

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-285-307

**Теоретический и численный анализ локализации пластических деформаций в изотропных дилатирующих неассоциативных средах в условиях плоской деформации<sup>1</sup>**

В. А. Левин, К. Ю. Крапивин

**Левин Владимир Анатольевич** — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: v.a.levin@mail.ru*

**Крапивин Кирилл Юрьевич** — ООО «Фидесис» (г. Москва).

*e-mail: k.krapiwn@gmail.com*

**Аннотация**

Статья посвящена предельному равновесию и локализации пластических деформаций вдоль сдвиговых полос в пластических дилатирующих средах. Получены уравнения характеристик систем уравнений для напряжений и скоростей в плоскодеформированном состоянии для произвольной функции поверхности текучести с зависимостью от первых двух инвариантов и неассоциативным законом течения в рамках жесткопластического подхода. Получены уравнения для напряжений вдоль характеристик в предельном состоянии и исследована область гиперболичности. Приведена численная модель решения упруго-пластической задачи галеркиновскими уравнениями на спектральных элементах высокого порядка. Проведены численные эксперименты для линейной функции поверхности текучести с целью установить границы диапазона возможных наклонов сдвиговых полос и проэкзаминировать теоретические результаты.

*Ключевые слова:* локализация деформаций, полосы сдвига, пластичность, конечные элементы, спектральные элементы.

*Библиография:* 44 названий.

**Для цитирования:**

В. А. Левин, К. Ю. Крапивин. Теоретический и численный анализ локализации пластических деформаций в изотропных дилатирующих неассоциативных средах в условиях плоской деформации // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 285–307.

<sup>1</sup>Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (п. 1-3 проект 22-11-00110, п. 4-6 проект № 19-71-10008).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-285-307

**Theoretical and numerical plastic strain localization analysis  
at plane strain of isotropic dilating non-associated media  
at plane strain conditions**

V. A. Levin, K. Yu. Krapivin

**Levin Vladimir Anatol'evich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: v.a.levin@mail.ru*

**Krapivin Kirill Yurievich** — CAE Fidesys (Moscow).

*e-mail: k.krapivn@gmail.com*

**Abstract**

The article is devoted to the limit plastic state and localization of plastic deformations along shear bands in dilating media with a non-associative flow rule. The equations of the characteristics of systems of equations for stresses and velocities in a plane strain state for an arbitrary function of the yield surface depend on the first two invariants in the rigid-plastic framework are obtained. Equations for stresses along the characteristics for the limit state and the condition of their hyperbolicity are obtained. A numerical model of the solution of the elastic-plastic problem by Galerkin equations on high-order spectral elements is presented. Numerical experiments have been carried out for the linear function of the yield surface in order to establish the boundaries of the range of possible slopes of the shear bands and to test the theoretical results.

*Keywords:* strain localization, shear band, plasticity, finite elements, spectral elements.

*Bibliography:* 44 titles.

**For citation:**

V. A. Levin, K. Yu. Krapivin, 2022, "Theoretical and numerical plastic strain localization analysis at plane strain of isotropic dilating non-associated media at plane strain conditions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 285–307.

**1. Введение**

Явление, часто наблюдаемое при пластическом деформировании - это образование локализованных полос сдвига (*shear bands*) При локализации большие деформации могут накапливаться в узких полосах, являясь прекурсором дальнейшего разрушения. Это явление замечали еще Кулон (1776), Треска (1864), Мор (1900) [1]. Локализация может встречаться в разнообразных твердых телах, например, полосы Людерса размером в микрон в металлах (Надаи (1950) [2]), полосы сдвига некоторой конечной ширины в глинах, грунтовых породах и горных массивах. Механизмы ответственные за образование полос сдвига сильно различаются в зависимости от материала. Однако общей чертой может являться то, что они возникают в результате неустойчивости неупругого поведения.

Первыми основополагающим работами, получившими дальнейшее развитие, являются работы Прандтля (1920) [3], предложившего концепцию жесткопластического тела, Хенки

(1923)[4], Гейрингер (1930) [5], Михлина (1934)[6], Менделя (1942) [7]. Хиллом (1950) [8], Качановым (1964) [9], Ивлевым (1966) [10], Фрейденталь (1958) [11] в рамках жесткопластического тела для материалов, поведение которых не зависит от давления построена теория линий скольжения, линии представляют собой характеристики определяющих гиперболических уравнений. Соколовским [12] уравнения расширены на среды с зависимостью от давления, сами уравнения остались гиперболическими.

Плоская задача достаточно хорошо изучена на сегодняшний день. Задача является статически определимой и сводится к геометрическому расположению характеристических линий. Полная система уравнений плоской задачи состоит из двух уравнений для скоростей и двух уравнений для напряжений. При ассоциированном с условием пластичности законом течения характеристики двух систем уравнений совпадают.

Немат-Нассер (1980) [13] указал на важность использования неассоциативных законов течения для гранулированных сред как при малых, так и при больших деформациях. Вследствие отсутствия нормальности с поверхностью текучести возникает несоосность главных направлений девиаторов напряжений и девиаторов пластических деформаций и образуются два различных направления характеристик. В геотехнике для материала Мора-Кулона эти направления носят название Роско и Кулона.

Позже условия возникновения и направления поверхностей локализации в упруго - пластических материалах были исследованы Хиллом (1958, 1962) [15, 16] Томасом (1960) [17], Менделем (1964, 1966) [18, 19], Рудницким и Райсом (1975, 1976) [20, 21] как проявление неустойчивости. Основываясь на представлениях о неустойчивости для упругих тел (Адамар (1902) [14]) условие бифуркации деформации, то есть, сингулярность упругопластического акустического тензора, выводится из комбинации кинематики Максвелла и условия непрерывности нормальных напряжений на поверхностях разрыва.

Ottosen (1991) [22] дал явное выражение наклонов линий сдвига плоской задаче и показал. Бифуркационный анализ допускает возможность целого спектра между этими направлениями

Механизм локализаций на сегодняшний день до конца не изучен. Современные исследования прибегают к численному моделированию локализационных процессов, например, [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

В связи с этим, в данной работе выписываются уравнения характеристик напряжений и скоростей и соотношения вдоль них в рамках жестко-пластического тела для материалов с зависимостью от давления для функции поверхности текучести произвольного вида. Приводятся теоретические решения для двух геометрических типов линий скольжения: логарифмические спирали в осесимметричной задаче растяжения плоскости с круговым вырезом и прямолинейные отрезки в задаче растяжения полосы с круговым вырезом. Приводится численная модель. Аналитические результаты проверяются независимым численным экспериментом в упруго-пластической постановке.

## 2. Определяющие уравнения

Условие текучести с зависимостью от первого и второго инвариантов напряжений в общем случае для плоской задачи записывается в виде [8, 10]:

$$F(\tau, \sigma) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ ,  $\tau = \frac{1}{2}((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2)^{1/2}$ .

В пространственном случае поверхность текучести зависит от всех компонент тензора напряжений и записывается в виде выпуклой и дифференцируемой функции:

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (2)$$

или, эквивалентно, в терминах инвариантов напряжений:

$$f(p, q) = 0, \quad (3)$$

где  $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ ,  $q = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ji}}$ ,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\delta_{ij}$ .

Пусть  $g(p, q)$  пластический потенциал. Закон пластического течения:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}\Lambda_{ij}, \\ \Lambda_{ij} &= \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцируя (4) по частям устанавливается соотношение между деформациями и напряжениями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}\left(\frac{1}{3}g_p\delta_{ij} + \frac{3}{2}g_q\frac{s_{ij}}{q}\right), \quad (5)$$

где  $g_p = \frac{\partial g(p, q)}{\partial p}$ ,  $g_q = \frac{\partial g(p, q)}{\partial q}$ , откуда следуют выражения для интенсивности необратимых деформаций и объемной части необратимых деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\lambda}f_p, \quad \dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda}f_q, \quad (6)$$

и связь между ними:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{f_p}{f_q}\dot{\varepsilon}_{eq}^p. \quad (7)$$

В условиях плоской деформации  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . Компонета  $\sigma_{33} \neq 0$  должна быть исключена из условия. Из (5) определяется напряжение  $\sigma_{33}$ :

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{3}\frac{g_p}{g_q}q + \sigma, \quad (8)$$

$p, q$  выражаются через  $\tau, \sigma$ :

$$p = -\frac{1}{9}\frac{g_p}{g_q}q + \sigma, \quad q = \left(\frac{3}{1 - (\frac{1}{3}\frac{g_p}{g_q})^2}\right)^{1/2}\tau. \quad (9)$$

Используя последние формулы (8) и (9) условие пластичности (2) приводится к виду (1). Условие (1) удовлетворяется если записать напряжения через главные напряжения используя известные формулы Леви

$$\sigma_{11} = \sigma + \Sigma(\sigma)\cos 2\psi, \quad \sigma_{22} = \sigma - \Sigma(\sigma)\cos 2\psi, \quad \sigma_{12} = \Sigma(\sigma)\sin 2\psi, \quad (10)$$

где  $\psi$  угол, образованный осью  $Ox_1$  и первым главным направлением тензора напряжений, функционал  $\Sigma(\sigma)$  зависит от функции поверхности текучести (2). Введем переменную  $\varkappa_\sigma(\sigma) = \frac{\partial \Sigma(\sigma)}{\partial \sigma}$ . Уравнения (10) вместе с уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (11)$$

образуют систему двух уравнений для двух неизвестных  $\sigma$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} &= \frac{2\Sigma(\sigma)}{1 - \varkappa_\sigma^2(\sigma)} \left( \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - (\cos 2\psi - \varkappa(\sigma)) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} &= \frac{2\Sigma(\sigma)}{1 - \varkappa_\sigma^2(\sigma)} \left( -(\cos 2\psi + \varkappa(\sigma)) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) в случае гиперболичности имеют два семейства характеристик, называемых  $\alpha$ ,  $-\beta$  — характеристиками, рис. 1. Дифференциальные уравнения характеристик:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - \kappa_\sigma^2(\sigma)}}{\cos 2\psi + \kappa_\sigma(\sigma)} \quad (13)$$

$|\kappa(\sigma)| < 1$  является условием гиперболичности системы (12). Угол между характеристиками  $\zeta$  в общем случае зависит от среднего напряжения  $\sigma$  и равен:

$$\tan \frac{\zeta_\sigma(\sigma)}{2} = \sqrt{\frac{1 - \kappa_\sigma(\sigma)}{1 + \kappa_\sigma(\sigma)}} \quad (14)$$

Характеристики ортогональны только когда  $\kappa(\sigma) = 0$ . Обозначим через  $\theta_{\alpha, \beta}$  угол наклона  $\alpha$  —,  $\beta$  — характеристик к оси  $Ox_1$ . Направления главных напряжений делят угол между характеристиками пополам:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= \psi + \zeta_\sigma(\sigma)/2 \text{ along } \alpha\text{-line} \\ \theta_\beta &= \psi - \zeta_\sigma(\sigma)/2 \text{ along } \beta\text{-line} \end{aligned} \quad (15)$$

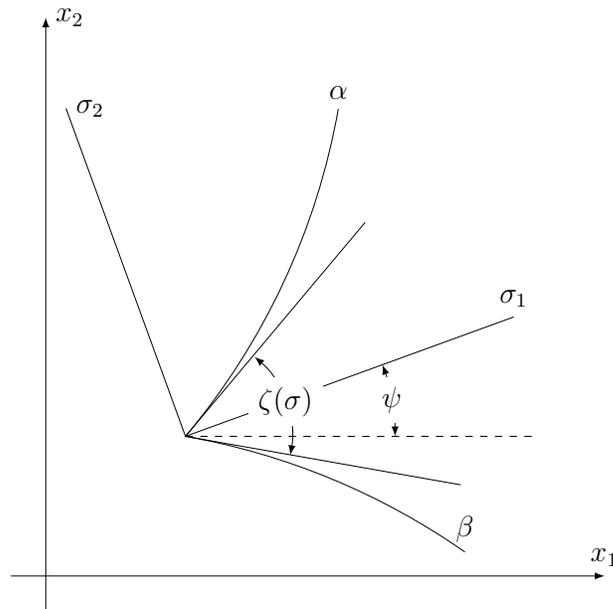


Рис. 1:  $\alpha$ —,  $\beta$ — семейства характеристик и главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$ .

Введем следующий функционал:

$$\Omega(\sigma) = \int \frac{\sqrt{1 - \kappa^2(\sigma)}}{2\Sigma(\sigma)} d\sigma. \quad (16)$$

Тогда следующее уравнение будет соотношением для напряжений вдоль  $\alpha$ —,  $\beta$ — характеристик :

$$\Omega(\sigma) \pm \psi = \text{const} \quad (17)$$

Используя закон пластического течения (5) и уравнения (10) выписываются уравнения для скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \cot 2\psi \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \sin 2\psi - \varkappa_v(\sigma) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения характеристик уравнений для скоростей:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - \varkappa_v^2(\sigma)}}{\cos 2\psi + \varkappa_v(\sigma)} \quad (19)$$

Угол  $\zeta_v$  между характеристиками уравнений скоростей:

$$\tan \frac{\zeta_v(\sigma)}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varkappa_v(\sigma)}{1 - \varkappa_v(\sigma)}} \quad (20)$$

Пусть  $v_\alpha, v_\beta$  компоненты скорости вдоль  $\alpha-, \beta-$  семейств характеристик. Тогда соотношения для них вдоль характеристик будут:

$$\begin{aligned} \cos \zeta dv_\alpha &= (v_\alpha \sin \zeta + v_\beta) d\theta \\ \cos \zeta dv_\beta &= -(v_\alpha + v_\beta \sin \zeta) d\theta \end{aligned} \quad (21)$$

Данные уравнения впервые были получены Гейрингер [5]. Из них следует отсутствие удлинения в направлении характеристик:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} = 0. \quad (22)$$

Таким образом, характеристики уравнений для напряжений и скоростей различны и имеют различные механические свойства. Если закон течения ассоциирован с условием пластичности, то  $\varkappa_v(\sigma) = \varkappa_\sigma(\sigma)$ , характеристики совпадают

Рассмотрим функцию поверхности текучести с линейной зависимостью от  $p, q$

$$f(p, q) = q + \eta p - k = 0 \quad (23)$$

и пластический потенциал

$$g(p, q) = q + \bar{\eta} p \quad (24)$$

Переходя к виду  $F(\tau, \sigma) = 0$  условие текучести переписывается в виде

$$\begin{aligned} \tau &= \Sigma(\sigma), \\ \Sigma &= \varkappa_\sigma(\sigma) \left( \sigma - \frac{k}{\eta} \right), \quad \varkappa_\sigma(\sigma) = -\sqrt{3}\eta \frac{\sqrt{9 - \bar{\eta}^2}}{9 - \eta\bar{\eta}} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\varkappa_v = -\frac{\sqrt{3}\bar{\eta}}{\sqrt{9 - \bar{\eta}^2}} \quad (26)$$

Интеграл уравнений (17) будет

$$\ln \left( \sigma - \frac{k}{\eta} \right) = \pm \frac{2\varkappa_\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa_\sigma^2}} \psi + \text{const.} \quad (27)$$

В отсутствии зависимости функции поверхности текучести от давления,  $\eta = 0$ , получаем условие Мизеса, при  $|\eta| = 3/2$  - условие Ранкина.

При  $\eta = 0$ , уравнения (19), (27) называются интегралами Хенки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \tan \theta & \quad \sigma - \frac{2k}{\sqrt{3}}\theta = \text{const}_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\cot \theta & \quad \sigma + \frac{2k}{\sqrt{3}}\theta = \text{const}_2 \end{aligned} \quad (28)$$

Вследствие линейности функции поверхности текучести  $\varkappa(\sigma)$  является константой; зависит только от параметров материала  $\eta, \bar{\eta}$ . Следовательно, угол между  $\alpha$  и  $\beta$  характеристиками  $\zeta$  постоянен на всей области. Можно заметить, направление характеристик скоростей зависит только от параметра  $\bar{\eta}$ , в то время как направление характеристик напряжений зависит от обоих параметров  $\eta, \bar{\eta}$ , входящих в условие текучести и пластический потенциал.

При параметре  $\bar{\eta} = 0$  получаем условие пластической несжимаемости и условие текучести вида:

$$\tau + \eta/\sqrt{3}\sigma = k, \quad (29)$$

для которого условием гиперболичности будет  $|\eta| < \sqrt{3}$ . При ассоциированном законе течения,  $\eta = \bar{\eta}$ , условием гиперболичности становится  $|\eta| < 3/2$ .

Подставляя в (25), (26)  $\varkappa_\sigma = \sin \varphi$ ,  $\varkappa_v = \sin \bar{\varphi}$  получаем условие пластичности Мора-Кулона

$$\tau + \sigma \sin \varphi = k_c \cos \varphi, \quad (30)$$

где  $k_c$  - когезия (сцепление) материала,  $\varphi$  - угол внутреннего трения,  $\bar{\varphi}$  - угол дилатансии. Уравнения напряжений и скоростей становятся всегда гиперболическими за исключением параболического случая при  $\varphi = \pm 90^\circ$  (условие Ранкина). Зависимости наклона характеристик друг к другу  $\zeta$  от угла внутреннего трения и угла дилатансии становятся явными:

$$\frac{\zeta_\sigma}{2} = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad \frac{\zeta_v}{2} = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\varphi}}{2}\right), \quad (31)$$

называемые в геомеханике углами типа Кулона и типа Роско [23].

Большинство испытаний на двухосное сжатие с плоской деформацией дают полосы сдвига, лежащие между  $\zeta_c$  и  $\zeta_r$ . Артур (1970) [24] экспериментальным путем над кулоновскими материалами установил наклон, равный срединному:

$$\tan \frac{\zeta_I}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}(\sin \varphi + \sin \bar{\varphi})}{1 - \frac{1}{2}(\sin \varphi + \sin \bar{\varphi})}}. \quad (32)$$

На основании бифуркационного анализа Оттосен (1991) [22] установил точно такое же соответствие, также им указано, что в предельном состоянии критерию потери устойчивости удовлетворяют как угол типа Роско, так и угол типа Кулона. Проведенный Вермиром (1990) [25] анализ с учетом возможной упругой разгрузки вне ширины полосы сдвига установил возможность всего спектра наклонов полос сдвига в диапазоне Роско-Кулона, и невозможность других направлений. Аналогичные результаты получены в [26].

Для ассоциированного закона течения характеристики уравнений напряжений и скоростей совпадают. Локализация пластических деформаций формируется вдоль характеристических направлений или их огибающих.

Введем аналогично срединное значение угла между характеристиками  $\zeta_I$  для произвольной функции поверхности текучести  $f(p, q)$  :

$$\tan \frac{\zeta_I}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}(\varkappa_\sigma + \varkappa_v)}{1 - \frac{1}{2}(\varkappa_\sigma + \varkappa_v)}}. \quad (33)$$

### 3. Использование определяющих уравнений для решения задач

Рассмотрим пластическое тесение на двух примерах растяжения на бесконечности плоскости со свободным круговым вырезом радиуса  $r = a$  и растяжения полосы шириной  $2h$  со свободным круговым вырезом малого радиуса, рис. 2. В окрестности круговой границы линий скольжения могут быть образованы логарифмическими спиралями, рис. 3а, к прямолинейной границе может примыкать семейство прямолинейных отрезков, рис. 3б.

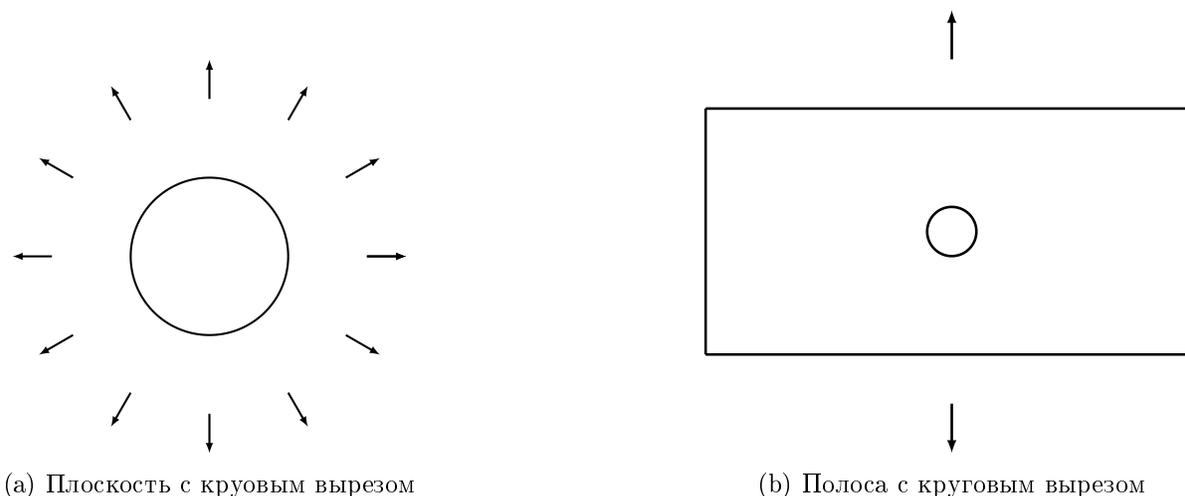


Рис. 2: Эскиз задачи

Уравнения логарифмических спиралей в полярной системе координат:

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{\ln \frac{r}{a}}{b} \quad (34)$$

Спирали пересекают радиус векторы под углом  $\zeta/2$ , параметр  $b$  равняется:  $b = \tan \zeta/2 = \sqrt{(1 + \varkappa)/(1 - \varkappa)}$ . При  $\eta = -3/2$ , семейство спиралей превращается в семейство окружностей, при  $\eta = 3/2$  - радиальные лучи. Спирали ортогональны, если  $\eta = 0$ .

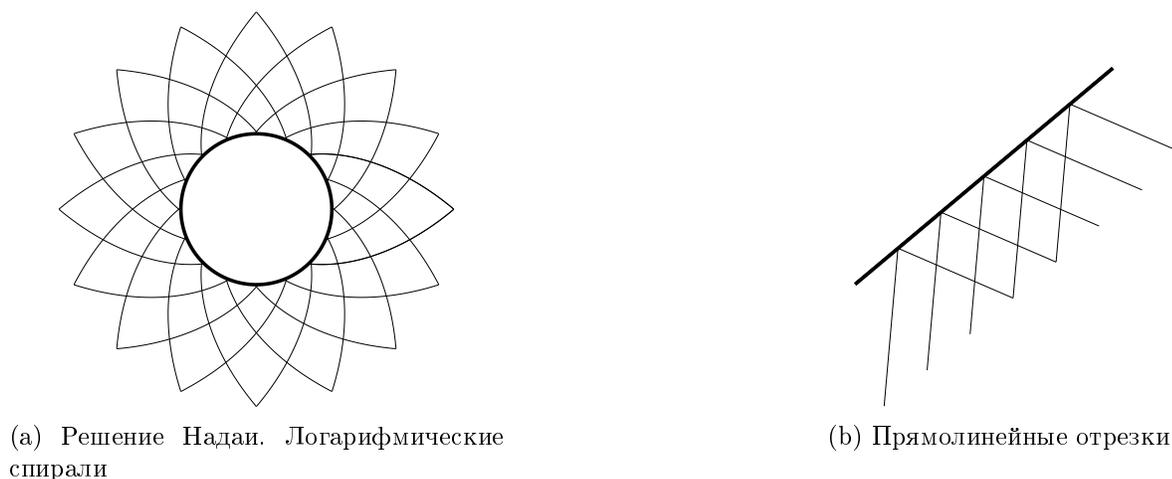


Рис. 3: Тип характеристик у круговой и прямолинейной границ

Приравняв уравнения (27) и (34) можно найти зависимость среднего напряжения  $\sigma$  от радиуса

$$\sigma = \frac{k}{\eta} \left( 1 - \frac{1}{1 - \varkappa} \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}} \right), \quad (35)$$

откуда используя (10) находятся радиальное и кольцевое напряжения:

$$\sigma_r = \frac{k}{\eta} \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{k}{\eta} \left( 1 - \frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa} \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}} \right) \quad (36)$$

Эти выражения можно получить в осесимметричной постановке. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат в отсутствии касательных напряжений:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (37)$$

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  являются главными. Заменяя  $\sigma_r = \sigma - \tau$ ,  $\tau = \Sigma(\sigma)$  и интегрируя по частям получаем:

$$\int \frac{d\sigma}{\Sigma(\sigma)} = \ln(\Sigma(\sigma)r^2) + \text{const} \quad (38)$$

Соотношения (17) и (38) определяют уравнения характеристик в параметрической форме в окрестности круговой границы для произвольной функции поверхности текучести (3). Соотношения справедливы как в плоскодеформированном, так и в плосконапряженном состояниях.

Рассмотрим геометрию характеристик при растяжении полосы с круговым отверстием. Так как к прямолинейной границе может примыкать семейство прямолинейных отрезков, то наклон характеристик постоянен, и, следовательно, напряжения также постоянны. Такое напряженное состояние называют *простым*. Предельная нагрузка для *простого* напряженного состояния будет равна:

$$P/k = -\frac{4}{\eta} \frac{\varkappa_\sigma}{1 - \varkappa_\sigma} (h - a). \quad (39)$$

## 4. Численная модель

Ниже приведена численная модель, рассмотренные примеры решаются численно в упруго-пластической постановке. Уравнения равновесия записываются через Галеркиновские уравнения [34] с изопараметрическими функциями форм элемента высокого порядка [35, 36, 37, 38]. Ньютоновские итерации нелинейной задачи для улучшения сходимости сопровождаются алгоритмом линейного поиска [39].

### 4.1. Интегрирование напряжений

Соотношения гипо-упруго-пластичности между напряжениями и деформациями в скоростях [44]:

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p, \quad \dot{\sigma}_{ij} = \mathbf{E}^0 : d_{ij}^e = \mathbf{E}^0 : (d_{ij} - d_{ij}^p) = \mathbf{E}^{ep} : d_{ij} \quad (40)$$

где  $\dot{\sigma}_{ij}$  - обозначает объективную производную тензора напряжений Коши,  $d_{ij}$  - тензор скорости деформаций,  $\mathbf{E}^0$  - тензор упругости 4 ранга,  $\mathbf{E}^{ep}$  - упругопластический тензор 4 ранга.

Как правило, необходимо различать три случая, когда напряжения находятся на поверхности текучести  $f(\sigma_{ij}) = 0$ :

$$\begin{array}{lll} \dot{f}(\sigma_{ij}) < 0 & d\lambda = 0 & \text{упругая нагрузка,} \\ \dot{f}(\sigma_{ij}) = 0 & d\lambda = 0 & \text{нейтральная нагрузка,} \\ \dot{f}(\sigma_{ij}) = 0 & d\lambda > 0 & \text{пластическое течение.} \end{array}$$

Пластический множитель  $\lambda$  и функция поверхности текучести  $f(\sigma_{ij})$  соответствуют дополнителным, так называемым, условиям Каруша-Куна-Такера

$$\lambda \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \lambda f = 0 \quad (41)$$

На каждом временном шаге напряжения интегрируются методом радиального возврата по неявной обратной схеме Эйлера. Инкрементальная процедура вычислений напряжений следующая:

(а) *Предиктор. Упругий шаг*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^{e*} &= \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n \end{aligned} \quad (42)$$

(б) *Корректор. Алгоритм радиального возврата*

На основании предыдущих формул и закона пластического течения (4) следует система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^e &= \varepsilon_{n+1}^{e*} - \Delta\lambda \mathbf{\Lambda}_{n+1} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \Delta\lambda H \\ f(\sigma_{n+1}, A_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Шаг пластического корректора алгоритма, таким образом, состоит в отыскании решения  $\varepsilon_{n+1}^e$ , обновления внутренней переменной  $\alpha_{n+1}$  и инкремента пластического множителя  $\Delta\lambda$  (43), соответствующего условию  $\Delta\lambda > 0$ .

Уравнения (43) при постоянном тензоре упругости  $\mathbf{E}^0$  могут быть переписаны эквивалентно в терминах напряжений:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - \Delta\lambda \mathbf{E}^e : \mathbf{\Lambda}_{n+1} \quad (44)$$

$\Delta\lambda \mathbf{E}^e : \mathbf{\Lambda}_{n+1}$  – вектор радиального возврата,  $\Lambda_{ij} = \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$  – вектор течения.

Линеаризация уравнений (43) для представленной линейной модели течения дает:

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{e*} &= d\varepsilon^e + d\Delta\lambda \Lambda + \Delta\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma} d\sigma \\ \alpha &= \alpha + \Delta\lambda H \\ \Lambda d\sigma &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Непосредственно из алгоритма радиального возврата следует выражение упругопластического тензора  $\mathbf{E}^{ep} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}^{e*}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{ep} &= \mathbf{P} - \frac{1}{\Lambda_f : \mathbf{P} : \Lambda_g + H} (\mathbf{P} : \Lambda_f) \otimes (\mathbf{P} : \Lambda_g) \\ \mathbf{P} &= \left( I_s + \Delta\lambda \mathbf{E}^0 : \frac{\partial \Lambda_f}{\partial \sigma} \right)^{-1} \mathbf{E}^0, \end{aligned} \quad (46)$$

$(I_s + \Delta\lambda \mathbf{E}^0 : \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma})$  – матрица Гессе.

## 4.2. Интерполяционная функция элемента высокого порядка

Известно, что увеличение степени интерполяции устраняет искусственную блокировку элемента (volumetric locking) и является более эффективным методом решения [40, 41, 42], с другой стороны, увеличение степени интерполяции приближается к аппроксимации решения, претерпевающего разрыв на линиях скольжения. В классической формулировке конечных элементов часто используются полиномы Лагранжа для интерполяции заданного порядка  $p$  [34]. На единичном интервале  $\xi \in [-1; 1]$  они определяются как:

$$l_a^n(\xi) = \prod_{b=1; a \neq b}^N \frac{\xi - \xi_b}{\xi_a - \xi_b} \quad (47)$$

С увеличением полиномиального порядка лагранжевы функции формы с одинаково разнесенными опорными точками приводят к осцилляциям, что приводит к плохой числовой обусловленности результирующей матрицы [37]. Однако в контексте *спектральных методов* в качестве корней полиномов Лежандра выбираются опорные точки и отталкиваются от правила интегрирования Гаусса-Лобатто. То есть, другими словами, точки интегрирования совпадают с точками определения полиномов Лагранжа. В [43] проведен анализ степени обусловленности результирующей матрицы для элементов с одинаково разнесенными опорными точками и *спектральных элементов*. Для более высоких пространственных измерений базисные функции komponуются из тензорного произведения одномерных функций  $l_a^n(\xi)$  степени  $n = N - 1$ :

$$N_a = l_i^n(\xi_a) l_j^n(\eta_a), \quad (48)$$

где  $i, j \leq N$  - индексы узлов,  $\xi, \eta$  - координаты референсного единичного квадрата. Координаты точек GLL определяются как корни уравнения:

$$(1 - \xi^2) P_n'(\xi) = 0,$$

где  $P_n$  - многочлен Лежандра степени  $n$ . Для минимальной степени,  $p = 1$ , получается простой результат для классического билинейного изопараметрического элемента:

$$N_a = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta).$$

## 5. Численный результат

Параметрами материала заданы Модуль Юнга  $1.e5$  МПа, предел текучести  $k = 5$  МПа. На рис. 4 показаны конечно-элементные сетки кольца с внутренним и внешним радиусами 100 мм и 500 мм, соответственно, рассчитывалась половина области с условием симметрии  $u_y|_{y=0} = 0$ , и полосы размерами 100x50 мм, радиус выреза равен 1 мм, рассчитывалась четверть области с условиями симметрии  $u_x|_{x=0} = 0$   $u_y|_{y=0} = 0$ .

Первоначально проведен анализ степени влияния порядка элемента на формирование линий скольжения, рис. 5. Вычисления показали: первый порядок не позволяет рассчитывать линии. С увеличением порядка линии становятся более локализованными и контрастными. Для полиномов выше 4 и 5 порядка нет заметного качественного изменения. Расчеты для  $\eta = \bar{\eta}$  показали независимость линий пластического течения от коэффициента Пуассона, то есть пластическое течение определяется только пластическими постоянными. Далее серия вычислений для различных параметров  $\eta, \bar{\eta}$  проведена с полиномом степени 4 и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0$ .

Для ассоциативного материала,  $\eta = \bar{\eta}$ , результаты расчета растяжения полосы с параметрами  $\eta$  из области гиперболичности и параболичности уравнений при  $|\eta| = 3/2$  (условие

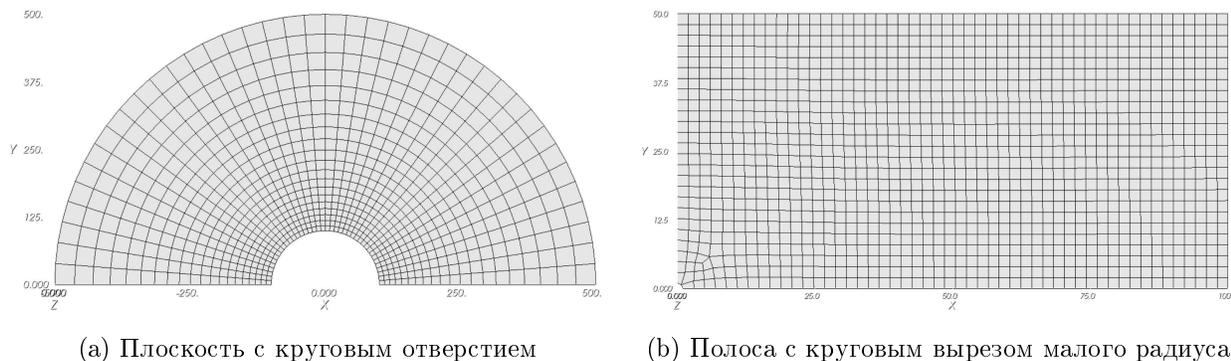


Рис. 4: Вычислительная сетка

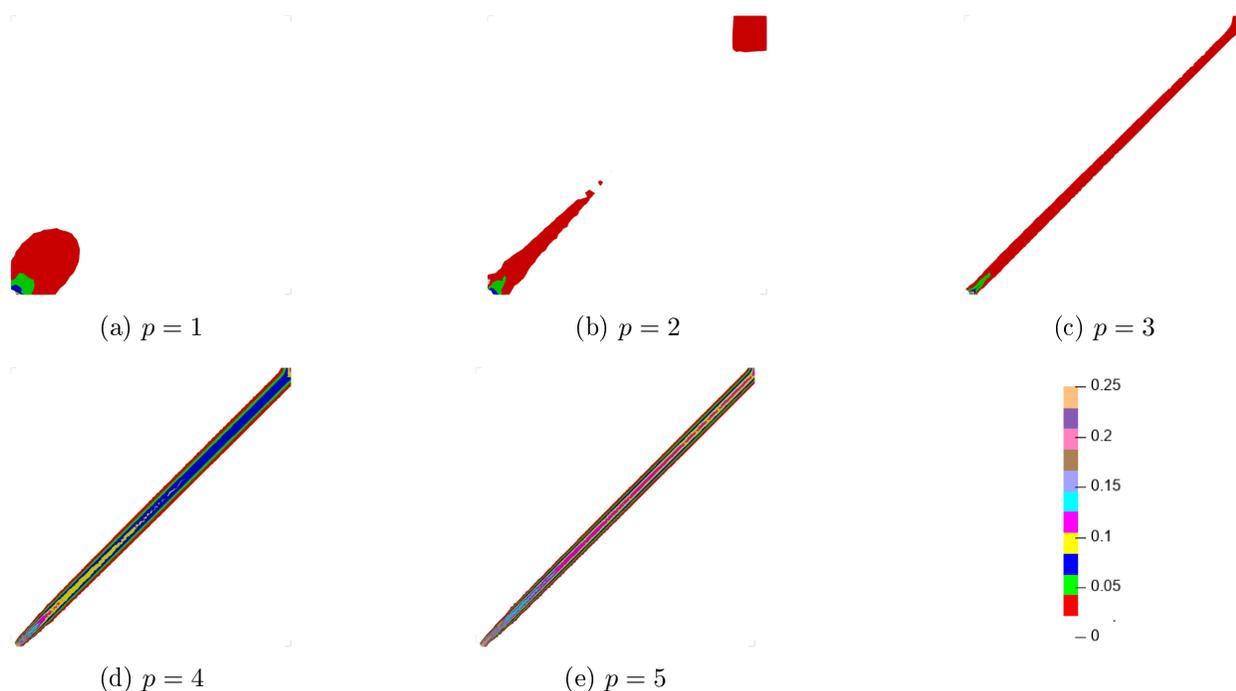


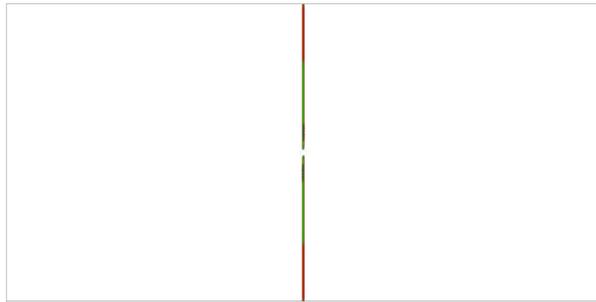
Рис. 5: Линии скольжения в зависимости степени интерполяции элемента

Ранкина) показаны на рис. 6. Численные направления полос сдвига в точности совпадают направлениями характеристик.

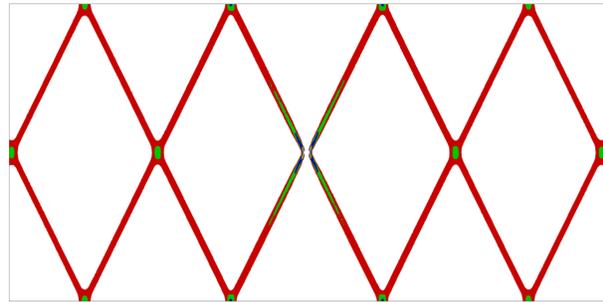
Формирование линий скольжения в окрестности отверстия приведено на рис. 7. Линии совпадают со спиралями, пересекающими радиус-вектор под средним углом  $\theta_I$  типа Артура. Так как угол определяется только по материальным параметрам, то направление линий сдвига при осевой симметрии наблюдается также единственным. Также получено численное распределение напряжений вокруг отверстия. На рис. 8 приведено сравнение численного результата с формулами (36).

Формирование линий скольжения в полосе при растяжении показаны на рисунках 9, 10 и 11. Можно заметить, линии - не строго прямые, меняют наклон при распространении и могут расщепляться на две. Формирование происходит под углом между средним типа Артура и Кулоновским, смещаясь к среднему; отражение - под средним, первоначальное примыкание к свободной границе - под углом типа Роско. При увеличении нагрузки в некоторой точке происходит расщепление, образуя со свободной поверхностью вторую линию с направлением близким к Кулоновскому типу. Таким образом, в общем случае можно заключить

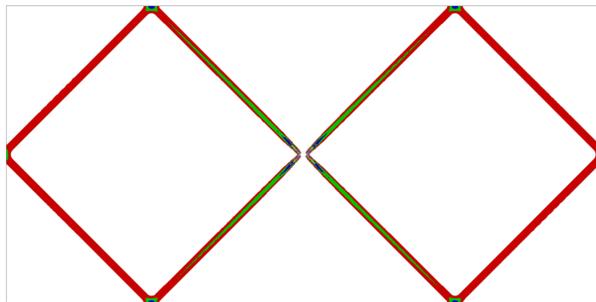
об отсутствии единственности направлений полос сдвига. Определяется допустимый спектр, ограниченный характеристическими линиями.



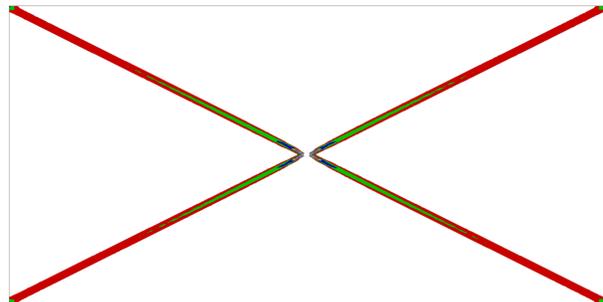
(a)  $\eta = \bar{\eta} = -3/2, \theta = 90^\circ$ , модель Ранкина



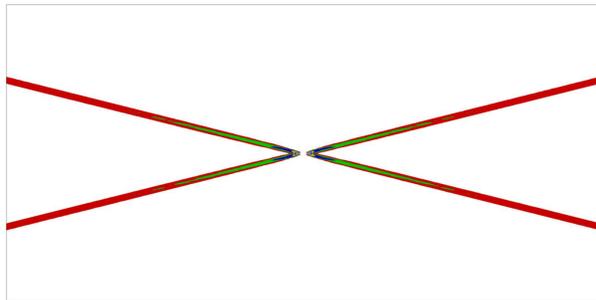
(b)  $\eta = \bar{\eta} = -0.98, \theta = 63.43^\circ$



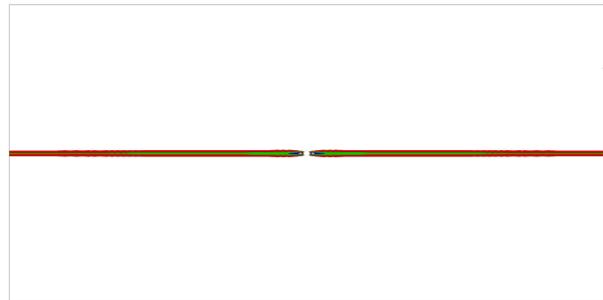
(c)  $\eta = \bar{\eta} = 0, \theta = 45^\circ$ , модель Мизеса



(d)  $\eta = \bar{\eta} = 0.98, \theta = 26.57^\circ$



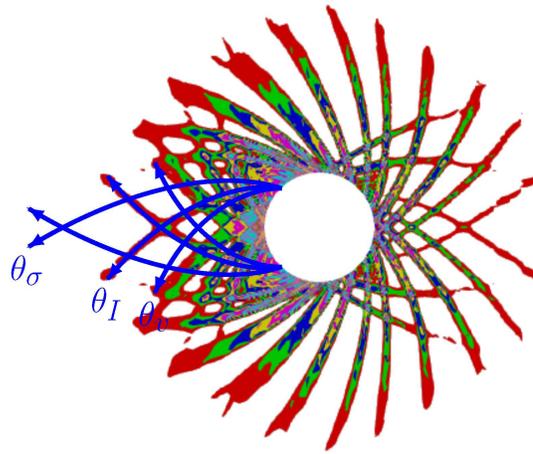
(e)  $\eta = \bar{\eta} = 1.36, \theta = 14.04^\circ$



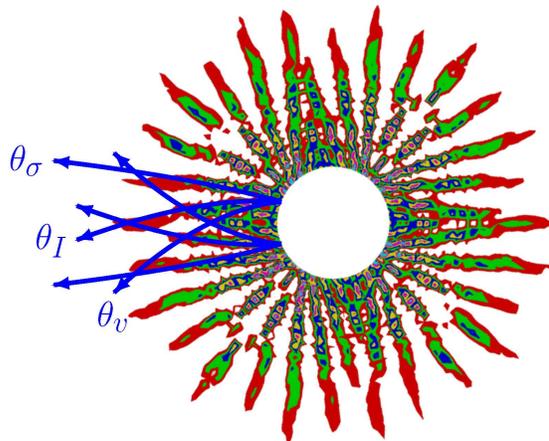
(f)  $\eta = \bar{\eta} = 3/2, \theta = 0^\circ$ , модель Ранкина



Рис. 6: Линии локализации пластических деформаций при ассоциированном законе течения для некоторых параметров  $\eta = 0, \eta = \pm -0.98, \eta = \pm 3/2$ .



(a)  $\eta = 1, \bar{\eta} = 0, \theta_R = 45^\circ, \theta_C = 27.37^\circ, \theta_I = 36.6^\circ$



(b)  $\eta = 1.5, \bar{\eta} = 1, \theta_R = 26.12^\circ, \theta_C = 5.77^\circ, \theta_I = 18.62^\circ$



Рис. 7: Локализация пластических деформаций

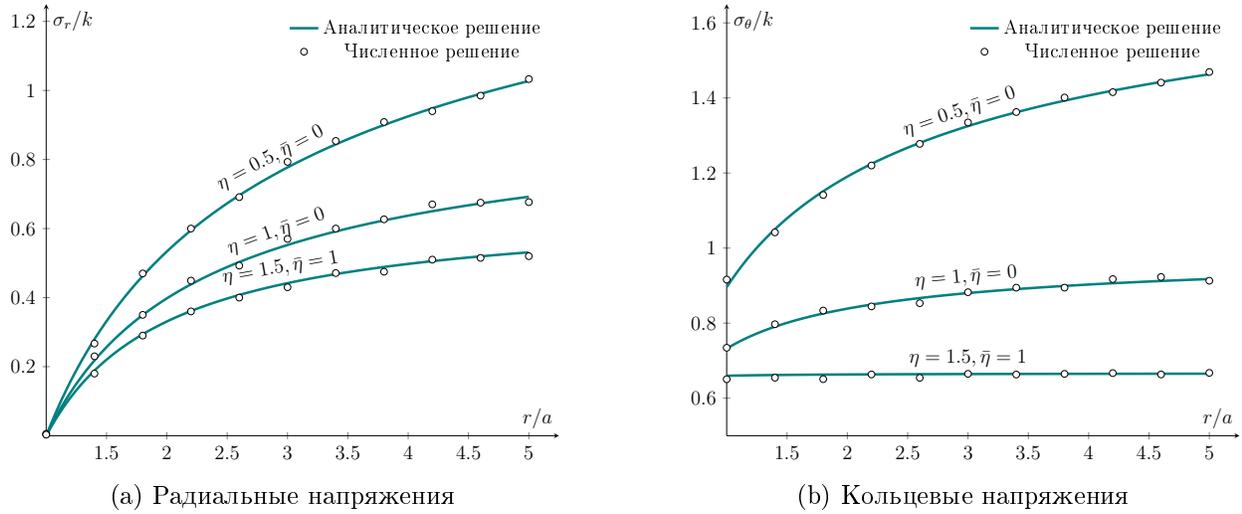


Рис. 8: Распределение напряжений по  $r$

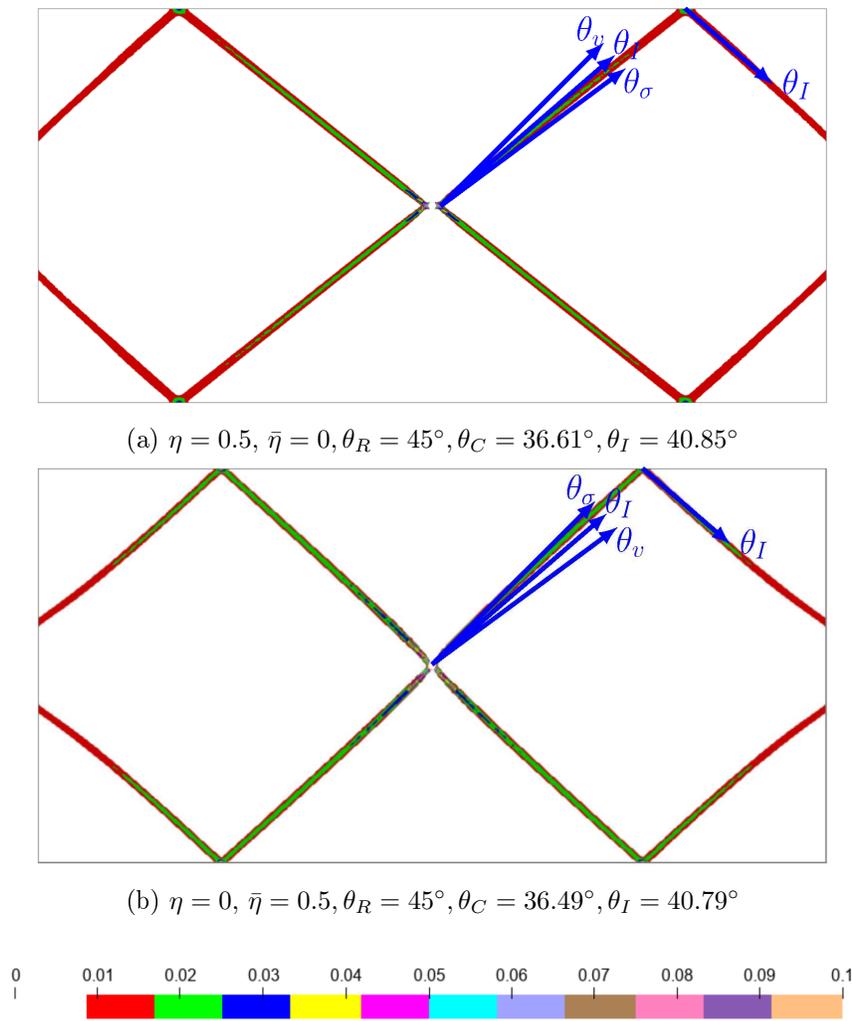
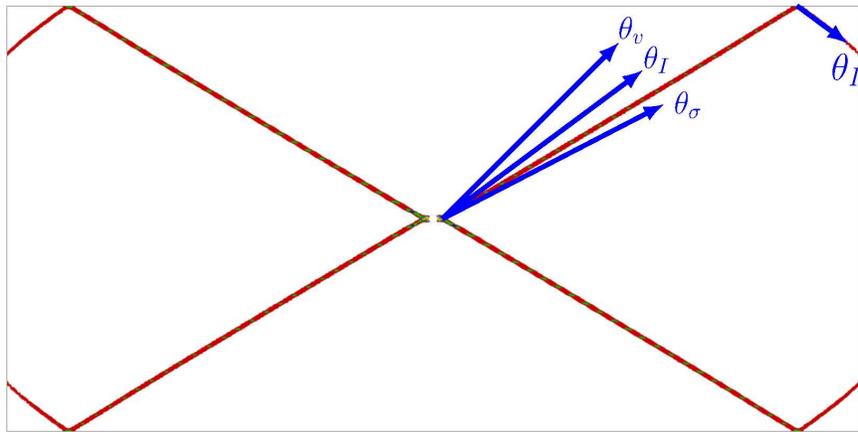
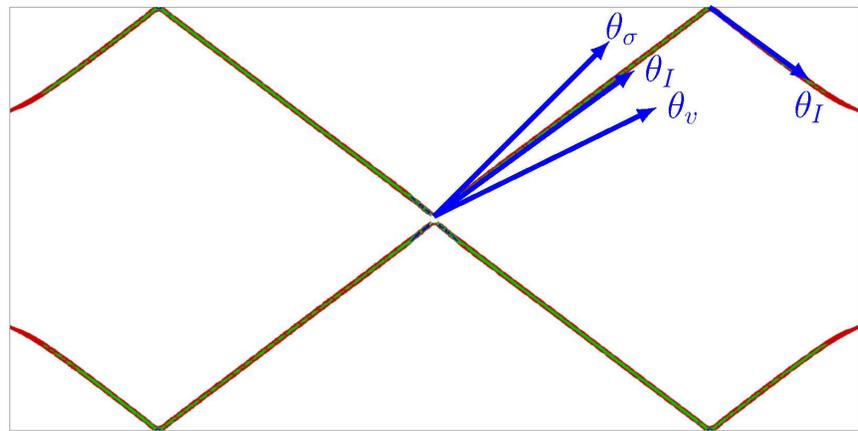


Рис. 9: Локализация пластических деформаций



(a)  $\eta = 1, \bar{\eta} = 0, \theta_R = 45^\circ, \theta_C = 27.37^\circ, \theta_I = 36.6^\circ$



(b)  $\eta = 0, \bar{\eta} = 1, \theta_R = 26.12^\circ, \theta_C = 45^\circ, \theta_I = 36.09^\circ$



Рис. 10: Локализация пластических деформаций

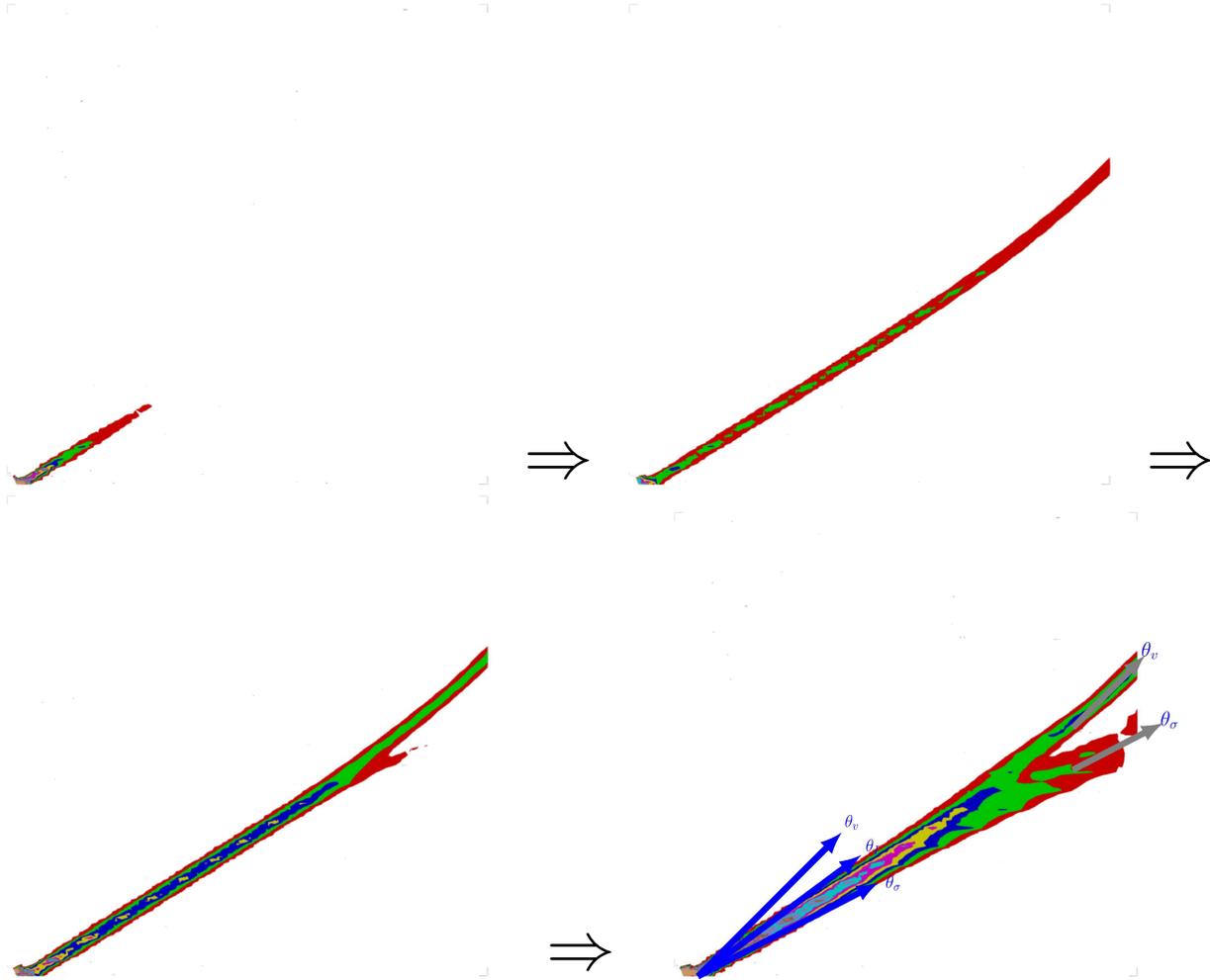


Рис. 11: Формирование линии сдвига

## 6. Заключение

Продемонстрирована возможность использования предложенной численной модели к расчетам формирования полос сдвига. В ассоциированном случае линии сдвига совпадают с характеристическими линиями. То есть, геометрическое расположение линий сдвига определяется единственным способом. Наклон между характеристиками для линейной функции поверхности текучести постоянен и не зависит от напряженного состояния и геометрии границ. Этого нельзя сказать для более сложных функций, например, квадратичных, при которых наклон характеристики к первому главному направлению помимо материальных параметров зависит от среднего напряжения, тем не менее, полосы сдвига совпадают с характеристиками и определяются единственным способом. В неассоциированном законе получаем возможное расположение полос сдвига в виде всего спектра, заключенного между направлением типа Роско и направлением типа Кулона. Таким образом направление линий сдвига неединственно. Полученные результаты могут быть полезными для дальнейшего исследования геометрий линий скольжения и предельного равновесия в широком круге материалов с произвольной функцией поверхности текучести, зависимой от первого и второго инвариантов.

**СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Mohr, O. (1900), Welche Umstände bedingen der Bruch und der Elastizitätsgrenze des Materials, *Z. Vereins Deutscher Ingenieure*, 1524.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел, том 1. М.: Иностранной литературы, 1954
3. Prandtl, L. "Über die Härte plastischer Körper". Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. 1920: 74-85.
4. Hencky, H. (1923), Über Einige Statisch Bestimmte Fälle Des Gleichgewichts In Plastischen Körpern. *Z. angew. Math. Mech.*, 3: 241-251
5. H. Polaczek-Geiringer, "Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem, in Verhandlungen d. 3 Intern. Kongress f. techn. Mechank, Stockholm, 1930, pp. 185-190.
6. С. А. Христианович, С.Г.Милхин, Б.Б. Девисон *Некоторые новые вопросы механики сплошной среды*. Москва, Ленинград, 1938.
7. J. Mandel. Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement. PhD thesis, Thèse, Paris, 1942.
8. Хилл Р. *Математическая теория пластичности*. 1956. М.: Гостехиздат. 408 стр.
9. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. Наука, Москва. 420 стр.
10. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д., *Математическая теория пластичности*. Физматлит, Москва, 2001. 704 стр.
11. Freudenthal A.M., Geiringer H. (1958) *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*. In: Flügge S. (eds) *Elasticity and Plasticity / Elastizität und Plastizität*. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik. Springer, Berlin.
12. Соколовский В.В. *Статика сыпучей среды*. М.: Физматлит. 1960. 121 стр.
13. Nemat-Nasser, S. and A. Shokoh (1980), On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solid Struct.* 16, 495-514
14. J. Hadamard, L., A. Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique. *Nature* 71, 196-197 (1904). <https://doi.org/10.1038/071196a0>
15. Hill. R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. 1. *Mech. Phys. Solids* 6, pp.236-249.
16. Hill R. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1-16, 1962.
17. T. Y. Thomas *Plastic Flow and Fracture in Solids*. Academic Press, New York (1961).
18. Mandel J. (1964) Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique. In: Kolsky H., Prager W. (eds) *Stress Waves in Anelastic Solids*. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Springer, pp. 331-340.
19. J. Mandel, Conditions de stabilité et postulat de Drucker, in: J. Kravtchenko and P.M. Sirieys, eds., *Rheology and Soil Mechanics* (Springer, Berlin, 1966) pp. 58-68.

20. J. W. Rudnicki and J. R. Rice. Conditions of the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant material. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371-394, 1975.
21. Rice, J.R., The localization of plastic deformation, in: Koiter, W. T. (ed.), Proc. Hth Int. Congr. Theoret. Appl. Mech., North-Holland, pp. 207–220, 1977.
22. K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. Plast.*, 7:99-121, 1991.
23. K. H. Roscoe. The Influence of Strains in Soil Mechanics. *Géotechnique*, 1970, 20:2, 129-170
24. J. R. F. Arthur, T. Dunstan, Q. A. J. L. Al-Ani, and A. Assadi. Plastic deformation and failure in granular media. *Géotechnique*, 1977, 27:1, 53-74
25. P. A. Vermeer. The orientation of shear bands in biaxial tests. *Géotechnique*, 1990, 40:2, 223-236.
26. I. Vardoulakis, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 4 (1980) p.103
27. M. Ortiz, Y. Leroy, A. Needleman, A finite element method for localized failure analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 61, Issue 2, 1987, Pages 189-214.
28. Simo, J.C., Oliver, J. & Armero, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics* 12, 277–296 (1993). <https://doi.org/10.1007/BF00372173>
29. F. Armero and K. Garikipati, ‘An analysis of strong discontinuity in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids’, *Int. J. Solids Struct.*, 33(20-22), 2863-2885 (1996).
30. Jeremić, B. and Xenophontos, C. (1999), Application of the p-version of the finite element method to elastoplasticity with localization of deformation. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 15: 867-876. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199912\)15:12 < 867::AID-CNM296 > 3.0.CO;2-9](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199912)15:12 < 867::AID-CNM296 > 3.0.CO;2-9)
31. Richard A. Rigueiro, Ronaldo I. Borja, ‘Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity’, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 38, Issue 21, 2001, Pages 3647-3672, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00250-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00250-X).
32. Duretz, T., Souche, A., de Borst, R., & Le Pourhiet, L. (2018). The benefits of using a consistent tangent operator for viscoelastoplastic computations in geodynamics. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 19, 4904– 4924. <https://doi.org/10.1029/2018GC007877>
33. Левин В.А., Зингерман К.М., Крапивин К.Ю., Яковлев М.Я. Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации пластических деформаций. *Чебышевский сборник*. 2020;21(3):306-316. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316>
34. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Seventh Edition. Elsevier, 2014
35. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
36. B. Szabó, I. Babuška. (2011). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Wiley.

37. Solin, P., Segeth, K., Dolezel, I. (2003). *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9780203488041>
38. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K., Levin, V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes *Modelling and Simulation in Engineering*, 2017, 2017, 1797561
39. de Borst, R., Crisfield, M.A., Remmers, J.J.C. and Verhoosel, C.V. (2012). Solution Techniques in Quasi-Static Analysis. In *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (eds R. de Borst, M.A. Crisfield, J.J.C. Remmers and C.V. Verhoosel). <https://doi.org/10.1002/9781118375938.ch4>
40. Babuška I., Suri M. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. *Numer. Math.* 62, 439–463 (1992). <https://doi.org/10.1007/BF01396238>
41. Babuška I., Suri M. ‘On Locking and Robustness in the Finite Element Method’, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:5, 1261-1293 (1992)
42. De Borst, R. and Groen, A.E. (1995), Some observations on element performance in isochoric and dilatant plastic flow. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38: 2887-2906. <https://doi.org/10.1002/nme.1620381704>
43. S. Eisenträger, E. Atroshchenko and R. Makvandi, On the condition number of high order finite element methods: Influence of p-refinement and mesh distortion, *Computers and Mathematics with Applications* (2020), <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.05.012>.
44. E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley, 2008

## REFERENCES

1. Mohr, O. (1900), Welche Umstände bedingen der Bruch und der Elastizitätsgrenze des Materials, *Z. Vereins Deutscher Ingenieure*, 1524.
2. Nadai. A. *Theory of Flow and Fracture of Solids* Vol. 1. McGraw-Hill. New York. (1950)
3. Prandtl, L. "Über die Härte plastischer Körper". *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1920: 74-85.
4. Hencky, H. (1923), Über Einige Statisch Bestimmte Fälle Des Gleichgewichts In Plastischen Körpern. *Z. angew. Math. Mech.*, 3: 241-251
5. H. Polaczek-Geiringer, "Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem, in Verhandlungen d. 3 Intern. Kongress f. techn. Mechank, Stockholm, 1930, pp. 185–190.
6. Christianovich S., Michlin S., Davison B., *Some new issues of continuum mechanics* Moscow, Leningrad, 1938. (In Russian)
7. J. Mandel. Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement. PhD thesis, Thèse, Paris, 1942.
8. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Univ. Press, London (1950).
9. Kachanov L.M. *Foundations of the theory of plasticity*. Amsterdam: North-Holland, 1971. 482 p.

10. A. Yu. Ishlinskii and D. D. Ivlev, *Mathematical Theory of Plasticity* [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2001).
11. Freudenthal A.M., Geiringer H. (1958) *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*. In: Flügge S. (eds) *Elasticity and Plasticity / Elastizität und Plastizität*. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik. Springer, Berlin.
12. Sokolovskii V. V. *Statics of Granular Media*. Oxford: Pergamon Press, 1965
13. Nemat-Nasser, S. and A. Shokoh (1980), On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solid Struct.* 16, 495-514.
14. J. Hadamard, L., A. Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique. *Nature* 71, 196–197 (1904). <https://doi.org/10.1038/071196a0>
15. Hill. R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. 1. *Mech. Phys. Solids* 6, pp.236–249.
16. Hill R. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1–16, 1962.
17. T. Y. Thomas *Plastic Flow and Fracture in Solids*. Academic Press, New York (1961).
18. Mandel J. (1964) Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique. In: Kolsky H., Prager W. (eds) *Stress Waves in Anelastic Solids*. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Springer, pp. 331-340.
19. J. Mandel, Conditions de stabilité et postulat de Drucker, in: J. Kravtchenko and P.M. Sirieys, eds., *Rheology and Soil Mechanics* (Springer, Berlin, 1966) pp. 58–68.
20. J. W. Rudnicki and J. R. Rice. Conditions of the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant material. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371-394, 1975.
21. Rice, J.R., The localization of plastic deformation, in: Koiter, W. T. (ed.), *Proc. Hth Int. Congr. Theoret. Appl. Mech.*, North-Holland, pp. 207–220, 1977.
22. K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. Plast.*, 7:99-121, 1991.
23. K. H. Roscoe. The Influence of Strains in Soil Mechanics. *Géotechnique*, 1970, 20:2, 129-170
24. J. R. F. Arthur, T. Dunstan, Q. A. J. L. Al-Ani, and A. Assadi. Plastic deformation and failure in granular media. *Géotechnique*, 1977, 27:1, 53-74
25. P. A. Vermeer. The orientation of shear bands in biaxial tests. *Géotechnique*, 1990, 40:2, 223-236.
26. I. Vardoulakis, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 4 (1980) p.103
27. M. Ortiz, Y. Leroy, A. Needleman, A finite element method for localized failure analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 61, Issue 2, 1987, Pages 189-214.
28. Simo, J.C., Oliver, J. & Armero, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics* 12, 277–296 (1993). <https://doi.org/10.1007/BF00372173>

29. F. Armero and K. Garikipati, ‘An analysis of strong discontinuity in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids’, *Int. J. Solids Struct.*, 33(20-22), 2863-2885 (1996).
30. Jeremić, B. and Xenophontos, C. (1999), Application of the p-version of the finite element method to elastoplasticity with localization of deformation. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 15: 867-876. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199912\)15:12<867::AID-CNM296 > 3.0.CO;2-9](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199912)15:12<867::AID-CNM296>3.0.CO;2-9)
31. Richard A. Regueiro, Ronaldo I. Borja, ‘Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity’, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 38, Issue 21, 2001, Pages 3647-3672, [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00250-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00250-X).
32. Duretz, T., Souche, A., de Borst, R., & Le Pourhiet, L. (2018). The benefits of using a consistent tangent operator for viscoelastoplastic computations in geodynamics. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 19, 4904– 4924. <https://doi.org/10.1029/2018GC007877>
33. Levin V.A., Zingerman K.M., Krapivin K.Yu., Yakovlev M.Y. Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains. *Chebyshevskii Sbornik*. 2020;21(3):306-316. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316>
34. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Seventh Edition. Elsevier, 2014
35. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
36. B. Szabó, I. Babuška. (2011). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Wiley.
37. Solin, P., Segeth, K., Dolezel, I. (2003). *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9780203488041>
38. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K., Levin, V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2017, 1797561
39. de Borst, R., Crisfield, M.A., Remmers, J.J.C. and Verhoosel, C.V. (2012). Solution Techniques in Quasi-Static Analysis. In *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (eds R. de Borst, M.A. Crisfield, J.J.C. Remmers and C.V. Verhoosel). <https://doi.org/10.1002/9781118375938.ch4>
40. Babuška I., Suri M. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. *Numer. Math.* 62, 439–463 (1992). <https://doi.org/10.1007/BF01396238>
41. Babuška I., Suri M. ‘On Locking and Robustness in the Finite Element Method’, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:5, 1261-1293 (1992)
42. De Borst, R. and Groen, A.E. (1995), Some observations on element performance in isochoric and dilatant plastic flow. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38: 2887-2906. <https://doi.org/10.1002/nme.1620381704>
43. S. Eisenträger, E. Atroshchenko and R. Makvandi, On the condition number of high order finite element methods: Influence of p-refinement and mesh distortion, *Computers and Mathematics with Applications* (2020), <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.05.012>.

44. E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley, 2008

Получено: 18.08.2022

Принято в печать: 8.12.2022