрицы будем обозначать через ρ_{kl} .

Вместо минимизации интеграла от плотности (2) решается задача о минимизации целевой функции более сложного вида, а именно, находится

$$\arg \min_{[\rho]} L([\rho]), \quad (6)$$

где

$$L([\rho]) = L_{\text{материал.}}([\rho]) + L_{\text{перегруз.}}([\rho]) + L_{\text{град.}}([\rho]). \quad (7)$$

Слагаемые в правой части формулы (7) вычисляются следующим образом:

$$L_{\text{материал.}}([\rho]) = b \sum_{k,l} \tanh(\pi \rho_{kl}), \quad (8)$$

$$L_{\text{перегруз.}}([\rho]) = a \sum_{k,l} (\rho_{k,l}^{\text{предв.}} - \rho_{k,l})_+, \quad (9)$$

$$L_{\text{град.}}([\rho]) = c \left[\sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k+1,l} - \rho_{kl}}{d} \right)^2 + \sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k,l+1} - \rho_{kl}}{d} \right)^2 + \sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k+1,l+1} - \rho_{kl}}{\sqrt{2} d} \right)^2 + \sum_{k,l} \left(\frac{\rho_{k+1,l} - \rho_{k,l+1}}{\sqrt{2} d} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Здесь $\tanh$ — это гиперболический тангенс; a, b, c — коэффициенты, изменяющиеся в зависимости от итерации; операция $(x)_+$ означает $\max(x, 0)$.

Суммирование в формулах (8) и (9) выполняется по всем узлам сетки, а в формуле (10) — по тем узлам, в которых можно вычислить соответствующие разности.

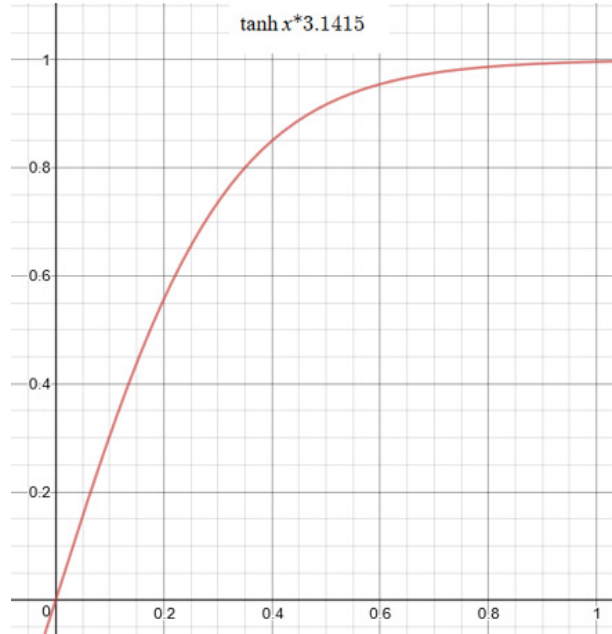
Поясним смысл слагаемых в правой части формулы (6). Они нужны для того, чтобы процедура оптимизации распределяла плотности на каждой итерации определённым образом.

$L_{\text{материал.}}$ отражает количество материала, использованного в конструкции. Гиперболический тангенс (см. график на рис. 7) применяется к плотности для того, чтобы сделать невыгодным для алгоритма использование промежуточных её значений, и стимулировать её стремиться к 0 или 1.

$L_{\text{перегруз.}}$ показывает, насколько новые значения плотности меньше предварительных значений, вычисленных на втором шаге алгоритма. Слишком сильное уменьшение плотностей на каждой итерации нежелательно, поскольку, скорее всего, это вызовет возникновение слишком больших напряжений в элементе конструкции на следующей итерации.

$L_{\text{град.}}$ представляет из себя сумму квадратов разностных производных по четырём направлениям. По сути эта величина показывает, насколько резко изменяется плотность от элемента к элементу. Как будет видно дальше на приведённом примере работы алгоритма, этот показатель очень важен, поскольку его регулирование позволяет изменять плотность плавно на ранних итерациях, чтобы избежать нежелательных вычислительных эффектов, в частности, появления решётчатых структур. На поздних же итерациях коэффициент c , отвечающий за влияние этого показателя в общей сумме, устремим к нулю, позволяя делать резкие переходы от высокой плотности к низкой.

Для решения задачи (6) используется градиентный метод Adam [36].

Рис. 7: График функции $\tanh(\pi x)$

7. Программная реализация и пример работы алгоритма

Алгоритм, который приведён выше, реализован на языке Python. Для расчета напряженно-деформированного состояния на соответствующих шагах алгоритма используется система прочностного инженерного анализа CAE Fidesys [32, 33, 34, 35].

Для численных примеров, приведенных далее, выбрано число итераций, равное 20. Такое число итераций, по нашему мнению, обеспечивает баланс между скоростью и качеством работы алгоритма для этих примеров.

Значения коэффициентов a , b и c в формулах (8)–(10) при расчетах были заданы следующим образом:

$$a = 1, \quad (11)$$

$$b = 0.075 + 0.02i, \quad (12)$$

$$c = 6 - 0.3i, \quad (13)$$

где i — номер итерации, изменяющийся от 0 до 19.

Рассмотрим, как работает алгоритм, на следующем примере. Имеется пластина, закреплённая с левого края, а к точке вблизи правого края вниз приложена сила (рис. 5). Задача решалась в рамках линейной упругости при плоском напряженном состоянии. Проследим изменения конструкции между итерациями алгоритма (рис. 8). Здесь синему цвету соответствует минимальная, почти нулевая плотность, а красному — плотность, равная единице.

На первых итерациях мы видим плавное изменение плотности — следствие высокого коэффициента штрафа c за ее резкое изменение. Далее этот коэффициент убывает, способствуя меньшему вкладу производных в функцию штрафа L , что позволяет получить более четкие границы конструкции. Параллельно растёт коэффициент штрафа за материал b , заставляя алгоритм минимизации штрафа экономить материал, а также использовать меньше промежуточных значений плотности, поскольку они становятся необоснованно «дорогими». Наконец, штраф за производные с уменьшением коэффициента c становится малым и выкристаллизовывается конструкция, почти полностью состоящая из материала плотности 0 или 1.

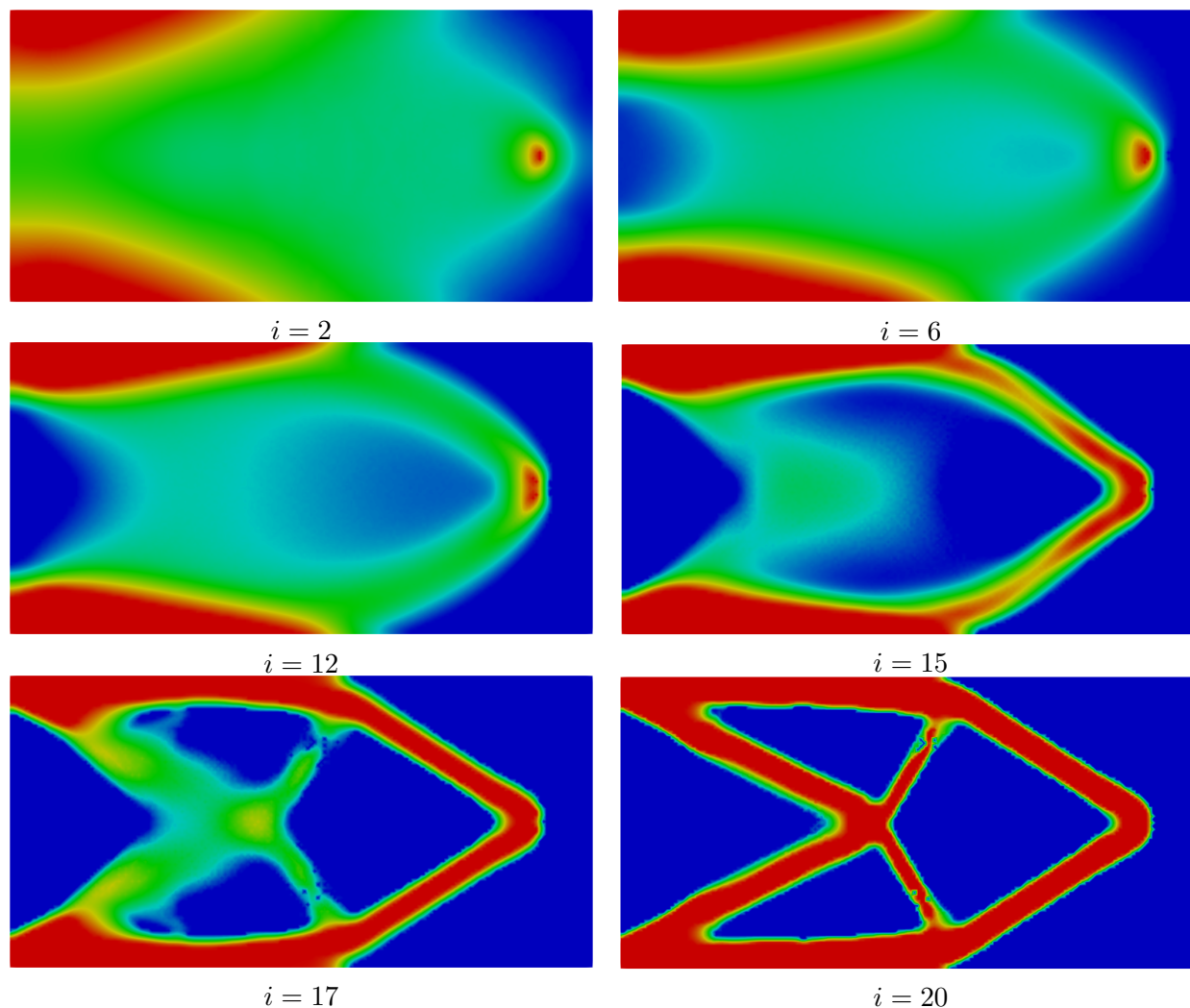


Рис. 8: Состояние оптимизируемой конструкции для некоторых итераций (i — номер итерации).

Исследуем теперь *сеточную сходимость* разработанного алгоритма. На рисунке 9 представлены результаты работы алгоритма для рассмотренной выше задачи на разных сетках. Можно заметить, что все сетки дают качественно похожую картину. Измельчение сетки уточняет конструкцию, сохраняя при этом её структуру. Таким образом, мы можем говорить о сеточной сходимости алгоритма.

8. Валидация

Приведённый в работе алгоритм был апробирован на некоторых задачах, описанных в [3].

Задача 1. В качестве проектной области рассматривается прямоугольная пластина (рис. 10). Она закреплена в трех узлах на левой границе, а к одному узлу внутри пластины приложена вертикальная сила $P = 5000$ кГс. Точка приложения силы находится на одном уровне с центральным узлом закрепления. Конструкция выполнена из алюминиевого сплава с модулем упругости $E = 7200$ кГс/мм² и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Задача решается для плоского напряжённого состояния.

Сравнение решений, описанных в [3] и решений, полученных с использованием алгоритма,

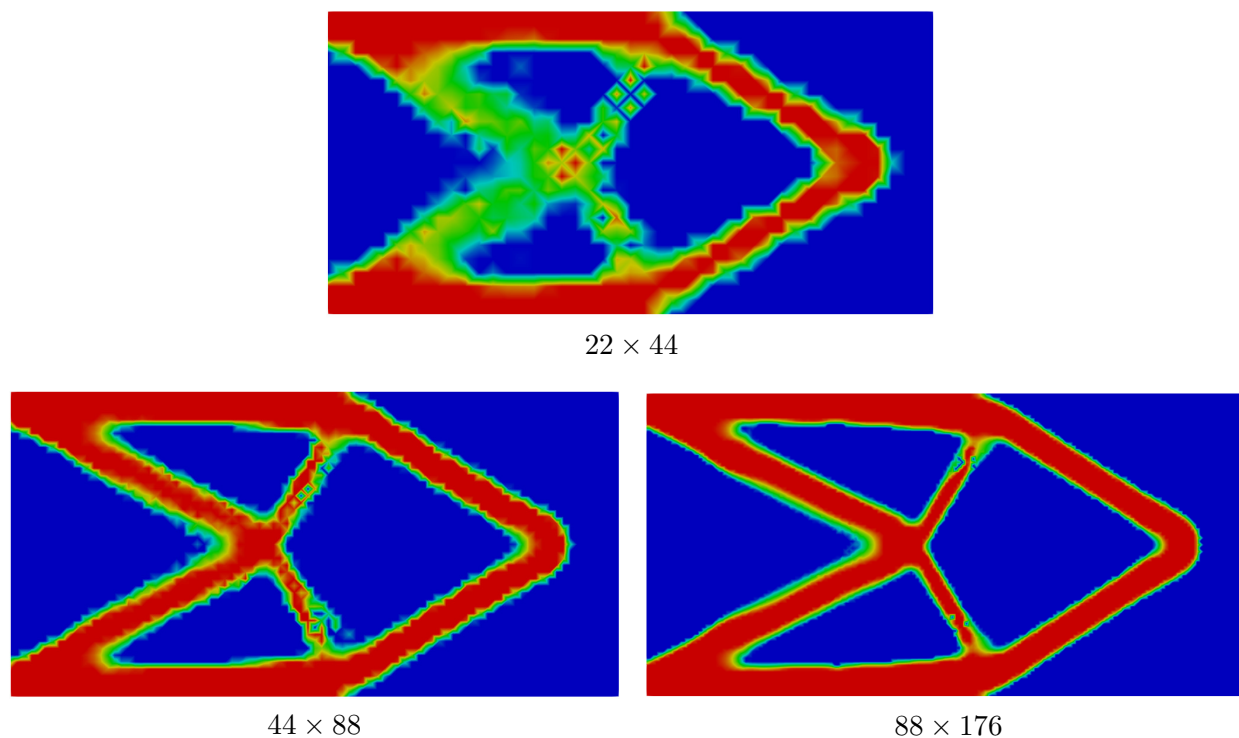


Рис. 9: Результаты работы алгоритма на разных сетках

рассмотренного выше, можно видеть на рисунке 11. Отметим, что критерии оптимизации в нашей работе и в статье [3] различны, что затрудняет сравнение. Поэтому при расчетах мы использовали разные значения параметра максимальных напряжений $\sigma_{кр.}$, и в результате расчетов были получены конструкции разной площади. Среди этих конструкций оказались такие, площадь которых примерно совпадает с площадью конструкций, полученных в [3]. Их сравнение приведено на рисунке 11. Можно видеть, что конструкции имеют похожую форму, хотя и не совпадают полностью.

Задача 2. В качестве проектной области рассматривается прямоугольная пластина (рис. 12). Закрепление производится в шести узлах. К одному узлу внутри области приложена вертикальная сила $P = 10000$ кГс. Точка приложения силы находится на одном уровне с центральными узлами закрепления, причем ближе к правой тройке закрепленных узлов. Параметры материала такие же, как и в предыдущей задаче.

Сравнение решений представлено на рисунке 13. Здесь отличий уже больше, чем в предыдущей задаче. В частности, решение, представленное в [3], обладает большим количеством зон с низкой ненулевой плотностью. Также на модели на левом верхнем рисунке присутствуют «отростки» сверху и снизу. Авторы статьи [3] указывают, что эти «отростки» являются нерациональными с точки зрения минимизации напряжений, и объясняют их наличие некоторыми особенностями своего алгоритма. Результат работы алгоритма, рассматриваемого в данной работе, таких отростков не содержит.

9. Заключение

В данной работе предложен подход к оптимизации формы элемента конструкции на основе расчета напряженно-деформированного состояния элемента конструкции методом конечных элементов. Разработан итеративный алгоритм для оптимизации топологии. Его существенной особенностью является использование целевой функции, содержащей дополнительные слагае-

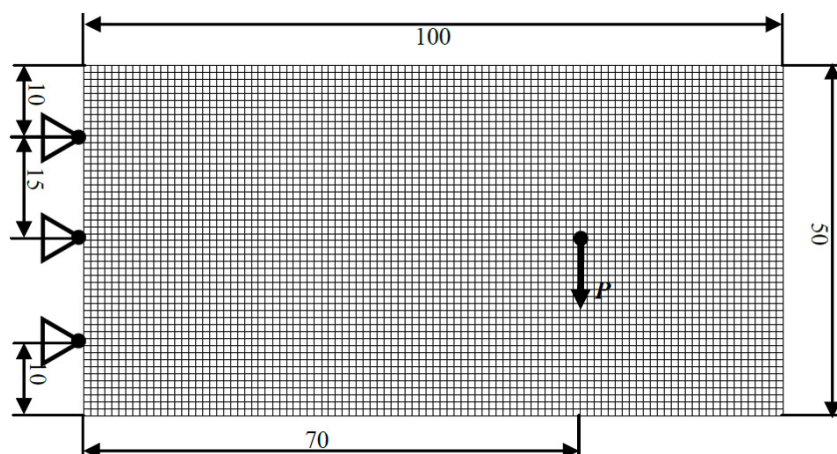


Рис. 10: Схема нагружения пластины в задаче 1

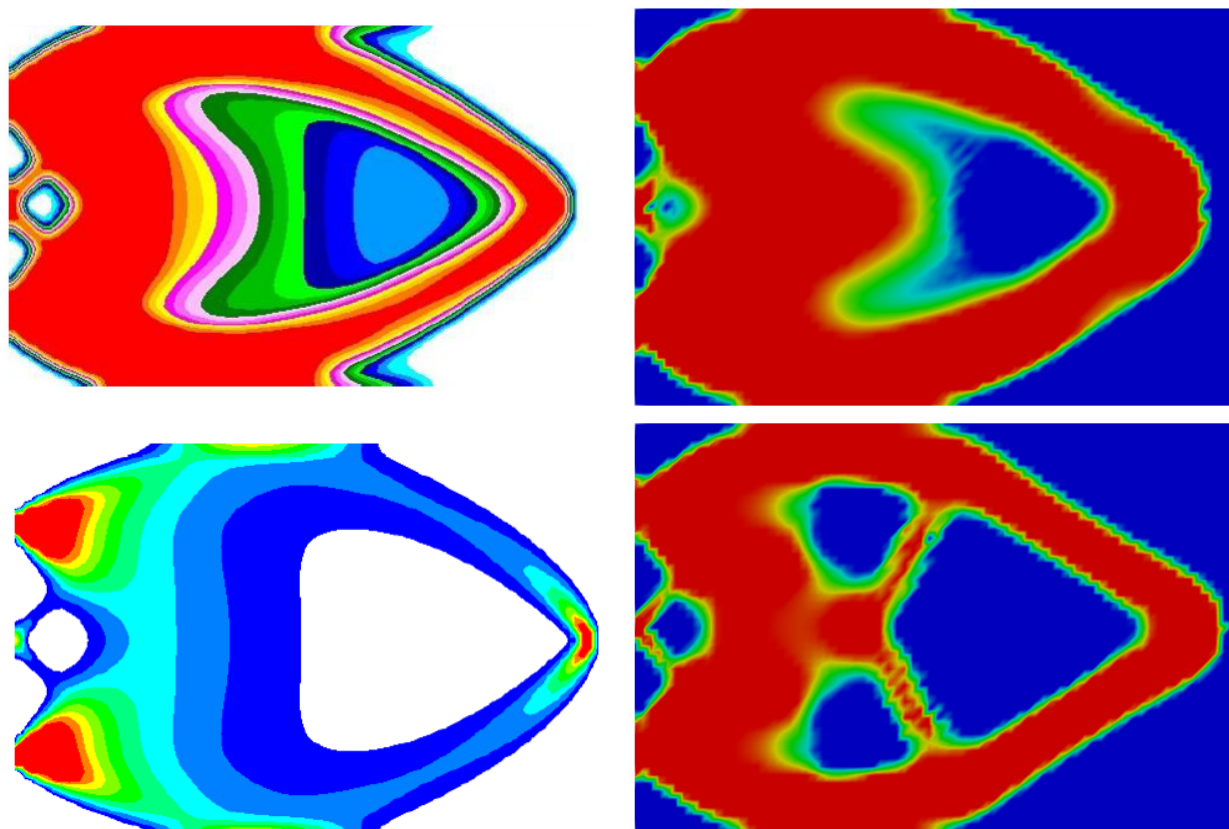


Рис. 11: Решения задачи топологической оптимизации для задачи 1, полученные в [3] (слева) и в данной работе (справа)

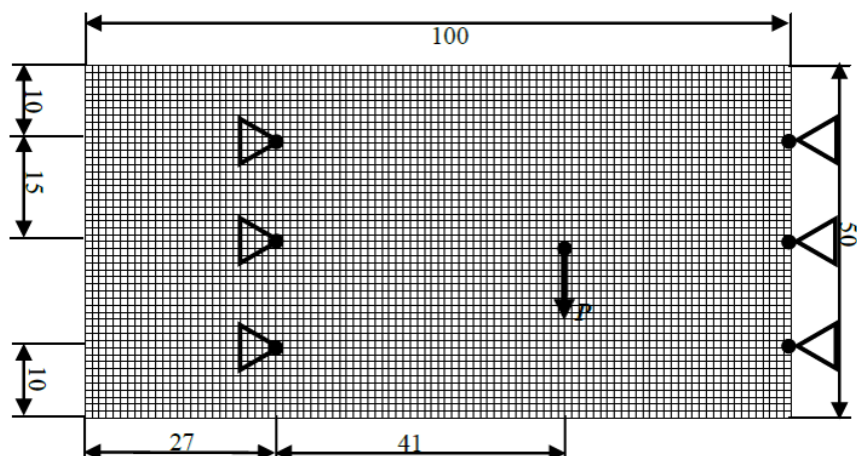


Рис. 12: Схема нагружения пластины в задаче 2

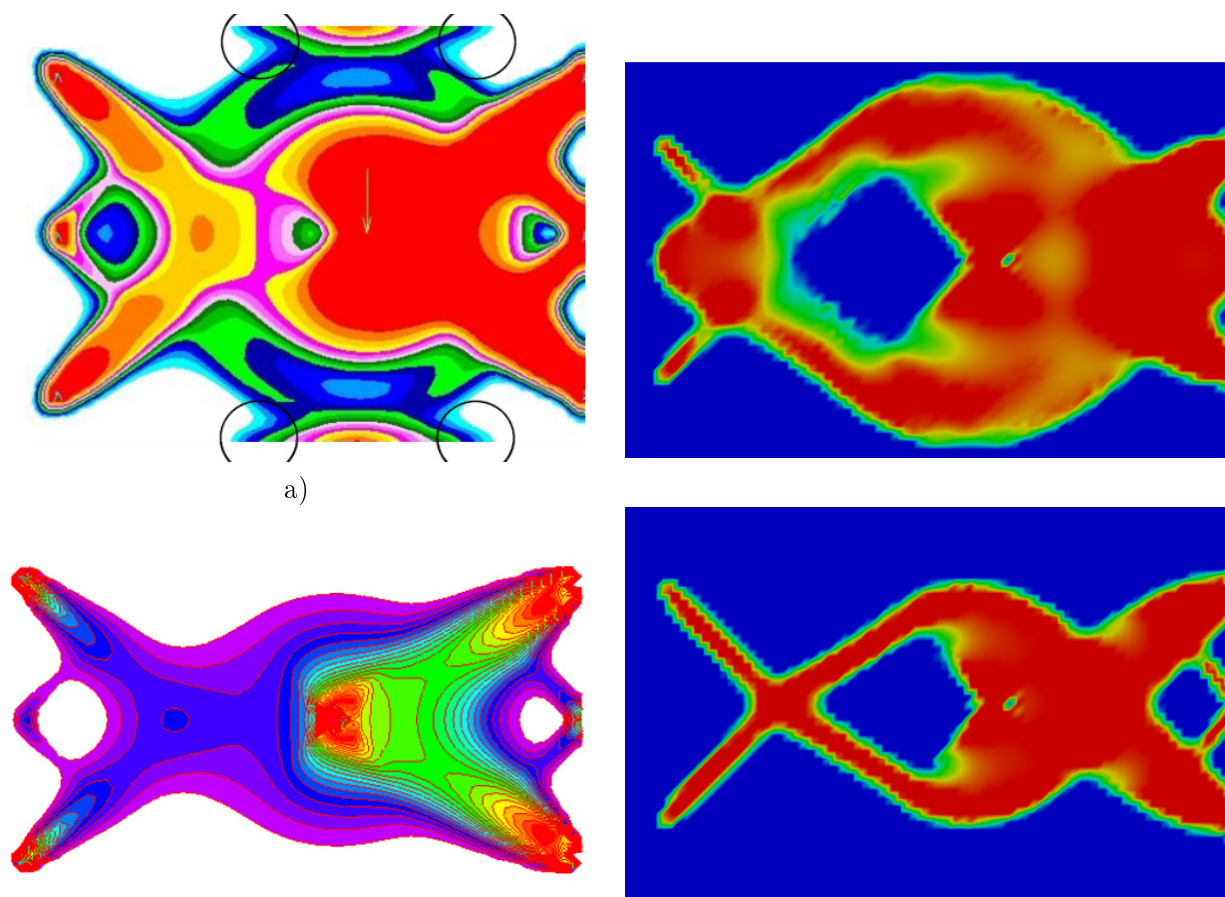


Рис. 13: Решения задачи топологической оптимизации для задачи 2, полученные в [3] (слева) и в данной работе (справа)

мые, введенные для повышения вычислительной устойчивости алгоритма оптимизации. Этот алгоритм был реализован в виде программного модуля, выполняющего топологическую оптимизацию плоской конструкции в прямоугольной проектной области.

Данный модуль был апробирован на нескольких задачах, описанных в [3], был проведен

сравнительный анализ результатов его работы и результатов, полученных в [3], который выявил у них общие черты.

Предложенный подход может быть в дальнейшем применен к оптимизации элементов конструкций, изготовленных из нелинейно-упругих и вязкоупругих материалов, испытывающих большие деформации [37, 38, 39], а также для задач теории наложения больших деформаций [40, 41, 42].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bendsøe M.P.* Optimal shape design as a material distribution problem // *Structural Optimization*. 1989. 1 (4), pp. 193–202.
2. *Bendsøe M.P., Sigmund O.* Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003.
3. *Сысоева В.В., Чедрик В.В.* Алгоритмы оптимизации топологии силовых конструкций // *Учёные записи ЦАГИ*. 2011. Т. XLII, № 2. С. 91–102.
4. *Оганесян П.А., Шевцов С.Н.* Оптимизация топологии конструкций в пакете Abaqus // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2014. Т. 16, № 6(2). С. 543–549.
5. *Боровиков А.А., Тушев О.Н.* Разработка силовой конструкции космического аппарата с использованием топологической оптимизации для двух вариантов технологии изготовления // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2018. № 9. С. 1–13.
6. Research Report: Generative Design and Topology Optimization: In-Depth Look at the Two Latest Design Technologies [Электронный ресурс] URL: <https://www.engineering.com/ResourceMain.aspx?resid=826>. (дата обращения: 22.10.2019).
7. *Abbey T.* Topology Optimization // *Digital Engineering*. June 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization/>
8. *Abbey T.* Topology Optimization Methods. *Digital Engineering*. September 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-methods>
9. *Abbey T.* Topology Optimization. Part 3. *Digital Engineering*. October 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-2>
10. *Левин В.А., Вершинин А.В.* Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина. Т. 2). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.
11. *Василевский Ю.В., Данилов А.А., Липников К.Н., Чугунов В.Н.* Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина. Т. 4.). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.
12. *Charara M., Vershinin A., Sabitov D., Pekar G.* SEM wave propagation in complex media with tetrahedral to hexahedral mesh. [73-rd European Association of Geoscientists and Engineers Conference and Exhibition] Vienna, Austria, 2011. P. 41–45.

13. *Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A.* Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes. Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. Art. 032022.
14. *Koga J.-I., Koga J., Homma S.* Checkerboard problem to topology optimization of continuum structures // Computational Engineering, Finance, and Science. 2013. arXiv:1309.5677 [cs.CE].
15. *Болдырев А.В.* Топологическая оптимизация силовых конструкций на основе модели переменной плотности // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2011. Т. 13. № 1–3. С. 670–673.
16. *Brackets D., Ashcroft I., Hague R.* Topology optimization for additive manufacturing // Proc. SFF Symp. Austin Texas. — 2011. — P. 348–362.
17. *Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A.* On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2019. V. 27. P. 290–304. Doi: 10.1016/j.addma.2019.03.001.
18. *Diaz A.R., Bendsoe M.P.* Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method // Structural Optimization. — 1992. — V. 4. — P. 17–22.
19. *Лузин В.Т., Пяткин В.А.* Проектирование тонкостенных конструкций. 4-е изд. М.: Машиностроение, 2003. 448 с.
20. *Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A.* On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point // PNIPU Mechanics Bulletin. — 2013. — No. 3. — P. 16–34.
21. *Badriev I.B., Korablev A.I., Makarov M.V., Smirnova E.V.* Mathematical simulation of the bending problem of the hinged sandwich plate in physically nonlinear statement // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022013.
22. *Badriev I.B., Banderov V.V., Paimushin V.N., Gazizullin R.K.* Contact interaction of the plate with supporting deformable bases under the conditions of bending // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022014.
23. *Nikishkov G.P., Vershinin A.V., Nikishkov Y.G.* Mesh-independent equivalent domain integral method for j-integral evaluation // Advances in Engineering Software. — 2016. — V. 100. — P. 308–318.
24. *Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya.* Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct. — 2015. — V. 131. — P. 25–36.
25. *Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboyshakov A.M., Yakovlev M.Ya.* Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw. 2015. V. 86. — P. 80–84.
26. *Levin V.A., Zingermann K.M.* Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. — 2003. — V. 70 (6). — P. 809–816.

27. Коновалов Д.А., Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышёвский сборник. 2017. Т. 18, № 13. — С. 316–329.
28. Yakovlev M.Ya., Lukyanchikov I.S., Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1158, No. 4. Art. 042037.
29. Levin V., Vdovichenko I., Vershinin A., Yakovlev M., Zingerman K. Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case // Modelling and Simulation in Engineering, Art. 9010576, 2016. — 10 p.
30. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials // Letters on materials. 2017. V. 7, No. 4. — P. 452–454.
31. Эглит М. Э. Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. стереотип. М.: ЛЕНАНД, 2016. — 208 с.
32. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — М.: URSS, 2015. — 408 с.
33. Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // Modelling and Simulation in Engineering. — 2017. — V. 2017. Art. 1797561. DOI: 10.1155/2017/1797561.
34. Karpenko V.S., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M. Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in fidesys industrial package // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — V. 158. Art. 012049.
35. Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A. Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 032022.
36. Kingma D.P., Ba J.L. Adam: a Method for Stochastic Optimization // Proc. 3-rd International Conference on Learning Representations. 2015. arXiv:1412.6980 [cs.LG]. P. 1–13.
37. Ogden R. Non-linear elastic deformations. Ellis Horwood: Chichester, 1984.
38. Lurie A.I. Nonlinear Theory of Elasticity. North-Holland, Amsterdam, 1990.
39. Kislitsyn V.D., Mokhireva K.A., Shadrin V.V., Svistkov A.L. Research and modeling of viscoelastic behavior of elastomeric nanocomposites// PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, 2021(2), p. 76–87.
40. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains// International Journal of Solids and Structures. 2015. V. 67–68. P. 244–249.
41. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. V. 73 (6). P. 710–721.

42. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains// Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24 (12). P. 2240–2251.

REFERENCES

1. *Bendsøe M.P.* Optimal shape design as a material distribution problem // Structural Optimization. 1989. 1 (4), pp. 193–202.
2. *Bendsøe M.P., Sigmund O.* Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003.
3. *Sysoeva V.V., Chedrik V.V.* Algorithms for structural topology optimization // TsAGI Science Journal. 2011. V. XLII, No. 2. P. 91–102. (in Russian).
4. *Oganesyan P.A., Shevtsov S.N.* Topology designs optimization in Abaqus package // Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences 2014. V. 16, No. 6(2). P. 543–549.
5. *Borovikov A.A., Tushev O.N.* Development of a spacecraft load bearing structures using topology optimization for two versions of manufacturing technologies // Engineering Journal: Science and Innovation. 2018. No. 9. P. 1–13. (in Russian).
6. Research Report: Generative Design and Topology Optimization: In-Depth Look at the Two Latest Design Technologies [Электронный ресурс] URL: <https://www.engineering.com/ResourceMain.aspx?resid=826>. (дата обращения: 22.10.2019).
7. *Abbey T.* Topology Optimization // Digital Engineering. June 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization/>
8. *Abbey T.* Topology Optimization Methods. Digital Engineering. September 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-methods>
9. *Abbey T.* Topology Optimization. Part 3. Digital Engineering. October 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://www.digitalengineering247.com/article/topology-optimization-2>
10. *Levin V.A., Vershinin A.V.* Numerical methods. Parallel computing. (Nonlinear computational strength mechanics. Series of monographs in 5 volumes. Ed. by V.A. Levin. V. 2). — Moscow: Fizmatlit, 2015. (in Russian).
11. *Vassilevski Yu.V., Danilov A.A., Lipnikov K.N., Chugunov V.N.* Automatized technologies of generation of unstructured computational meshes . (Nonlinear computational strength mechanics. Series of monographs in 5 volumes. Ed. by V.A. Levin. V. 4). — Moscow: Fizmatlit, 2015. (in Russian).
12. *Charara M., Vershinin A., Sabitov D., Pekar G.* SEM wave propagation in complex media with tetrahedral to hexahedral mesh. [73-rd European Association of Geoscientists and Engineers Conference and Exhibition] Vienna, Austria, 2011. P. 41–45.
13. *Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A.* Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes. Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. Art. 032022.
14. *Koga J.-I., Koga J., Homma S.* Checkerboard problem to topology optimization of continuum structures // Computational Engineering, Finance, and Science. 2013. arXiv:1309.5677 [cs.CE].

15. *Boldyrev A.V.* Topological optimization of load-bearing constructions on the basis of variable density model // Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences 2011. V. 13. No. 1–3. P. 670–673. (in Russian).
16. *Brackett D., Ashcroft I., Hague R.* Topology optimization for additive manufacturing // Proc. SFF Symp. Austin Texas. — 2011. — P. 348–362.
17. *Cheng L., Liang X., Bai J., Chen Q., Lemon J., To A.* On utilizing topology optimization to design support structure to prevent residual stress induced build failure in laser powder bed metal additive manufacturing // Additive Manufacturing. 2019. V. 27. P. 290–304. Doi: 10.1016/j.addma.2019.03.001.
18. *Diaz A.R., Bendsøe M.P.* Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method // Structural Optimization. — 1992. — V. 4. — P. 17–22.
19. *Lizin V.T., Pyatkin V.A.* Design of thin-walled structures. 4-th ed. Moscow: Mashinostroenie, 2003. 448 p. (in Russian).
20. *Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A.* On the solving of equilibrium problem for the soft network shell with a load concentrated at the point // PNIPU Mechanics Bulletin. — 2013. — No. 3. — P. 16–34.
21. *Badriev I.B., Korablev A.I., Makarov M.V., Smirnova E.V.* Mathematical simulation of the bending problem of the hinged sandwich plate in physically nonlinear statement // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022013.
22. *Badriev I.B., Banderov V.V., Paimushin V.N., Gazizullin R.K.* Contact interaction of the plate with supporting deformable bases under the conditions of bending // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 022014.
23. *Nikishkov G.P., Vershinin A.V., Nikishkov Y.G.* Mesh-independent equivalent domain integral method for j-integral evaluation // Advances in Engineering Software. — 2016. — V. 100. — P. 308–318.
24. *Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya.* Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct. — 2015. — V. 131. — P. 25–36.
25. *Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya.* Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw. 2015. V. 86. — P. 80–84.
26. *Levin V.A., Zingermann K.M.* Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. — 2003. — V. 70 (6). — P. 809–816.
27. *Konovalov D. A., Yakovlev M. Ya.* Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys // Chebyshevskii sbornik. 2017. V. 18, No. 3. P. 316–329. (in Russian).
28. *Yakovlev M.Ya., Lukyanchikov I.S., Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M.* Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1158, No. 4. Art. 042037.

29. *Levin V., Vdovichenko I., Vershinin A., Yakovlev M., Zingerman K.* Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case // *Modelling and Simulation in Engineering*, Art. 9010576, 2016. – 10 p.
30. *Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M.* An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials // *Letters on materials*. 2017. V. 7, No. 4. — P. 452–454.
31. *Eglit M.E.* Lectures on foundations of continuum mechanics. Moscow: LENAND, 2016. — 208 p. (in Russian).
32. *Morozov E.M., Levin V.A., Vershinin A.V.* Strength analysis: Fidesys in the hands of an engineer. Moscow: LENAND, 2015. – 408 p. (in Russian).
33. *Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V.* The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // *Modelling and Simulation in Engineering*. — 2017. — V. 2017. Art. 1797561. DOI: 10.1155/2017/1797561.
34. *Karpenko V.S., Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M.* Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in fidesys industrial package // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. — 2016. — V. 158. Art. 012049.
35. *Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A.* Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2019. — V. 1158, No. 2. — Art. 032022.
36. *Kingma D.P., Ba J.L.* Adam: a Method for Stochastic Optimization // *Proc. 3-rd International Conference on Learning Representations*. 2015. arXiv:1412.6980 [cs.LG]. P. 1–13
37. Ogden R. Non-linear elastic deformations. Ellis Horwood: Chichester, 1984.
38. Lurie A.I. Nonlinear Theory of Elasticity. North-Holland, Amsterdam, 1990.
39. Kislitsyn V.D., Mokhireva K.A., Shadrin V.V., Svistkov A.L. Research and modeling of viscoelastic behavior of elastomeric nanocomposites// *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, 2021(2), p. 76–87.
40. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains// *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 67–68. P. 244–249.
41. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution// *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. V. 73 (6). P. 710–721.
42. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains// *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2008. V. 24 (12). P. 2240–2251.

Получено: 11.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022