

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-251-261

Точное решение одной задачи о равновесии составной плиты с предварительно нагруженными частями из несжимаемых упругих материалов при наложении больших деформаций¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. Э. Белкин

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Белкин Антон Эдуардович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Аннотация

В статье для случая больших деформаций получено точное аналитическое решение задачи о напряжённо-деформированном состоянии композитной плиты, которая построена путём соединения двух предварительно деформированных слоев. Каждый слой получается путём распрямления цилиндрической панели, первоначально имеющей форму сектора полого круглого цилиндра. Цилиндры изготовлены из несжимаемого нелинейно-упругого материала — трелоарового, или неогуковского, материала. Оси цилиндров до деформации ортогональны. После соединения плита подвергается двухосному растяжению или сжатию в своей плоскости. Задача формулируется на основе теории наложения больших деформаций. Большую роль при решении задачи играет тот факт, что материалы панелей являются несжимаемыми. При решении задачи, а также при проведении численных исследований, исследуются нелинейные эффекты. Полученное решение может быть использовано для верификации программного обеспечения, которое предназначено для численного решения задач о напряженно-деформированном состоянии элементов конструкций, выполненных соединением предварительно деформированных частей. Для полученного решения задачи проведены численные исследования, результаты которых — зависимости напряжения на концах плит от различных параметров деформаций — представлены в работе.

Ключевые слова: предварительно деформированные слои, материал Трелоара, большие деформации, нелинейные эффекты.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. Э. Белкин. Точное решение одной задачи о равновесии составной плиты с предварительно нагруженными частями из несжимаемых упругих материалов при наложении больших деформаций // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 251–261.

¹Работа выполнена в МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621 в части, связанной с постановкой задачи, при поддержке РНФ (проект 22-11-00110) в части, связанной с разработкой метода и алгоритма решения задачи

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-251-261

Exact analytical solution for a problem of equilibrium of a composite plate containing prestressed parts made of incompressible elastic materials under superimposed finite strains

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. E. Belkin

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Belkin Anton Eduardovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: antonedurd2020@mail.ru

Abstract

In the article, for the case of large deformations, an exact analytical solution of the problem of the stress-strain state of a composite slab is presented, which is built by connecting two pre-deformed layers. Each layer is obtained by straightening a cylindrical panel, initially shaped like a sector of a hollow circular cylinder. The cylinders are made of incompressible non-linear-elastic materials — Treloar's, or neo-Hookean materials. The axes of cylinders before deformation are orthogonal. After connection, the plate is subjected to biaxial tension or compression in its plane. The problem is formulated on the basis of the theory of superimposed large strains. An important role in solving the problem is played by the fact that the plate material is incompressible. When solving the problem, as well as when conducting numerical studies, nonlinear effects are investigated. The resulting solution can be used to verify software that is designed to numerically solve problems of the stress-strain state of structural elements made by connecting pre-deformed parts. For the obtained solution of the problem, numerical studies were carried out, the results of which - the dependence of the stress at the ends of the plates on various deformation parameters - are presented in the work.

Keywords: predeformed layers, Treloar material, large deformations, nonlinear effects.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. E. Belkin, 2022, "Exact analytical solution for a problem of equilibrium of a composite plate containing prestressed parts made of incompressible elastic materials under superimposed finite strains", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 251–261.

1. Введение

Работа над изготовлением конструкций из различных упругих материалов зачастую включает в себя соединение элементов, которые были предварительно деформированы. При исследовании подобных явлений используется теория наложения больших деформаций [1,2]. В различных более ранних работах рассматривались задачи о напряжённо-деформированном

состоянии тел, изготовленных с помощью соединения (склейки) предварительно деформированных деталей [3–6]. Результаты подобных исследований могут быть использованы для верификации программ, предназначенных для анализа конструкций (образованных соединением предварительно деформированных деталей) и анализа деформаций слоистых горных пород (сформированных путем последовательного соединения слоев) с помощью метода конечных элементов [7–9]; для моделирования композитных плит и оболочек [10–14].

В данной работе исследуется поэтапная деформация пары цилиндрических плит из несжимаемого неогуковского материала [15–17]. Соответствующая задача об определении напряженно-деформированного состояния единой плиты, формируемой в процессе упомянутой деформации, решается точным аналитическим методом. Процесс решения детально описан в работе. В процессе деформации рассматриваемые плиты проходят через три различных состояния, или конфигурации – естественное (начальное), промежуточное и конечное. Таким образом, деформация включает два этапа – переход от начального состояния к промежуточному и от промежуточного к конечному.

В начальном состоянии каждая плита представляет собой сектор полого кругового цилиндра из несжимаемого неогуковского материала. До деформации оси цилиндров ортогональны по отношению друг к другу. При переходе к промежуточному состоянию цилиндрические плиты выпрямляются и соединяются, образуя единую панель. При переходе к конечному состоянию соединённая панель подвергается растяжению-сжатию в двух направлениях. Более подробная информация об этапах деформации представлена ниже, при постановке задачи.

В работе исследуются нелинейные эффекты, возникающие в процессе описываемой деформации. Одна из задач, которые ставятся в работе — выявить наличие и проанализировать характер этих нелинейных эффектов.

2. Постановка задачи

Рассматривается пара цилиндрических панелей, каждая из которых является изначально ненапряжённым сектором полого кругового цилиндра. Каждая панель изготовлена из несжимаемого неогуковского материала. Материальные константы, характеризующие материал первой и второй панели, обозначим соответственно μ_1 и μ_2 . Оси цилиндров, секторами которого являются панели, ортогональны. Для каждой панели вводятся цилиндрические координаты – для верхней панели (ρ, θ, ξ) , для нижней же (r, φ, ζ) по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi, & y_1 &= r \sin \varphi, & z_1 &= \zeta, \\ x_2 &= \rho \sin \theta, & y_2 &= \xi, & z_2 &= \rho \cos \theta, \end{aligned}$$

где $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ — координаты частиц панелей в начальном состоянии в декартовой системе координат.

Далее выполняется выпрямление (разгибание) ранее описанных цилиндрических панелей и соединение их в плоскости x . В результате формируется составная предварительно напряжённая прямоугольная плита, которая находится в промежуточном состоянии. Плита состоит из двух слоёв. Деформация выпрямления определяется следующими формулами [3]:

$$\begin{aligned} x &= f_r(r), & y &= \tau_\varphi \varphi, & z &= \alpha_\zeta \zeta, \\ x &= f_\rho^*(\rho), & y &= \alpha_\xi \xi, & z &= \tau_\theta \theta, \end{aligned}$$

где x, y, z — декартовы координаты частиц составной плиты в промежуточном состоянии; $\tau_\varphi, \alpha_\zeta, \tau_\theta, \alpha_\xi$ — постоянные; f_r, f_ρ^* — неизвестные функции.

После перехода составной плиты в промежуточное состояние происходит второй этап деформации, в результате которого она переходит в конечное состояние. Второй этап деформации заключается в растяжении-сжатии составной плиты с помощью сил, распределённых по

граням плиты $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Силы параллельны соответственно осям y и z . Второй этап деформации описывается следующими формулами:

$$X = F(x), \quad Y = \beta_y y, \quad Z = \beta_z z,$$

где X, Y, Z – координаты частиц составной плиты в конечном состоянии в декартовой системе координат; β_y, β_z – заданные характеристики второго этапа деформации (постоянные); F – неизвестная функция, характеризующая деформацию в направлении, перпендикулярном к плоскости плиты.

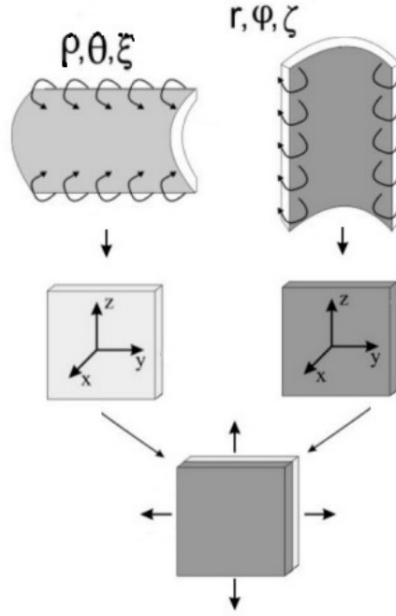


Рис. 1: Иллюстрация к геометрии задачи

Требуется определить поле напряжений после завершения как промежуточного, так и конечного этапов деформации.

3. Первый этап деформации: выпрямление цилиндрических плит

Определяющее соотношение для упругого несжимаемого неогукковского материала имеет вид [15,16]

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \mu_i \mathbf{F}, \quad (1)$$

где $\mathbf{T}$ – тензор истинных напряжений; p – множитель Лагранжа (давление); $\mathbf{E}$ – единичный тензор; μ_i – материальная постоянная i -ой плиты ($i = 1$ – верхняя, $i = 2$ – нижняя); $\mathbf{F} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}$ – мера деформации Фингера; $\mathbf{P}$ – градиент полной деформации, характеризующий деформацию при переходе из начального в конечное состояние: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{init.}} \cdot \mathbf{P}_{\text{add.}}$.

Деформация выпрямления цилиндрических панелей описывается формулами

$$\begin{aligned} x &= f_r(r), & y &= \tau_\varphi \varphi, & z &= \alpha_\zeta \zeta \\ x &= f_\rho^*(\rho), & y &= \alpha_\xi \xi, & z &= \tau_\theta \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Каждой из панелей при переходе от естественной отсчётной конфигурации к промежуточной соответствует градиент начальной деформации. Для первой и второй панели это, соответственно, тензоры $\mathbf{P}_{\text{init.}}(r)$ и $\mathbf{P}_{\text{init.}}^*(\rho)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\text{init.}}(r) &= \frac{dx(r)}{dr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 + \frac{\tau_\varphi}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 + \alpha_\zeta \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{P}_{\text{init.}}^*(\rho) &= \frac{dx(\rho)}{d\rho} \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{i}_1 + \frac{\tau_\theta}{\rho} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{i}_3 + \alpha_\xi \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2\end{aligned}\quad (3)$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi$, $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi$, $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}_3 \cos \theta + \mathbf{i}_1 \sin \theta$, $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_3 \sin \theta + \mathbf{i}_1 \cos \theta$ — единичные векторы цилиндрических систем координат, связанных с первой и второй панелями; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — единичные векторы координатных осей x, y, z соответственно.

Так как материалы, из которых состоят панели, являются несжимаемыми, то должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{P} &= 1 \\ \det \mathbf{P}^* &= 1\end{aligned}\quad (4)$$

Соотношения (4) позволяют определить функции $f_r(r)$ и $f_\rho^*(\rho)$. Формулы (4), учитывая соотношения (3), можно переписать в виде

$$\alpha_\zeta \tau_\varphi f_r'(r) = r, \quad \alpha_\xi \tau_\theta (f_\rho^*)'(\rho) = \rho. \quad (5)$$

Решения уравнений (5) должны удовлетворять условиям $f_r(\rho_1) = 0$, $f_r(r_0) = f_\rho^*(\rho_0)$. Последнее условие означает, что выпрямленные панели соединяются без зазора и образуют двухслойную плиту.

Из (2) и (5) можно определить зависимость между x и r (для нижней панели соответственно), а также x и ρ (для верхней панели соответственно):

$$f_r(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha_\zeta \tau_\varphi} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}, \quad f_\rho^*(\rho) = \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}.$$

Последнюю формулу можно переписать в более удобном виде:

$$x(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha_\zeta \tau_\varphi} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}, \quad x(\rho) = \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta}. \quad (6)$$

4. Второй этап деформации: растяжение-сжатие двухслойной плиты

Далее рассматривается второй этап деформации. Для этого решается задача о растяжении-сжатии в двух направлениях предварительно напряжённой двухслойной плиты силами, распределёнными по её кромкам $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Переход от промежуточного состояния к конечному состоянию характеризуется следующими соотношениями [3]:

$$\begin{aligned}X &= F(x), \quad Y = \beta_y y, \quad Z = \beta_z z, \\ \beta_y &= \text{const}, \quad \beta_z = \text{const}.\end{aligned}\quad (7)$$

Градиент дополнительной деформации при переходе от промежуточного к конечному состоянию для соединённой плиты имеет вид

$$\mathbf{P}_{\text{add.}} = \frac{dF(x)}{dx} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \beta_y \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \beta_z \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

Для того, чтобы переписать последнюю формулу в более удобном виде для дальнейших вычислений, выполним замену независимой переменной x с учетом (2). В итоге получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\text{add.}}(r) &= \frac{1}{x'(r)} \frac{dX(r)}{dr} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \beta_y \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \beta_z \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{P}_{\text{add.}}(\rho) &= \frac{1}{x'(\rho)} \frac{dX(\rho)}{d\rho} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \beta_y \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \beta_z \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (8)$$

Так как материалы, из которых состоят плиты, являются несжимаемыми, то должно выполняться следующее соотношение:

$$\det \mathbf{P}_{\text{add.}} = 1 \quad (9)$$

Соотношение (9) позволяют определить функции $X(r)$ и $X(\rho)$. Формулу (9), учитывая соотношения (6) и (8), можно переписать как

$$\begin{aligned} \beta_y \beta_z \frac{dX(r)}{dr} &= \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha_\zeta \tau_\varphi} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta} \\ \beta_y \beta_z \frac{dX(\rho)}{d\rho} &= \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\alpha_\xi \tau_\theta} \end{aligned} \quad (10)$$

Решения уравнений (10) должны удовлетворять условиям $X(\rho_1) = 0$, $X(r_0) = X(\rho_0)$. Зависимость между X и r (для нижней панели соответственно), а также X и ρ (для верхней панели соответственно) получаем в виде:

$$F(r) = \frac{3\alpha_\zeta \tau_\varphi (\rho_0^2 - \rho_1^2)(r - r_0) + \alpha_\zeta \tau_\varphi (\rho_0^3 + 2\rho_1^3 - 3\rho_0 \rho_1^2) + \alpha_\xi \tau_\theta (r^3 + 2r_0^3 - 3rr_0^2)}{6\beta_y \beta_z \alpha_\zeta \alpha_\xi \tau_\varphi \tau_\theta} \quad (11)$$

$$F(\rho) = \frac{\rho^3 - 3\rho_1 \rho + 2\rho_1^3}{6\beta_2 \beta_3 \alpha_2 \tau_2}$$

Используя (1) и условие $T_{11} = 0$ в конечном состоянии [3], можно выразить давление p , подставляя вместо $X(r)$ и $X(\rho)$ полученные выражения (11):

$$\begin{aligned} p(r) &= \mu_1 \left(\frac{dX(r)}{dr} \right)^2 \\ p(\rho) &= \mu_2 \left(\frac{dX(\rho)}{d\rho} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (1) и (12) позволяют вычислить все компоненты тензора истинных напряжений $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned} T_{11} &= 0, \\ T_{22} &= -p + \mu_i \beta_y, \\ T_{33} &= -p + \mu_i \beta_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Недиагональные компоненты этого тензора равны нулю.

5. Численные исследования

Описанное выше решение задачи реализовано программно. Проведены численные исследования. Далее приводятся их входные данные.

При численных исследованиях использовались следующие соотношения между геометрическими характеристиками цилиндрических панелей в недеформированном состоянии:

$$\rho_1/r_1 = 1, 3, \rho_0/r_1 = 1, r_0/r_1 = 1, 2.$$

Считалось, что константы материала одинаковы для обоих слоёв, то есть $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

На рис. 2–5 представлены зависимости истинного напряжения T_{22} на границах первого слоя от различных характеристик деформаций при различных значениях параметра β_z . Напряжение отнесено к модулю μ . Использовались следующие значения параметров, характеризующих начальную и дополнительную деформацию:

$$\begin{aligned} \alpha_\zeta &= \alpha_\xi = 1, 1 \\ \beta_y &= 1, 2 \\ \tau_\varphi &= \tau_\theta = 0, 8r_1 \end{aligned} \quad (14)$$

На каждом из приведённых графиков (рис. 2–5) аргументом функции, изображённой на графике, является один из параметров, заданных в (14). Остальные параметры принимают значения, указанные в (14).

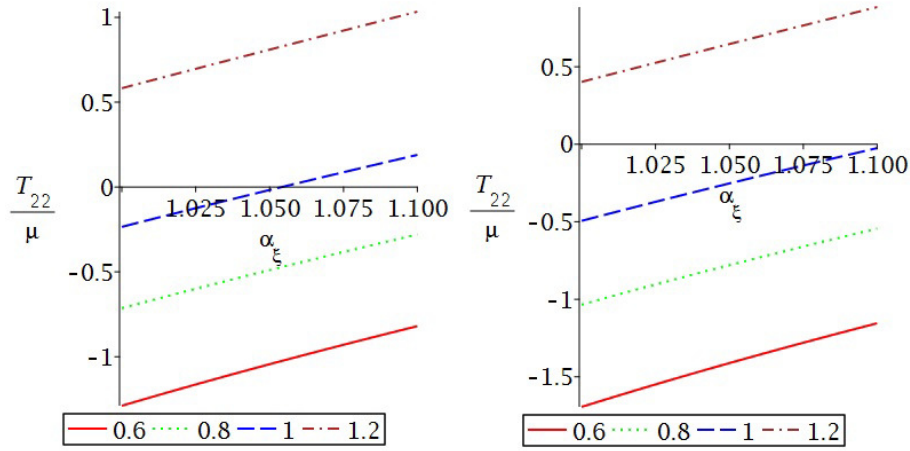


Рис. 2: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра α_ξ при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_y

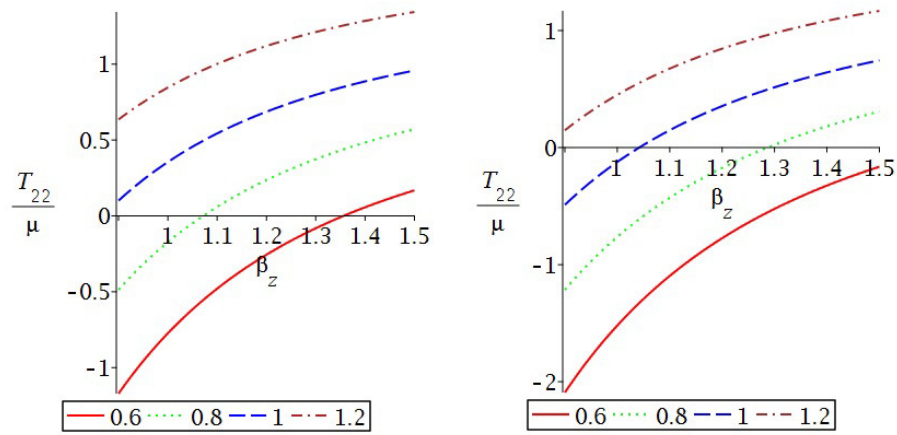


Рис. 3: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра β_z при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_y

Из рис. 3 и рис. 5 можно видеть, что зависимости напряжения T_{22} от параметров β_z и τ_θ , характеризующих деформацию, существенно нелинейны.

6. Заключение

В рамках теории наложения больших деформаций разработана математическая модель, описывающая выпрямление, соединение и совместное растяжение или сжатие двух цилиндрических панелей, оси которых взаимно ортогональны. Получено для несжимаемого нелинейно-упругого материала точное аналитическое решение задачи о равновесии составной плиты, полученной в результате соединения распрямленных панелей и подвергнутой дополнительному растяжению или сжатию. Выявлены нелинейные эффекты. Полученное решение задачи может

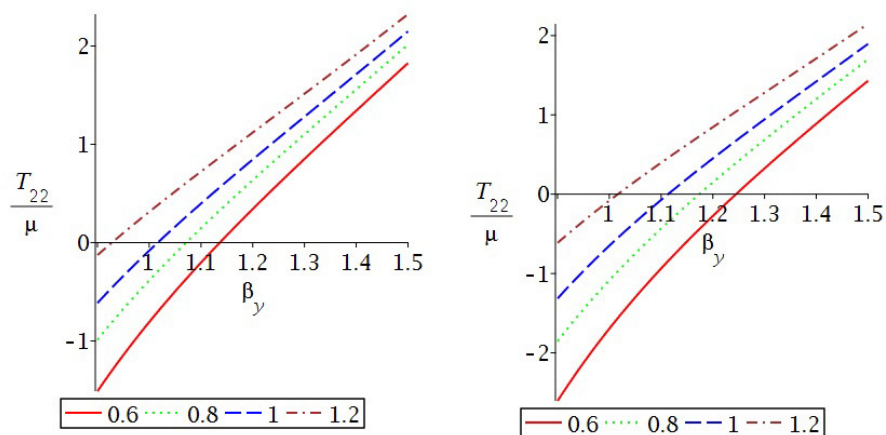


Рис. 4: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра β_y при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_z

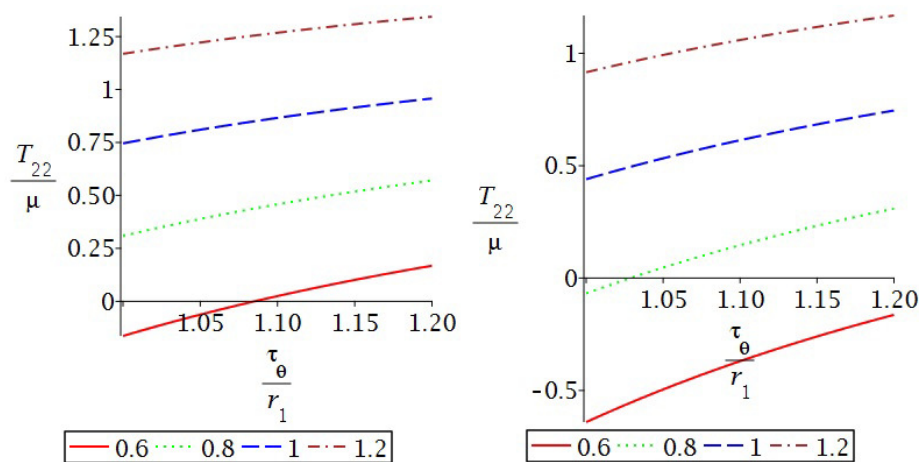


Рис. 5: Зависимость $\frac{T_{22}}{\mu}$ от параметра τ_θ при $\rho = \rho_0$ (слева), $\rho = \rho_1$ (справа), для различных β_y

быть использовано для верификации программного обеспечения, предназначенного для численного решения задач о напряженно-деформированном состоянии элементов конструкций, изготовленных путем соединения предварительно деформированных частей. В дальнейшем решение задачи, рассмотренной в данной работе, может быть обобщено на случай несжимаемых микрополярных материалов [18,19].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin V.A., Tarasiev G.S. Superposition of large elastic deformations in the space of final-states // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1980. V. 251, pp. 63–66.
2. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. V. 73, Issue 6, pp. 710–721.

3. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2021. V. 88, paper 104237.
4. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. V. 51, pp. 1403–1409.
5. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains // *International Journal of Engineering Science*. 2018. V. 133, pp. 47–59.
6. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 67–68, pp. 244–249.
7. Абрамов С.М., Амелькин С.А., Ключев Л.В., Крапивин К.Ю., Ножницкий Ю.А., Серветник А.Н., Чичковский А.А. Использование программы Фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске // *Чебышевский Сборник*. Т. 18, № 3. С. 15–27.
8. Коновалов Д. А., Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // *Чебышевский Сборник*. Т. 18, № 3. С. 316–329.
9. Вершинин А.В., Сабитов Д.И., Ишбулатов С.Ю., Мясников А.В. Гидрогеомеханическое моделирование гидрогеомеханических пластовых процессов путем внешнего сопряжения специализированных вычислительных пакетов и универсальной CAE Fidesys // *Чебышевский Сборник*. Т. 18, № 3. С. 154–186.
10. Noor, A.K., Burton, W.S.: Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates // *Applied Mechanics Review*. 1989. V. 41, pp. 1–18.
11. Carrera, E.: "Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells". ARCO 9, pp. 87–140 (2002).
12. Kulikov G.M. Computational models for multilayered composite shells with application to tires // *Tire Science and Technology*. 1996. V. 24, No. 1, pp. 11–38.
13. Badriev I. B., Makarov M. V., Paimuhin V. N. Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. V. 158, paper 012011.
14. Makarov M. V., Badriev I. B., Buyanov V. Yu., Smirnova E. V. On solving the geometrically nonlinear and linear problems of transverse bending of a hinged fixing sandwich plate with transversally soft core // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1158, No. 3, paper 032026.
15. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
16. Treloar, L.R.G.: "The Physics of Rubber Elasticity". Oxford University Press (1975)
17. Mooney, M.: "A theory of large elastic deformation". *Journal of Applied Physics*. 11, 582 (1940) <https://doi.org/10.1063/1.1712836>

18. Zubov L.M. Universal deformations of micropolar isotropic elastic solids // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. V. 21, pp. 152–167.
19. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*. Springer. Heidelberg. 2013.

REFERENCES

1. Levin, V.A., Tarasiev, G.S. “Superposition of large elastic deformations in the space of final-states”. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. **251** (1980), 63–66.
2. Zingerman, K.M., Levin, V.A. “Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution”. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **73:6** (2009), 710–721.
3. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. “An exact solution to the problem of biaxial loading of a micropolar elastic plate made by joining two prestrained arc-shaped layers under large strains”. *European Journal of Mechanics — A/Solids*, **88** (2021), 104237.
4. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. “The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains”. *International Journal of Solids and Structures*, **51** (2014), 1403–1409.
5. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. “Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains. *International Journal of Engineering Science*”, **133** (2018), 47–59.
6. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. “An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains”, *International Journal of Solids and Structures*. **67–68** (2015), 244–249.
7. Abramov, S.M., Amel’kin S.A., Kljuev, L.V., Krapivin, K.J., Nozhnickij, J.A., Servetnik, A.N., Chichkovskij, A.A. “Modeling the development of large plastic deformations in a rotating disk in the Fidesys program”. *Chebyshevskii Sbornik*. **18:3** (2017), 15–27. (In Russ.)
8. Konovalov, D. A., Yakovlev, M. Ya. “Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys”. *Chebyshevskii Sbornik*. **18:3** (2017), 316–329. (In Russ.)
9. Vershinin, A. V., Sabitov, D. I., Ishbulatov, S. Y., Myasnikov, A. V. “Hydrogeomechanical modeling of reservoir by external coupling of specialized computational software and universal CAE Fidesys”. *Chebyshevskii Sbornik*. **18:3** (2017), 154–186. (In Russ.)
10. Noor, A.K., Burton, W.S. “Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates”. *Applied Mechanics Review*. **41** (1989), 1–18.
11. Carrera, E. “Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells”. *ARCO* 9, pp. 87–140 (2002).
12. Kulikov, G.M. “Computational models for multilayered composite shells with application to tires”. *Tire Science and Technology*. **24:1** (1996), 11–38.
13. Badriev, I. B., Makarov, M. V., Paimuhin, V. N. “Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies”. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. **158** (2016), 012011.

14. Makarov, M. V., Badriev, I. B., Buyanov, V. Yu., Smirnova, E. V. "On solving the geometrically nonlinear and linear problems of transverse bending of a hinged fixing sandwich plate with transversally soft core". *Journal of Physics: Conference Series*, **1158**:3 (2019), 032026.
15. Lurie, A.I. "Non-linear theory of elasticity". Nauka, Moscow, 1980.
16. Treloar, L.R.G. "The Physics of Rubber Elasticity". Oxford University Press, 1975.
17. Mooney, M. "A theory of large elastic deformation". *Journal of Applied Physics*. **11**, (1940), 582
<https://doi.org/10.1063/1.1712836>
18. Zubov, L.M. "Universal deformations of micropolar isotropic elastic solids". *Mathematics and Mechanics of Solids*. **21** (2016), 152–167.
19. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*. Springer. Heidelberg. 2013.

Получено: 26.07.2022

Принято в печать: 8.12.2022