ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-272-284

Оценка сходимости метода спектральных элементов в CAE Fidesys на основе точного решения задачи Ламе для упругопластических материалов с помощью системы регрессионного автоматизированного тестирования[1]

В. А. Левин, В. В. Козлов, Е. Д. Комолова, А. В. Филатова, М. А. Карцев

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московскиий государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: v.a.levin@mail.ru
Козлов Виктор Вячеславович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула); Московскиий государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru
Комолова Елена Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, Московскиий государственный университет имени М. В. Ломоносова; ООО «Фидесис» (г. Москва).
e-mail: komolova@cae-fidesys.com
Филатова Александра Вячеславовна — ООО «Фидесис» (г. Москва).
e-mail: filatova@cae-fidesys.com
Карцев Михаил Александрович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cartsev.mikhail@yandex.ru

Аннотация

В статье рассмотрена оценка сходимости метода спектральных элементов, реализованного в CAE Fidesys, на основе точных аналитических решений задачи Ламе при малых деформациях в упругой постановке, а также в упругопластической постановке с использованием критерия Мизеса в рамках теории идеально пластического течения. Ввиду симметрии рассматривались четверти моделей. Численные результаты получены в пакете для прочностных расчетов CAE Fidesys с помощью метода конечных элементов первого и второго порядка и метода спектральных элементов третьего - девятого порядка. На основании полученных результатов осуществлен анализ об определении характера уменьшения погрешностей метода спектральных элементов CAE Fidesys при повышении порядка элементов. Исследование проводилось с помощью специализированной системы регрессионного автоматизированного тестирования. Результаты работы могут быть полезны при принятии решения об использовании метода спектральных элементов в промышленных расчетах.

Ключевые слова: автоматизированная система тестирования, автотесты, метод конечных элементов, метод спектральных элементов, экспоненциальная сходимость, CAE Fidesys, упругопластическая модель, задача Ламе, криволинейные границы.

Библиография: 30 названий.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке грантов Российского научного фонда: проект №19-71-10008 (анализ изменения погрешностей численных решений при изменении порядка элементов), №22-11-00110 (получение аналитических решений задач Ламе).

Для цитирования:
В. А. Левин, В. В. Козлов, Е. Д. Комолова, А. В. Филатова, М. А. Карцев. Оценка сходимости метода спектральных элементов в CAE Fidesys на основе точного решения задачи Ламе для упругопластических материалов с помощью системы регрессионного автоматизированного тестирования // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 272–284.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 4.

UDC 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-272-284

Estimation of convergence of spectral element method in CAE Fidesys based on exact solution of the Lame problem for elastoplastic materials using an automated regression testing system

V. A. Levin, V. V. Kozlov, E. D. Komolova, A. V. Filatova, M. A. Kartsev

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: v.a.levin@mail.ru
Kozlov Viktor Vyacheslavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula); Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru
Komolova Elena Dmitrievna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Fidesys LLC (Moscow).
e-mail: komolova@cae-fidesys.com
Filatova Alexandra Vyacheslavovna — Fidesis LLC (Moscow).
e-mail: filatova@cae-fidesys.com
Kartsev Mikhail Aleksandrovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: cartsev.mikhail@yandex.ru

Abstract

This paper considers convergence estimation of the spectral element method implemented in CAE Fidesys. It was based on exact analytical solutions of the Lame problems in small deformations in the elastic and elastic-perfectly plastic obeying Huber-von Mises yield criterion formulations. Due to the symmetry, we consider quarters of the models. Numerical results were obtained in the CAE Fidesys strength analysis system using the finite element method for the first and second orders and the spectral element method for the third to ninth orders. Based on the results obtained, an analysis was carried out to determine the nature of the decrease in the errors of the CAE Fidesys spectral element method with an increase in the order of the elements. The study was conducted using a specialized automated testing system. The results of the work can be useful in making a decision on the use of the spectral element method in industrial calculations.

Keywords: automated testing system, autotests, finite element method, spectral element method, exponential convergence, CAE Fidesys, elastoplastic model, Lame problem, curvilinear boundaries.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
V. A. Levin, V. V. Kozlov, E. D. Komolova, A. V. Filatova, M. A. Kartsev, 2022, "Estimation of convergence of spectral element method in CAE Fidesys based on exact solution of the Lame problem for elastoplastic materials using an automated regression testing system" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 272–284.

1. Введение

CAE Fidesys – программа прочностного анализа, которая позволяет решать широкий спектр инженерных задач [1-4]. Программа включает в себя возможность применения [5, 6]:

- несколько десятков свойств материалов,
- разные типы конечных элементов,
- 25 видов граничных условий,
- 5 видов начальных условий,
- 9 порядков элементов,
- 10 видов расчетов.

Для отслеживания производительности и корректности расчетов в CAE программе необходимо достаточное количество функциональных тест-кейсов (далее тестов), основанных на механических постановках с апробированными результатами [7]. На данный момент число тестов превышает 1000. С обновлением функциональных возможностей программы количество тестов увеличивается. Запуск и поддержка такого количество тестов, а также анализ полученных результатов в ручном режиме – решение неоптимальное, поэтому с помощью языка программирования python версии 3.8 [8, 9] была разработана система регрессионного автоматизированного тестирования (далее система автотестов), с помощью которой в ежедневном режиме отслеживается регресс или прогресс качества сборок прочностного пакета CAE Fidesys и производится оценка набора прикладных задач по механике деформированных твёрдых тел для функционального тестирования программы.

Система автотестов включает в себя такие ключевые элементы как:

- программа распределенного тестирования,
- генераторы отчётов о состоянии сборки,
- локальный проект запуска авто-тестов,
- проект по созданию html-отчета,
- проверка цифровых подписей,
- служебные инструменты,
- анализаторы скриптов,
- программа гиперкуб,
- тег генератор.

С помощью системы автотестов пользователь может получить результаты по конкретным выборкам тестов, задав требуемые параметры на запуск системы. Все параметры системы автотестов записываются в пользовательских файлах с соответствующими комментариями и указаниями, ввиду чего для работы с системой знания и навыки программирования не требуются. Система автотестов развивается и дорабатывается с обновлением возможностей CAE Fidesys.

В CAE системах используются различные численные методы при решении задач [10, 11]. Так, помимо общеизвестного метода конечных элементов (МКЭ) [12, 13], есть ряд методов, обладающими дополнительными преимуществами, в частности метод спектральных элементов (МСЭ) [14-18]. Например, МСЭ позволяет без перестроения сетки повышать порядок элементов. Существуют исследования [19], показывающие, что в МСЭ вычислительная ошибка уменьшается экспоненциально по мере роста порядка аппроксимирующих многочленов (порядка элементов). Поскольку в CAE Fidesys наряду с МКЭ реализован МСЭ, одной из задач системы автотестов является проверка реализации МСЭ в CAE Fidesys на основе существующих тестов и оценки сходимости МСЭ CAE Fidesys к точному решению при повышении порядка элементов [20].

Упругие и упругопластические модели являются одним из центральных видов расчетов в инженерии. В статье [21] был проведен анализ возможностей МСЭ при численном решении задач пластичности с помощью пакета CAE Fidesys. В ходе данного исследования МСЭ показал свою эффективность в решении физически и геометрически нелинейных задач механики. Но в работе [21] не удалось определить характер уменьшения погрешностей при повышении порядка спектральных элементов, поскольку ввиду сложности постановок точные эталонные результаты неизвестны. Поэтому для текущего исследования были также выбраны задачи Ламе в упругой [22] и упругопластической постановках [23], имеющие точные аналитические решения. Задачи с аналитическими решениями обладают рядом преимуществ, описанных в [24-30], а также позволяют определить точность численного метода.

Для решения поставленной задачи существующая система автотестов была модифицирована таким образом, чтобы стал возможным запуск тестов на всех реализованных в CAE Fidesys порядках элементов (1-9). При этом исходная модель запускаемого теста не меняется за исключением изменения текущего порядка. Таким образом, при наличии одного функционального теста пользователь получает девять результатов расчета данного теста на каждом из возможных порядков элементов.

Результаты, описанные в текущем исследовании, могут быть полезны для развития применения численных методов в различных областях механики сплошной среды.

2. Аналитическое решение задачи о двухстороннем нагружении давлением упругой круглой цилиндрической трубы

Рассматривается задача о круглой упругой цилиндрической трубе с внутренним и внешним радиусами a, b соответственно, находящейся под воздействием внутреннего p_a и внешнего p_b давлений. Концы трубы закреплены так, что перемещения вдоль её оси отсутствуют, а перемещения в поперечном направлении ничем не стеснены (рис. 1).

Таким образом, имеет место плоско-деформированное состояние среды. Материал подчиняется закону Гука [22]

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{1}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, δ_{ij} – символ Кронекера, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – параметры Ламе, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

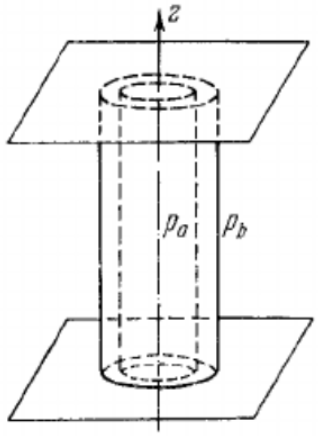

Рис. 1: Труба под действием внутреннего p_a и внешнего p_b давлений

Аналитические представления компонент тензора напряжений в полярных координатах записывается следующими функциями в зависимости от полярного радиуса r [22]

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}.$$

Также можно получить аналитическое описание деформированного состояния, но оно не является предметом изучения в данной работе.

3. Аналитическое решение задачи о нагружении давлением упругопластической круглой цилиндрической трубы

В качестве развития работы для исследования изменения погрешностей численного решения от изменения порядка при использовании спектральных упругопластических элементов CAE Fidesys рассмотрена задача Ламе, аналогичная представленной в п. 2, под действием давления только на внутренней поверхности. В дополнение к постановке п. 2 полагается, что пластическое течение характеризуется критерием пластичности Мизеса, упрочнение отсутствует.

Аналитическое решением получено Л.М. Качановым [23]. Граница c упругой и пластической зоны ($a \le c \le b$) определяется из решения уравнения

$$ln\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = \frac{p_a}{2\tau_s}, \tag{3}$$

где $\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$, σ_s – предел текучести при растяжении.

Тогда в пластической зоне $a \le r \le c$ компоненты тензора напряжений будут иметь вид

$$\sigma_{rr} = -p_a + 2\tau_s ln\frac{r}{a},\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2\tau_s. \tag{4}$$

В упругой зоне $c \le r \le b$ компоненты тензора напряжений согласно [23] равны

$$\sigma_{rr} = -\tilde{p}\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right),\ \sigma_{\varphi\varphi} = \tilde{p}\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right), \tag{5}$$

где $\tilde{p} = -\left(2\tau_s ln\frac{c}{a} - p_a\right)\frac{c^2}{b^2 - c^2}$.

4. Численные решения задачи Ламе в упругой и упругопластической постановках в CAE Fidesys. Анализ результатов

С учётом представленных в п. 2, 3 постановок задач при моделировании в CAE Fidesys для минимизации числа используемых элементов и недопущению движения тела как жесткого были рассмотрены в плоско-деформированной постановке задачи теории упругости и теории упругопластичности для четверти цилиндра четверть геометрии и добавлены условия симметрии.

Для решения задачи в упругой постановке использовались следующие безразмерные характеристики модели: $E = 200 \cdot 10^9,\ \nu = 0.3,\ \frac{b}{a} = 2,\ p_a = 1 \cdot 10^6,\ p_b = 0.5 \cdot 10^6$. С помощью автотестов осуществлены расчеты модели для порядков элементов 1-9. В случае упругопластической постановки использовались следующие безразмерные характеристики модели: $E = 200 \cdot 10^9,\ \nu = 0.3,\ \frac{b}{a} = 2,\ p_a = 1 \cdot 10^6,\ \sigma_2 = 24 \cdot 10^6$. Для моделирования была выбрана сетка из 200 элементов для упругой постановки и 1500 элементов для упругопластической. Для ускорения расчетов в упругопластической постановке с помощью автотестов осуществлены расчеты для порядков элементов 1-6.

Проведенные расчеты позволили получить численные зависимости окружного напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ для обеих постановок. Соответствующие аналитические представления записаны по формулам (2) и (3) – (5). Выявлено, что отличия численных зависимостей $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ для порядков 4 – 9 от аналитического для любого значения полярного радиуса не превышают сотой доли процента. Поэтому на рис. 2 и 3 представлены численные зависимости окружного напряжения для порядков 1 – 4 и аналитическая зависимость

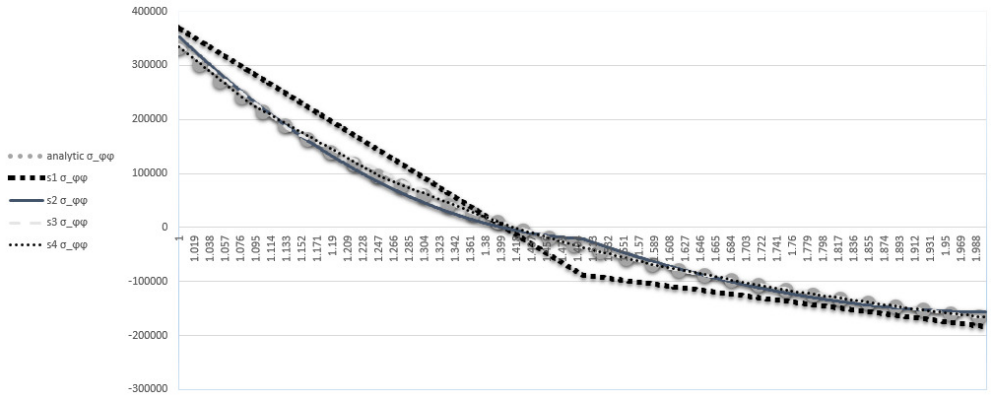

Рис. 2: Зависимости окружного напряжения от радиальной координаты $\frac{r}{a}$ при решении задачи для упругого материала: *analytic* $\sigma_\varphi\varphi$ – аналитическое решение (крупные круги), $s1\ \sigma_\varphi\varphi$ – $s4\ \sigma_\varphi\varphi$ – численное решение: $s1\ \sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на первом порядке (квадратный пунктир), $s2\ \sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на втором порядке (непрерывная линия), $s3\ \sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на третьем порядке (прерывистая линия), $s4\ \sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на четвертом порядке (мелкие круги)

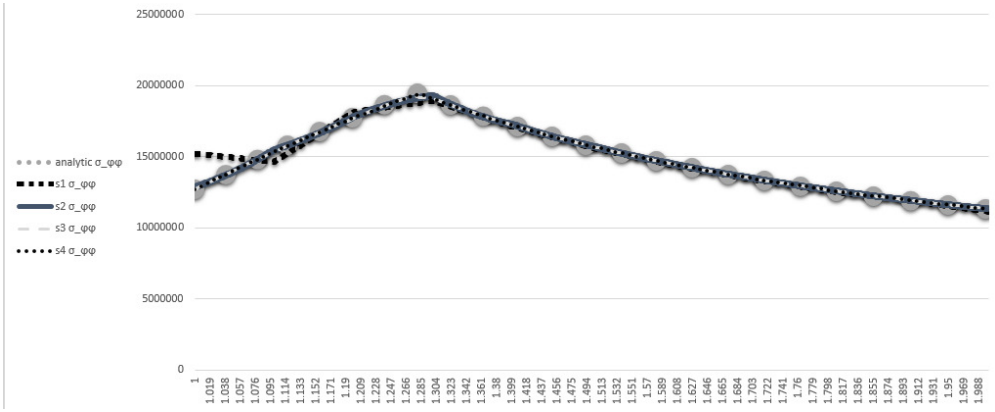

Рис. 3: Зависимости окружного напряжения от радиальной координаты $\frac{r}{a}$ при решении задачи для упругопластического материала: *analytic* $\sigma_\varphi\varphi$ – аналитическое решение (крупные круги), $s1$ $\sigma_\varphi\varphi$ – $s4$ $\sigma_\varphi\varphi$ – численное решение: $s1$ $\sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на первом порядке (квадратный пунктир), $s2$ $\sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на втором порядке (непрерывная линия), $s3$ $\sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на третьем порядке (прерывистая линия), $s4$ $\sigma_\varphi\varphi$ – численные значения на четвертом порядке (мелкие круги)

Из рис. 2 и 3 следует, что с повышением порядка погрешности относительно аналитического решения уменьшаются и уже для 3-го порядка в упругой постановке и для 2-го порядка в упругопластической постановке не превышают инженерной погрешности 5%.

Рассмотрим характер уменьшения погрешностей относительно эталонного результата для радиальной компоненты численного тензора напряжений $(\sigma_{numeric})_{rr}\ |_{r=a}$ на внутреннем радиусе в зависимости от порядка элемента, которые можно определить формулой

$$\varepsilon_{\sigma_{rr}}\ |_{r=a} = \left| \frac{(\sigma_{numeric})_{rr}\ |_{r=a} - (\sigma_{analytic})_{rr}\ |_{r=a}}{(\sigma_{analytic})_{rr}\ |_{r=a}} \right|.$$

Эталонное значение $(\sigma_{analytic})_{rr}\ |_{r=a} = p_a$, удовлетворяющее граничному условию, можно получить из выражения (1) для упругого и (4) для упругопластического случаев. На рис. 4 и 5 представлены соответствующие зависимости $ln\left(\varepsilon_{\sigma_{rr}}\ |_{r=a}\right)$

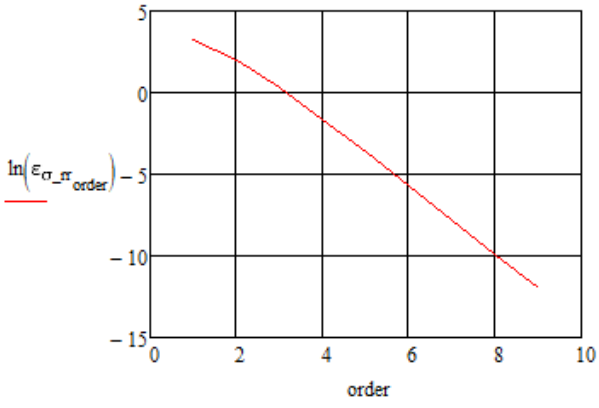

Рис. 4: Зависимость логарифма погрешности для радиального напряжения σ_{rr} на внутренней границе цилиндра от порядка элементов при решении задачи в упругой постановке

Из рис. 4 и 5 следует практически линейная зависимость уменьшения логарифма погрешностей для радиального напряжения. Таким образом, подтверждается, что в МСЭ CAE Fidesys

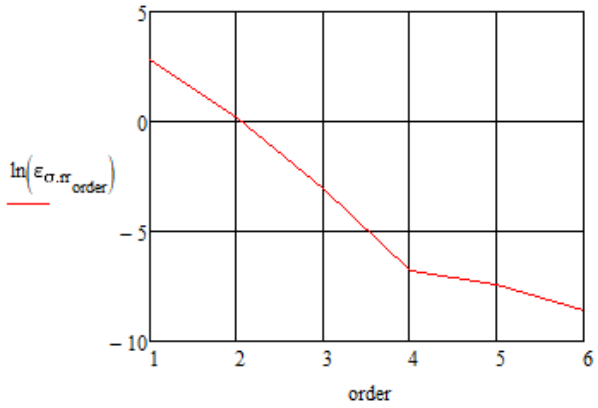

Рис. 5: Зависимость логарифма погрешности для радиального напряжения σ_{rr} на внутренней границе цилиндра от порядка элементов при решении задачи в упругопластической постановке

вычислительная ошибка уменьшается экспоненциально по мере роста порядка аппроксимирующих многочленов (порядка элементов) для рассматриваемых постановок задачи Ламе.

5. Заключение

В работе исследован характер сходимости численных решений, полученных с использованием CAE Fidesys, к точному решению на примере задачи Ламе в упругой и упругопластической постановках. Установлено, что повышение порядка элементов, расширенное в CAE Fidesys возможностью использования спектральных элементов, позволяет без перестроения пользователем конечно-элементной сетки получить экспоненциальное падение погрешностей. Использование спектральных элементов, начиная с третьего порядка, позволило для всей области модели получить погрешности, не превышающую инженерную точность 5%. Данный факт был подтвержден и в случае использования грубой конечно-элементной сетки при рассмотрении упругой постановки задачи Ламе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В. А., Зингерман К. М., Яковлев М. Я., Курденкова Е. О., Немтинова Д. В. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №2. С. 528-541. http://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-528-541

2. Вершинин А. В., Зингерман К. М., Коновалов Д. А., Левин В. Ан. Численное моделирование в CAE Fidesys процесса аддитивного производства на основе метода спектральных элементов на неконформных сетках // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовничего. 2019. Т. 2. С. 642-647.

3. Левин В. А. Теория многократного наложения больших деформаций, развитие для решения междисциплинарных задач. Пути ее реализации в пакете Фидесис для проведения прочностного анализа в новых отраслях промышленности // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, №3. С. 518-537. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-524-542

4. Kukushkin A. V., Konovalov D. A., Vershinin A. V., Levin V. A. Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158, № 2. P. 032022. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032022

5. Официальный сайт ООО «Фидесис». URL: https://www.cae-fidesys.com/documentation (дата обращения 15.09.2022)

6. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера. М.: ЛЕНАНД. 2015. 408 с.

7. Горбаченко И. М. Оценка качества программного обеспечения для создания систем тестирования // Фундаментальные исследования. 2013. № 6-4. С. 823-827.

8. Прохоренок Н. А. Python 3 и PyQt. Разработка приложений. СПб.: БХВ-Петербург. 2012. 704 с.

9. Маккини У. Python и анализ данных / пер. с анг. А. А. Слинкина. М.: ДМК Пресс. 2020. 540 с.

10. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Высш. Шк. 1976. 398 с.

11. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. М.: Высш. шк. 1994. 544 с.

12. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals 7th edition // Butterworth-Heinemann, Oxford, United Kingdom. 2013. P. 756. https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9

13. Fish J., Belutschko T. A First Course in Finite Elements // John Wiley & Sons Ltd, New York. 2007. P. 319. https://doi.org/10.1002/9780470510858.index

14. Vershinin A. V., Levin V. A., Kukushkin A. V., Konovalov D. A. Structural analysis of assemblies using non-conformal spectral element method // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 747. 2020. P. 012033. https://doi.org/10.1088/1757-899x/747/1/012033

15. Orel B., Perne A. Chebyshev-Fourier Spectral Methods for Nonperiodic Boundary Value Problems // Journal of Applied Mathematics. 2014. P. 1-10. https://doi.org/10.1155/2014/572694

16. Petrovskiy K. A., Vershinin A. V., Levin V. A. Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 158. 2016. P. 012077. https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012077

17. Karpenko V. S., Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M. Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 158.2016. P. 012049. https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012049

18. Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // Modelling and Simulation in Engineering. 2017. P. 1797561. https://doi.org/10.1155/2017/1797561

19. Solin P., Segeth K., Dolezel I. Higher-Order Finite Element Methods. Chapman & Hall/CRC Press. 2003. P. 408.

20. Козлов В.В, Комолова Е.Д., Филатова А.В. Использование системы автотестов CAE Fidesys для оценки сходимости метода спектральных элементов к точному решению при повышении порядка элементов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 20–26 апреля 2021 года. Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ. 2021. С. 114-115.

21. Kozlov V.V., Komolova E.D., Kartsev M.A., Filatova A.V. Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package // Continuum Mech. Thermodyn. 2022. https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8

22. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука. 1970. 568 с.

23. Kachanov L.M. Foundations of the Theory of Plasticity. North-Holland. Amsterdam. 1971. P. 482. https://doi.org/10.1007/978-0-387-33599-5_3

24. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 67-68. P. 244-249. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.024

25. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 100-101. P. 558-565. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.09.029

26. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Exact solution of the nonlinear bending problem for a composite beam containing a prestressed layer at large strains // Doklady Physics. 2015. Vol. 60. P. 24-27. https://doi.org/10.1134/S102833581501005X

27. Zingerman K.M., Levin V.A. Some qualitative effects in the exact solutions of the Lamé problem for large deformations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. P. 205-219. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.05.012

28. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains // European Journal of Mechanics, A/Solids. 2021. Vol. 88. P. 104237. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104237

29. Levin V.A., Podladchikov Y.Y., Zingerman K.M. An exact solution to the Lame problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations // European Journal of Mechanics, A/Solids. 2021. Vol. 90. P. 104345. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345

30. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Large bending strains in an orthotropic beam with a preliminarily stretched or compressed layer: Exact solution // Doklady Physics. 2016. Vol. 61. P. 407-411. https://dx.doi.org/10.1134/S1028335816080127

REFERENCES

1. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Yakovlev, M.Ya., Kurdenkova, E.O., Nemtinova, D.V. 2019, “On the numerical estimation of the effective characteristics of periodic cellular structures using beam and shell finite elements using CAE Fidesys“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 528-541. http://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-528-541

2. Vershinin, A. V., Zingerman, K. M., Konovalov, D. A., Levin, V. An. 2019, "Numerical modeling in CAE Fidesys of the additive manufacturing process based on the method of spectral elements on nonconformal grids", *Modern problems of mathematics and mechanics. Proceedings of the international conference dedicated to the 80th anniversary of Academician V. A. Sadovnichy*, vol. 2, pp. 642-647.

3. Levin, V. A. 2017, "The theory of multiple imposition of large deformations, development for solving interdisciplinary problems. Ways of its implementation in the Fidesys package for carrying out strength analysis in new industries", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, no. 3, pp. 518-537. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-524-542

4. Kukushkin, A. V., Konovalov, D. A., Vershinin, A. V., Levin, V. A. 2019, "Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes", *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1158, no. 2, pp. 032022. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032022

5. Official site of Fidesys LLC. URL: https://www.cae-fidesys.com/documentation (accessed 09/15/2022)

6. Morozov, E. M., Levin, V. A., Vershinin, A. V. 2015, *Prochnostnoy analiz: Fidesys v rukakh inzhenera* [Strength analysis: Fidesys in the hands of an engineer], LENAND, Moscow, Russia.

7. Gorbachenko, I. M. 2013, "Quality assessment of software for creating testing systems", *Fundamental research*, no. 6-4, pp. 823-827.

8. Prokhorenok, N. A. 2012, *Python 3 i PyQt. Razrabotka prilozheniy* [Python 3 and PyQt. Application Development], BHV-Petersburg, St. Petersburg, Russia.

9. Mackini, W. 2020, *Python i analiz dannykh* [Python and data analysis], Translated by Slinkina, A. A, DMK Press, Moscow, Russia.

10. Kalitkin, N. N. 1976, *Chislennyye metody* [Numerical methods], Higher. school, Moscow, Russia.

11. Amosov, A. A., Dubinsky, Yu. A., Kopchenov, N. V. 1994, *Vychislitel'nyye metody dlya inzhenerov: ucheb. posobiye* [Computational methods for engineers: textbook], Higher. school, Moscow, Russia.

12. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. 2013, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals 7th edition*, Butterworth-Heinemann, Oxford, United Kingdom. https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9

13. Fish, J., Belutschko, T. 2007, *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons Ltd, New York. https://doi.org/10.1002/9780470510858.index

14. Vershinin, A. V., Levin, V. A., Kukushkin, A. V., Konovalov, D. A. 2020, "Structural analysis of assemblies using non-conformal spectral element method", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, no.747, pp. 012033. https://doi.org/10.1088/1757-899x/747/1/012033

15. Orel, B., Perne, A. 2014, "Chebyshev-Fourier Spectral Methods for Nonperiodic Boundary Value Problems", *Journal of Applied Mathematics*, pp. 1-10. https://doi.org/10.1155/2014/572694

16. Petrovskiy, K. A., Vershinin, A. V., Levin, V. A. 2016, "Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, no. 158, pp. 012077. https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012077

17. Karpenko, V.S., Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M. 2016, "Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in FIDESYS industrial package", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, no. 158, pp. 012049. https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012049

18. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K., Levin, V. 2017, "The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes", *Modelling and Simulation in Engineering*, pp. 1797561. https://doi.org/10.1155/2017/1797561

19. Solin, P., Segeth, K., Dolezel, I. 2003, *Higher-Order Finite Element Methods*, Chapman & Hall/CRC Press, London, United Kingdom.

20. Kozlov, V.V., Komolova, E.D., Filatova, A.V. 2021, "Using the CAE Fidesys autotest system to assess the convergence of the spectral element method to the exact solution with increasing element order", *Lomonosov Readings. Scientific Conference. Section of mechanics. April 20-26, 2021. Abstracts of reports. Publishing House of Moscow State University*, pp. 114-115.

21. Kozlov, V.V., Komolova, E.D., Kartsev, M.A., Filatova, A.V. 2022, "Analysis of the capabilities of the spectral element method in solving physically and geometrically nonlinear problems of mechanics using the CAE Fidesys package", *Continuum Mech. Thermodyn.* https://doi.org/10.1007/s00161-022-01121-8

22. Sedov, L.I. 1970, *Mekhanika sploshnoy sredy, tom 2* [Continuum mechanics, volume 2], Nauka, Moscow, Russia.

23. Kachanov, L.M. 1971, *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland, Amsterdam. https://doi.org/10.1007/978-0-387-33599-5_3

24. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2015, "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 67-68, pp. 244-249. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.024

25. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2016, "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 100-101, pp. 558-565. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.09.029

26. Levin, V.,A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2015,"Exact solution of the nonlinear bending problem for a composite beam containing a prestressed layer at large strains", *Doklady Physics*, vol. 60, pp. 24-27. https://doi.org/10.1134/S102833581501005X

27. Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2012, "Some qualitative effects in the exact solutions of the Lamé problem for large deformations", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 76, pp. 205-219. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.05.012

28. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2021, "An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 88, pp. 104237. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104237

29. Levin, V.A., Podladchikov, Y.Y., Zingerman, K.M. 2021, "An exact solution to the Lame problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large

deformations“, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 90, pp. 104345. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345

30. Levin, V. A., Zubov, L. M., Zingerman, K. M. 2016, “Large bending strains in an orthotropic beam with a preliminarily stretched or compressed layer: Exact solution“, *Doklady Physics*, vol. 61, pp. 407-411. https://dx.doi.org/10.1134/S1028335816080127

Получено: 29.08.2022
Принято в печать: 8.12.2022