

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232

**Сопоставление приближений решения задачи об изгибе
линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом
структурных функций¹**

Л. А. Кабанова

Кабанова Любовь Александровна — младший научный сотрудник, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: liubov.kabanova@math.msu.ru

Аннотация

В работе рассматриваются четыре приближения решения трехмерной задачи теории упругости о нагружении неоднородной свободно опертой по контуру прямоугольной пластины, полученные методом структурных функций первого и второго порядка с использованием приближенных решений сопутствующей задачи. Метод структурных функций представляет собой способ приближенного вычисления решения задачи теории упругости для неоднородного тела (называемого исходным) по решению аналогичной с точки зрения нагрузок и граничных условий задачи теории упругости для однородного тела (называемого сопутствующим); это вычисление реализуется путем суммирования производных деформаций в сопутствующем теле с весовыми коэффициентами, называемыми структурными функциями; в статье приводится краткое описание и основные соотношения метода структурных функций. Решение сопутствующей задачи — о нагружении однородной пластины — строится в рамках известных приближений, основанных на использовании гипотез Кирхгофа и типа Тимошенко. Последовательно получены структурные функции первого и второго порядка для исходной пластины. Приводятся явные формулы для приближенного вычисления перемещений в исходном теле по методу структурных функций первого и второго порядка, основанные на обоих рассмотренных приближениях решения сопутствующей задачи. Для набора тестовых пластин различной конфигурации (двухслойной, трехслойной асимметричной по толщине, трехслойной симметричной по толщине) приближения, построенные по методу структурных функций, сопоставляются между собой и с известным решением задачи об изгибе многослойной пластины в трехмерной постановке; приближения, основанные на решении сопутствующей задачи в рамках гипотезы типа Тимошенко, в приведенных сопоставлениях демонстрируют удовлетворительное совпадение с известным решением.

Ключевые слова: механика композитов, слоистые пластины, метод структурных функций.

Библиография: 39 названий.

Для цитирования:

Л. А. Кабанова. Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 211–232.

¹Исследование выполнено при поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232

**Comparison of structural functions method approximations
of the solution of a linear elastic layered plate bending problem**

L. A. Kabanova

Kabanova Lyubov Alexandrovna — junior researcher, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: liubov.kabanova@math.msu.ru

Abstract

This paper comes to compare four different approximations of the solution to a layered linear elastic plate bending problem, obtained by the structural functions method. This method is in representation of a nonhomogeneous body displacement field as a weighted sum of spatial derivatives of the so-called concomitant body displacements, the weighting coefficients are named structural functions of the nonhomogeneous body; the concomitant body is a homogeneous one, subjected to the same loadings and boundary conditions, as the nonhomogeneous body; we come through the basic steps of structural functions method in this paper. For the concomitant plate displacements, we consider two well-known approximations: the classical plate theory and the first-order shear deformation theory. We obtain the first- and the second-order structural functions of a layered plate. We derive direct formulae for the first- and second-order structural functions method approximations of the nonhomogeneous plate displacements, using both concomitant plate displacements approximations. For a set of sample plates, we compute the obtained structural functions method approximations, and compare the computation results with a known Pagano solution to the nonhomogeneous plate bending problem. The approximation, based on the first-order shear deformation theory approach to the concomitant body displacements computation, gives an acceptable result in the considered cases.

Keywords: composite mechanics, layered plates, structural functions method.

Bibliography: 39 titles.

For citation:

L. A. Kabanova, 2022, “Comparison of structural functions method approximations of the solution of a linear elastic layered plate bending problem”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 211–232.

Введение

Данная статья посвящена построению приближений решения статической задачи теории упругости о нагружении неоднородной прямоугольной пластины, шарнирно опертой по контуру, методом структурных функций (МСФ), и численному сопоставлению построенных МСФ-приближений – как между собой, так и с известным решением той же задачи в трехмерной постановке.

МСФ был построен в работах В. И. Горбачева [1], как способ приближённого вычисления решения задачи теории упругости для неоднородного тела. В основе метода лежит интегральная формула [2], устанавливающая взаимосвязь решений задач теории упругости, поставленных для двух тел, обладающих разными упругими свойствами, но идентичной геометрией,

подвергнутых одинаковым объемным нагрузкам и граничным условиям. Интегральные формулы были построены также и для динамической задачи [3], связанной задачи термоупругости [4], электромагнитоупругости [5], и ряда классических задач уравнений математической физики [6]. Непосредственное применение интегральных формул в некоторых случаях может быть затруднительным, так как требует вычисления фундаментального решения для неоднородного тела; поэтому был разработан МСФ, основанный на соотношении, представляющем собой приближение интегральной формулы; для задачи теории упругости МСФ позволяет приближенно вычислить компоненты вектора перемещений неоднородного тела (называемого исходным) в виде частичной суммы ряда по производным компонент тензора деформаций однородного тела идентичной геометрии, подвергнутого идентичной системе нагрузок (называемого сопутствующим). Варианты МСФ были построены для одномерных и двумерных задач теории упругости ([7], [8]), для связанной задачи термоупругости [9]; МСФ был применен к анализу задачи об изгибе неоднородной плиты [10], к задачам об изгибе полосы [11]; в работе [12] МСФ был применен к задаче определения эффективных характеристик композиционного материала со сферическими включениями и численно сопоставлен с результатами применения метода Мори-Танака к этой же задаче.

В данной работе МСФ применяется для приближенного отыскания перемещений и напряжений в неоднородной слоистой пластине, свойства которой зависят от поперечной координаты, следующим образом: строятся два известных приближения решения сопутствующей задачи, определяются структурные функции (СФ) первого и второго порядка исходного тела, строятся МСФ-приближения первого и второго порядка решения исходной задачи, основанные на приближениях решения сопутствующей задачи. Таким образом, исходной в настоящей работе является задача о квазистатическом нагружении слоистой прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластины, которая многократно исследовалась как численно, так и аналитически. Сопутствующую – задачу о нагружении однородной прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластины – можно также назвать одной из наиболее изученных задач теории упругости, в качестве способов построения решения сопутствующей задачи выбраны известные приближения – по гипотезе Кирхгофа-Лява и по теории пластин первого порядка.

В силу широкого распространения пластин, как конструктивных элементов технических конструкций, разработано большое количество подходов к моделированию упругого и термоупругого поведения пластин, в том числе – неоднородных, изготовленных из материалов различных типов анизотропии. Одним из первых подходов к моделированию однородных изотропных пластин можно назвать теорию, основанную на кинематической гипотезе Кирхгофа [13] в некоторых источниках называемую классической [14]; она имеет ряд противоречий, первый порядок точности по поперечной координате и нулевой – по поперечной деформации [15], в связи с чем в XX веке активно разрабатывались более точные теории, особенно отметим варианты теорий первого порядка по поперечной деформации, в том числе – основанные на кинематической гипотезе типа Тимошенко [16], [17] [18]; общие подходы к построению теорий пластин [19], [20]. Упомянутые модели, а также модели более высоких порядков точности – модель третьего порядка по поперечным деформациям [14], высших порядков [21] – были также обобщены на случаи неоднородных материалов (например, [22]), функционально-градиентных ([23], [24]), линейно-вязкоупругих материалов [25]. Активное развитие получило и направление, связанное с уточнённым моделированием упругого поведения многослойных пластин [26], [27], [28], [29], [30], [31]. Необходимо также упомянуть и работы, посвященные вопросам классификации теорий пластин и качественного и количественного сравнения теорий пластин [15], [22], [32], как между собой, так и с численными или аналитическими решениями модельных задач в трехмерной постановке. В силу наличия аналитического решения в трехмерной постановке [33], а также относительной простоты построения решений приближенных в качестве модельной во многих работах (например, [22], [32]) выбрана задача о нагружении шарнирно опертой по контуру прямоугольной пластины. В работах [34], [35] начала XXI века приво-

дится классификация возможных подходов к моделированию упругого поведения пластин, впоследствии [36] обобщенная и на вязкоупругий случай, а также предложены критерии качества, согласно которым можно анализировать арсенал качественных свойств, описываемых той или иной моделью. Среди представленных в работе [35] критериев качества подчеркнем способность корректно моделировать зигзагообразную зависимость перемещений от поперечной координаты, выполнять условие идеального контакта слоёв пластины, и независимость количества переменных в модели от числа слоёв.

Цель данной работы – построить МСФ-приближения решения задачи о нагружении не обязательно симметричной по толщине линейно-упругой ортотропной слоистой пластины; привести их явный вид, задействуя простейшие приближения решения сопутствующей задачи – по теории Кирхгофа и теории пластин первого порядка (основанной на гипотезе типа Тимошенко), отметить, удовлетворяют ли построенные МСФ-приближения критериям качества, приведенным выше, и сопоставить их численно с решением исходной задачи, полученным по методу Пагано [33]. При численном сопоставлении исследовать отклонения МСФ-приближений от решения по методу Пагано. Заметим, что выбранные приближения решения сопутствующей задачи имеют заведомо невысокий порядок точности – ранее, в работе [39], построено МСФ-приближение решения аналогичной задачи на базе решения сопутствующей задачи в трехмерной постановке, продемонстрировавшее хорошее совпадение с контрольным, однако интерес представляет также использование МСФ в сочетании с менее точными приближениями решения сопутствующей задачи.

В работе используется тензорная нотация, по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование (от 1 до 3 – по малым и от 1 до 2 – по большим индексам), по греческим индексам суммирование не производится; индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате, $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

1. Метод структурных функций

МСФ разработан [1] для построения приближенного решения статической задачи теории упругости в перемещениях, поставленной для твёрдого тела произвольной неоднородности, которую в общем виде можно записать [37], как

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} + X_i(\vec{x}) &= 0, \\ u_i|_{\Sigma_a} &= u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i – компоненты вектора перемещений, $C_{ijkl}(\vec{x})$ – компоненты тензора упругих модулей неоднородного тела, произвольные функции пространственных координат; $X_i(\vec{x})$ – объёмные силы. Компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в неоднородном теле всюду далее будем обозначать σ_{ij} и ε_{ij} соответственно, они связаны между собой определяющими соотношениями

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{kl}(\vec{x}), \quad \varepsilon_{ij}(\vec{x}) = J_{ijkl}(\vec{x})\sigma_{kl}(\vec{x}), \quad (2)$$

тензоры упругих модулей C_{ijkl} и податливостей J_{ijkl} взаимно обратны; их компоненты – вообще говоря, произвольные функции пространственных координат, удовлетворяющие минимальным термодинамическим ограничениям [37]. Неоднородное тело и задачу (1) будем далее называть исходным телом и исходной задачей (ИЗ).

При помощи МСФ решение задачи (1) вычисляется в виде суммы, полученной в работе [2]

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikl i_1 \dots i_q}(\vec{x}) e_{kl, i_1 \dots i_q}(\vec{x}), \quad (3)$$

где v_i и e_{kl} – компоненты вектора перемещений и тензора малых деформаций в так называемом сопутствующем теле – твердом теле аналогичной ИЗ геометрии, подвергнутом воздействию той же системы объёмных и поверхностных сил, с теми же граничными условиями, что и в ИЗ. Сопутствующее тело предполагается однородным, и задача теории упругости для него (сопутствующая задача, далее СЗ) имеет вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x}) + X_i(\vec{x}) &= 0, \\ v_i \Big|_{\Sigma_u} &= u_i^0, \quad s_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь C_{ijkl}^0 – компоненты тензора упругих модулей сопутствующего тела, они подразумеваются независимыми от координат, компоненты тензора напряжений в сопутствующем теле здесь и далее обозначаем s_{kl} . Таким образом, соотношение (3) задаёт представление решения ИЗ в виде ряда по производным решения СЗ (с учётом того, что $e_{kl,i_1 \dots i_q} = (v_{k,i_1 \dots i_q} + v_{l,i_1 \dots i_q})/2$). Формула (3) получена в работе [2], как следствие интегральной формулы – аналитического выражения, устанавливающего связь решений ИЗ и СЗ.

Коэффициенты представления (3) называют структурными функциями (N -функциями; далее СФ); для СФ выполнены условия симметрии по второму и третьему индексу: $N_{ikl i_1 \dots i_q} = N_{ilki_1 \dots i_q}$, а также внутри группы индексов $i_1 \dots i_q$. В работе [2] получены выражения, связывающие СФ с компонентами тензора Грина ИЗ, однако поскольку практическое вычисление тензора Грина может быть затруднительным, позднее построена рекуррентная система уравнений в частных производных для отыскания СФ (процедура её получения приведена, например, в статье [10]) :

$$\begin{aligned} [C_{ijkl} N_{kmn,l} + C_{ijmn}]_{,j} &= 0, \\ [C_{ijmn} N_{mkl i_1, n} + C_{ijmi_1} N_{mkl}]_{,j} &= C_{ii_1 kl}^0 - [C_{ii_1 mn} N_{mkl, n} + C_{ii_1 kl}], \\ [C_{ijmn} N_{mkl i_1 \dots i_q, n} + C_{ijmi_q} N_{mkl i_1 \dots i_{q-1}}]_{,j} &= -[C_{ii_q mn} N_{mkl i_1 \dots i_{q-1}, n} + C_{ii_q mi_{q-1}} N_{mkl i_1 \dots i_{q-2}}], \quad q \geq 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта система получена из условия совпадения объёмных сил в ИЗ и СЗ: тогда из уравнений равновесия обеих задач следует, что $[C_{ijkl} u_{k,l}]_{,j} = C_{ijkl}^0 v_{k,lj}$. Подставляя в это равенство представление (3) и приравнявая слагаемые при одинаковых производных v , мы получаем систему рекуррентных уравнений (5), как достаточное условие одновременного выполнения уравнений равновесия ИЗ и СЗ. Граничные условия к системе (5) строятся аналогично, из соображений равенства соответствующих компонент перемещений и векторов напряжений на кинематической и статической границе; в частности, если вся поверхность тела Σ – кинематическая граница, то есть ИЗ и СЗ – первая краевая задача, $N_{ikl i_1 \dots i_q} \Big|_{\Sigma} = 0$.

В данной работе делается попытка применить соотношения метода структурных функций к задаче о нагружении свободно опертой по контуру пластины, предварительно построив приближение решения сопутствующей задачи при помощи известных приближенных теорий пластин.

2. Постановка исходной задачи о нагружении неоднородной пластины

Рассматривается частный случай задачи (1) – нагружение системой объёмных (X_i) и поверхностных сил слоистой прямоугольной пластины размерами $L_1 * L_2 * h$, свободно опертой на всех рёбрах ($x_1 = 0, L_1$; $x_2 = 0, L_2$). Декартовы координаты x_1, x_2, x_3 вводятся так, что x_3 совпадает с поперечным направлением пластины, а начало координат расположено в левом нижнем углу серединной плоскости Σ_0 , равноудалённой от лицевых поверхностей $\Sigma_{\pm} = \{\vec{x} : 0 \leq x_1 \leq L_1, 0 \leq x_2 \leq L_2, x_3 = \pm h/2\}$. Пусть упругие свойства пластины зависят только от поперечной координаты, $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_3)$, эта зависимость может быть как

кусочно-постоянной (если пластина составлена из слоёв с постоянными модулями упругости), так и более сложной. Кроме того, материал каждого слоя пластины предполагается ортотропным, причём оси ортотропии каждого слоя совпадают с осями координат, следовательно, $C_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0$, $C_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0$. Контакт слоёв материала предполагается идеальным. Запишем задачу (1) в рассматриваемом случае, учитывая, что на лицевых поверхностях $\Sigma_{\pm}$ действуют поверхностные силы $q_i^{\pm}(x_1, x_2)$, а на ребрах $x_1 = 0$, L_1 , $x_2 = 0$, L_2 пластина свободно оперта:

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(x_3)u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} + X_i(\vec{x}) &= 0, \\ x_3 = \pm h/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2, \cdot) &= q_i^{\pm}(x_1, x_2, \cdot), \\ x_1 = 0, L_1 : u_2(\cdot, x_2, x_3) &= 0, u_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0 \\ x_2 = 0, L_2 : u_1(x_1, \cdot, x_3) &= 0, u_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

и найдем МСФ-приближения решения задачи (6). Для этого поставим сопутствующую задачу, найдем приближенные решения сопутствующей задачи, и вычислим структурные функции исходной пластины.

3. Приближения решения сопутствующей задачи, рассматриваемые в статье

3.1. Постановка сопутствующей задачи

В данной работе мы предполагаем, что в качестве сопутствующего заведомо взято тело, упругие свойства которого совпадают с осредненными свойствами исходного тела, то есть $C_{ijkl}^0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} C_{ijkl}(x_3) dx_3$, и C_{ijkl}^0 наследует ортотропию C_{ijkl} : аналогично, $C_{\alpha\alpha\alpha\beta}^0 \equiv 0$, $C_{\alpha\alpha\beta\gamma}^0 \equiv 0$. С учётом изложенного в разделе 2 описания ИЗ, математическая постановка СЗ (4) принимает вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 v_{k,l,j}(\vec{x}) + X_i(\vec{x}) &= 0, \\ x_3 = \pm h/2 : s_{i3}(x_1, x_2, \cdot) &= q_i^{\pm}(x_1, x_2, \cdot), \\ x_1 = 0, L_1 : v_2(\cdot, x_2, x_3) &= 0, v_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, s_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0 \\ x_2 = 0, L_2 : v_1(x_1, \cdot, x_3) &= 0, v_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, s_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Постановка (7) представляет собой классическую для механики деформируемого твёрдого тела задачу о нагружении однородной пластины статическими нагрузками; разработано множество разнообразных подходов к решению (вообще говоря, приближенному) подобных задач, малая часть которых описана во Введении. Мы рассмотрим два приближения решения СЗ (7) – основанное на гипотезе Кирхгофа и основанное на теории первого порядка. Оба этих подхода предполагают сведение трехмерной задачи (7) к двумерной задаче, введение системы кинематических переменных, которые зависят только от продольных координат x_1, x_2 , и сведение внешних нагрузок к эквивалентной системе внутренних силовых факторов, распределенных в срединной плоскости пластины. Детально процедура сведения приведена, например, в работе [38] для классической теории пластин и в работе [22] для теории первого порядка; в монографии [14] и других источниках. Определим вторичные величины – приведенные нагрузки, действующие на сопутствующую пластину:

$$q_i(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} X_i(\vec{x}) dx_3 + q_i^-(x_1, x_2) + q_i^+(x_1, x_2), \quad (8)$$

$$q(x_1, x_2) = q_3(x_1, x_2) + m_{I,I}(x_1, x_2),$$

$$m_I(x_1, x_2) = h/2 \left(q_I^+(x_1, x_2) - q_I^-(x_1, x_2) \right) + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 X_I(\vec{x}) dx_3.$$

Кинематические переменные для сопутствующего тела подлежат определению из приведенных уравнений равновесия (приведены ниже), решения которых строятся при помощи метода Навье [14], использующего тригонометрическое разложение искомых кинематических переменных и приведённых нагрузок (8) по системе функций

$$\{\sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \cos(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2)\}_{m,n=1}^{\infty},$$

где $\lambda_m = \pi m/L_1$, $\mu_n = \pi n/L_2$. Коэффициенты разложения приведённых нагрузок (8) по указанной системе обозначим

$$\begin{aligned} [q_1, m_1](x_1, x_2) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_1^{mn}, m_1^{mn}] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ [q_2, m_2](x_1, x_2) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_2^{mn}, m_2^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ [q_3, q](x_1, x_2) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_3^{mn}, q^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \end{aligned} \quad (9)$$

и построим два приближения решения СЗ (7).

3.2. Основанное на решении СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа

Теория пластин, основанная на гипотезе Кирхгофа, в ряде источников именуемая классической [14], строится в предположении о том, что волокно пластины, нормальное к срединной плоскости и прямое до деформации, остается прямым, не изменяет свою длину и остается нормальным к деформированной срединной поверхности после приложения воздействия. Данное предположение позволяет установить связь между перемещениями и деформациями во всей сопутствующей пластине $v_i(x_1, x_2, x_3)$, и кинематическими переменными теории – перемещениями в срединной плоскости $w_i(x_1, x_2)$.²

$$v_i^K(\vec{x}) = w_i(x_1, x_2) - \delta_{iK} x_3 w_{3,K}(x_1, x_2), \quad e_{i3}^K \equiv 0, \quad e_{IJ}^K = (w_{I,J} + w_{J,I})/2 - x_3 w_{3,IJ}, \quad (10)$$

решение сопутствующей задачи (7) сводится к отысканию функций $w_i(x_1, x_2)$. Разложим их по тригонометрическому базису аналогично (9):

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} W_1^{mn} \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= w_1(x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} W_2^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) &= w_2(x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} W_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= w_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (11)$$

²Верхний индекс K здесь и далее подчеркивает, что величина вычислена в рамках гипотезы Кирхгофа

Заметим, что перемещения в срединной плоскости, найденные в форме (11), с учётом соотношений (10) автоматически обеспечивают выполнение граничных условий задачи (7), а набор постоянных $\{W_{mn}^i\}_{m,n=1}^\infty$, $i = 1..3$ подлежит отысканию только из уравнений равновесия для пластины Кирхгофа. В общем виде они построены, например, в работе [38], а в частном случае однородной пластины принимают вид³

$$H(J^0)_{IJKL}^{-1} w_{K,LJ} + q_I = 0, \quad H^3(J^0)_{IJKL}^{-1} w_{3,IJKL}/12 = q,$$

что позволяет записать систему линейных алгебраических уравнений для $\{W_{mn}^i\}_{m,n=1}^\infty$, $i = 1..3$

$$\begin{aligned} [\lambda_m^2 H(J^0)_{1111}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{1212}^{-1}] W_1^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n W_2^{mn} &= q_1^{mn}, \\ [\lambda_m^2 H(J^0)_{1212}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{2222}^{-1}] W_2^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n W_1^{mn} &= q_2^{mn}, \\ H^3[(J^0)_{1111}^{-1} \lambda_m^4 + (J^0)_{2222}^{-1} \mu_n^4 + 2((J^0)_{1122}^{-1} + 2(J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m^2 \mu_n^2] W_3^{mn}/12 &= q^{mn}, \end{aligned} \quad (12)$$

данная система позволяет записать явные выражения для $\{W_{mn}^i\}_{m,n=1}^\infty$, $i = 1..3$, но в данной работе они опущены – ниже значения W_{mn}^i используются только при численном моделировании решения исходной задачи.

3.3. Основанные на решении СЗ в рамках теории первого порядка

При рассмотрении задачи (7) в рамках гипотезы Кирхгофа непосредственно из физических предположений $e_{33}^K \equiv 0$. Поскольку разложение (3) строится по производным компонент тензора деформаций СЗ, начиная с нулевой производной, то есть – с самих компонент тензора деформаций, рассмотрим также приближение решения СЗ первого порядка точности по поперечным деформациям (first-order shear deformation theory – [14], [16], [22] и т.д.). Кинематическое предположение, позволяющие построить модель первого порядка – гипотеза типа Тимошенко: предполагается, что прямое волокно, нормальное к срединной плоскости пластины до деформации, остается прямым и не изменяет свою длину, но может образовывать с деформированной срединной поверхностью угол, отличный от прямого на величину γ_I в плоскости Ox_1x_3 . Тогда поперечные деформации в сопутствующем теле⁴ $e_{I3}^F(\vec{x}) = \gamma_I(x_1, x_2)/2$, $e_{33}^F \equiv 0$, и можно установить связь между перемещениями в сопутствующей пластине и кинематическими переменными теории – перемещениями в срединной плоскости $y_i(x_1, x_2)$ и изменениями углов $\gamma_I(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} v_i^F(\vec{x}) &= y_i(x_1, x_2) - \delta_{iK} x_3 (y_{3,K}(x_1, x_2) - \gamma_K(x_1, x_2)), \\ e_{33}^F &\equiv 0, \quad e_{I3}^F = \gamma_I, \quad e_{IJ}^F = (y_{I,J} + y_{J,I})/2 - x_3(2y_{3,IJ} - \gamma_{I,J} - \gamma_{J,I})/2. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично предыдущему, введём разложение кинематических переменных теории по тригонометрическому базису:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_1^{mn}, G_1^{mn}] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= [y_1, \gamma_1](x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_2^{mn}, G_2^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) &= [y_2, \gamma_2](x_1, x_2), \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} Y_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) &= y_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (14)$$

³Как правило, при рассмотрении классической теории пластин вводятся тензоры жесткостей, и уравнения равновесия включают именно их; мы не вводим данное обозначение, подставляя прямо вычисленные значения жесткостей, так как непосредственно не анализируем классическую теорию пластин, а используем её лишь как промежуточный шаг. J_{IJKL}^0 – компоненты тензора, обратного к C_{IJKL}^0 .

⁴Верхний индекс F здесь и далее подчеркивает, что величина вычислена в рамках теории первого порядка

Вид перемещений (14) обеспечивает выполнение граничных условий постановки (7), значения констант $\{Y_{mn}^i\}_{m,n=1}^\infty$, $i = 1..3$, $\{G_{mn}^I\}_{m,n=1}^\infty$, $I = 1..2$ подлежат определению из уравнений равновесия [22]

$$\begin{aligned} H(J^0)_{IJKL}^{-1} y_{K,LJ} + q_I &= 0, \quad 5HC_{I3K3}^0 \gamma_{K,I}/6 + q_3 = 0, \\ H^3(J^0)_{IJKL}^{-1} y_{3,KLJ}/12 - 5HC_{I3K3}^0 \gamma_K/6 + m_I &= 0, \end{aligned}$$

здесь использован множитель коррекции ([18], [24], [31] и др.) $5/6$, полученный для теории пластин первого порядка. Система линейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов решения (14) имеет вид

$$\begin{aligned} &[\lambda_m^2 H(J^0)_{1111}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{1212}^{-1}] Y_1^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n Y_2^{mn} = q_1^{mn}, \\ &[\lambda_m^2 H(J^0)_{1212}^{-1} + \mu_n^2 H(J^0)_{2222}^{-1}] Y_2^{mn} + H[(J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}] \lambda_m \mu_n Y_1^{mn} = q_2^{mn}, \\ &\lambda_m HC_{1313}^0 G_1^{mn} + \mu_n HC_{2323}^0 G_2^{mn} = 6q_3^{mn}/5, \\ &H^3 \left[(- (J^0)_{1111}^{-1} \lambda_m^3 - ((J^0)_{1122}^{-1} + 2(J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m \mu_n^2) Y_3^{mn} + ((J^0)_{1111}^{-1} \lambda_m^2 + (J^0)_{1212}^{-1} \mu_n^2) G_1^{mn} + \right. \\ &\quad \left. ((J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m \mu_n G_2^{mn} \right] /12 + 5HC_{1313}^0 G_1^{mn}/6 = m_1^{mn}, \\ &H^3 \left[(- (J^0)_{2222}^{-1} \mu_n^3 - (J^0)_{1122}^{-1} + 2(J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m^2 \mu_n Y_3^{mn} + ((J^0)_{1212}^{-1} \lambda_m^2 + (J^0)_{2222}^{-1} \mu_n^2) G_2^{mn} + \right. \\ &\quad \left. ((J^0)_{1122}^{-1} + (J^0)_{1212}^{-1}) \lambda_m \mu_n G_1^{mn} \right] /12 + 5HC_{2323}^0 G_2^{mn}/6 = m_2^{mn}, \end{aligned} \quad (15)$$

решение этой системы используется в вычислениях в разделе 6.

4. Структурные функции исходной пластины

Найдём СФ исходной пластины. Мы построим МСФ-приближения решения ИЗ первого и второго порядка, оставляя в формуле (3) только слагаемые, содержащие нулевые и первые производные деформаций СЗ соответственно; ниже вычислены СФ первого и второго порядка. Отметим, что в силу выбора приближений решения СЗ СФ N_{i33} , N_{i33j} и N_{ij33} не фигурируют в приближениях (1): из кинематических гипотез 3.2, 3.3 и, как следствие, выражений (10) и (13) $e_{33} \equiv 0$, $e_{i3,3} \equiv 0$, поэтому указанные СФ далее вычисляться не будут.

4.1. Первого порядка

Ограничим порядок слагаемых в представлении (3) и выражениях для напряжений и деформаций в исходном теле первым –

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(x_3) v_{k,l}(\vec{x}), \quad (16)$$

запишем первое уравнение рекуррентной системы (5) для случая слоистого материала, свойства которого C_{ijkl} зависят только от поперечной координаты x_3 :

$$[C_{i3k3} N_{kmn,3} + C_{i3mn}]_{,3} = 0, \quad (17)$$

и последовательно получим граничные условия к нему, учитывая вид приближений решения сопутствующей задачи (11) и (14). На лицевых поверхностях $\Sigma_\pm$ из совпадения граничных условий для исходного и сопутствующего тела следует $\sigma_{i3} \Big|_{\Sigma_\pm} (x_1, x_2, \cdot) = s_{i3} \Big|_{\Sigma_\pm} (x_1, x_2, \cdot)$, что влечёт требование

$$[C_{i3kl}(v_{k,l} + N_{kmn} v_{m,n,l} + N_{kmn,l} v_{m,n})] \Big|_{\Sigma_\pm} (x_1, x_2, \cdot) = [C_{i3kl}^0 v_{k,l}] \Big|_{\Sigma_\pm} (x_1, x_2, \cdot). \quad (18)$$

Заметим, что $v_{k,l}$ в обоих рассмотренных приближениях – линейно независимые, отличные от тождественно нулевых (за исключением $v_{3,3}$) функции продольных координат (в силу вида решения (11), (12) или (14), (15)), запишем условие совпадения коэффициентов при $v_{k,l}$ в правой и левой части (18):

$$[C_{i3k3}N_{kmn,3}] \Big|_{\Sigma_{\pm}} = [C_{i3mn}^0 - C_{i3mn}] \Big|_{\Sigma_{\pm}}$$

Условия на СФ также следуют и из совпадения кинематических граничных условий на рёбрах пластины: на рёбрах $x_1 = 0$, L_1 совпадение

$$u_2(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = v_2(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1}$$

приводит к условию

$$N_{2kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0;$$

$$u_3(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = v_3(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1}$$

– к условию

$$N_{3kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0,$$

$$\sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = s_{11}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1},$$

с учётом ортотропии материала – к условию

$$C_{11kl} \left(N_{kmn,l}(x_3)v_{m,n}(\cdot, x_2, x_3) + N_{kmn}(x_3)v_{m,nl}(\cdot, x_2, x_3) \right) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0;$$

на рёбрах $x_2 = 0$, L_2 аналогично

$$N_{1kl}v_{k,l}(x_1, \cdot, x_3) \Big|_{x_2=0, L_2} = 0,$$

$$N_{3kl}v_{k,l}(x_1, \cdot, x_3) \Big|_{x_2=0, L_2} = 0.$$

$$C_{22kl} \left(N_{kmn,l}v_{m,n}(x_1, \cdot, x_3) + N_{kmn}v_{m,nl}(x_1, \cdot, x_3) \right) \Big|_{x_2=0, L_2} = 0.$$

Запишем подробно условие

$$N_{2kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) \Big|_{x_1=0, L_1} = 0$$

для $v_i = v_i^F$ (13):

$$\begin{aligned} N_{2kl}v_{k,l}^F &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[G_1^{mn}N_{213} \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) + G_2^{mn}N_{223} \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) \right] + \\ &\left(-\lambda_m[Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - G_1^{mn})]N_{211} - \mu_n[Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - G_2^{mn})]N_{222} \right) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) + \\ &\left(\mu_n(Y_1^{mn} + x_3 G_1^{mn}) + \lambda_m(Y_2^{mn} + x_3 G_2^{mn}) - 2x_3 \lambda_m \mu_n Y_3^{mn} \right) N_{212} \cos(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) \Big] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Опуская заведомо нулевые в силу вида решения сопутствующей задачи слагаемые (для ребер $x_1 = 0$, L_1 это – слагаемые, содержащие множитель $\sin(\lambda_m x_1)$, для $x_2 = 0$, L_2 – $\sin(\mu_n x_2)$), получаем пару условий $N_{213}(x_3) \equiv 0$, $N_{212}(x_3) \equiv 0$. Структурные функции зависят от свойств

исходного и сопутствующего тела, но не от значений решения СЗ; при выборе в представлении (19) v_i^K получим аналогично $N_{212}(x_3) \equiv 0$, N_{213} в приближение решения ИЗ, основанное на приближении решения СЗ в рамках теории Кирхгофа, не входит в силу вида перемещений (10). Аналогично из условия $N_{3kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) = 0$ имеем $N_{312}(x_3) \equiv 0$, $N_{313}(x_3) \equiv 0$. Совпадение кинематических граничных условий на торцах $x_2 = 0$, $x_2 = L_2$ приводит к парам условий $N_{123}(x_3) \equiv 0$, $N_{112}(x_3) \equiv 0$, $N_{312}(x_3) \equiv 0$, $N_{323}(x_3) \equiv 0$. Из совпадения напряжений в случае ортотропного материала

$$\begin{aligned}\sigma_{11}\Big|_{x_1=0, L_1}(\cdot, x_2, x_3) &= s_{11}\Big|_{x_1=0, L_1}(\cdot, x_2, x_3), \\ \sigma_{22}\Big|_{x_2=0, L_2}(x_1, \cdot, x_3) &= s_{22}\Big|_{x_2=0, L_2}(x_1, \cdot, x_3)\end{aligned}$$

следует, что $N_{111}(x_3) \equiv 0$, $N_{122}(x_3) \equiv 0$, $N_{211}(x_3) \equiv 0$, $N_{222}(x_3) \equiv 0$.

С учетом уравнений (17) и полученных условий запишем отличные от нуля СФ исходного тела (суммирование по греческим индексам не производится; $\alpha = 1, 2$),

$$\begin{aligned}N_{3\alpha\alpha} &= \int_{-h/2}^{x_3} (C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha})/C_{3333} dy + c_{3\alpha\alpha}, \\ N_{\alpha\alpha 3} &= \int_{-h/2}^{x_3} (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3})/C_{\alpha 3\alpha 3} dy + c_{\alpha\alpha 3},\end{aligned}\tag{20}$$

в силу выбора сопутствующего тела (раздел 4) произвольные постоянные $c_{\alpha\alpha 3}$, $c_{3\alpha\alpha}$ выберем такими, что $\langle N_{ikl} \rangle = 0$.

4.2. Второго порядка

В случае применения МСФ второго порядка приближение перемещений (3) принимает вид

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(x_3)v_{k,l}(\vec{x}) + N_{iklm}(x_3)v_{k,lm}(\vec{x}),\tag{21}$$

причём СФ первого порядка N_{ikl} совпадают с найденными в предыдущем разделе 4.1, а СФ второго порядка N_{iklm} подлежат определению из второго уравнения рекуррентной системы (5), в случае слоистого материала последнее принимает вид

$$[C_{i3m3}N_{mkl i,3} + C_{i3m i_1}N_{mkl}],_3 = C_{ii_1 kl}^0 - [C_{ii_1 m3}N_{mkl,3} + C_{ii_1 kl}],$$

и соответствующих граничных условий, которые можно получить по схеме, аналогичной предыдущему разделу – поочередно рассматривая совпадение перемещений и напряжений на границах исходной и сопутствующей пластины. Так, из кинематических условий на рёбрах $x_1 = 0, L_1$ $N_{aklm}v_{k,lm}(\cdot, x_2, x_3) = 0$, $\alpha = 2, 3$, покомпонентная запись этих сумм, аналогичная (19), приводит к выводу $N_{\alpha 111} \equiv 0$, $N_{\alpha 122} \equiv 0$, $N_{\alpha 123} \equiv 0$, $N_{\alpha 133} \equiv 0$, $N_{\alpha 221} \equiv 0$, $N_{\alpha 231} \equiv 0$, $N_{\alpha 331} \equiv 0$, $N_{\alpha 132} \equiv 0$, $\alpha = 2, 3$. На рёбрах $x_2 = 0, L_2$ $N_{aklm}v_{k,lm}(\cdot, x_2, x_3) = 0$, $\alpha = 1, 3$, следовательно, $N_{\alpha 112} \equiv 0$, $N_{\alpha 121} \equiv 0$, $N_{\alpha 123} \equiv 0$, $N_{\alpha 231} \equiv 0$, $N_{\alpha 132} \equiv 0$, $N_{\alpha 222} \equiv 0$, $N_{\alpha 233} \equiv 0$, $N_{\alpha 332} \equiv 0$, $\alpha = 1, 3$.

Кроме того, условия совпадения напряжений $\sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = s_{11}(\cdot, x_2, x_3)$ и $\sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = s_{22}(x_1, \cdot, x_3)$ с учётом ортотропии материала приводят к равенствам $N_{1113} \equiv 0$, $N_{2223} \equiv 0$, $N_{1333} \equiv 0$, $N_{2333} \equiv 0$. Из соображений совпадения коэффициентов при $v_{k,lm}$ в условии совпадения напряжений $\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) = s_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2)$ получаем, что

$$\begin{aligned}N_{\alpha\beta\beta\alpha,3}(\pm h/2) &= -N_{3\beta\beta}(\pm h/2), \quad N_{\gamma\gamma\beta\beta,3}(\pm h/2) = -N_{\gamma\gamma\beta}(\pm h/2), \quad \gamma = 1, 2; \\ C_{3333}(\pm h/2)N_{33\alpha\alpha,3}(\pm h/2) &= -C_{33\alpha\alpha}(\pm h/2)N_{\alpha\alpha 3}(\pm h/2).\end{aligned}\tag{22}$$

Следовательно, уравнение для СФ второго порядка можно проинтегрировать:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta\alpha} &= - \int_{-h/2}^{x_3} \int_{-h/2}^y (C_{33\beta\beta}^0 - C_{33\beta\beta})/C_{33\beta\beta} dz + c_{3\beta\beta} dy + c_{\alpha\beta\alpha}, \\ N_{\gamma\gamma\beta\beta} &= - \int_{-h/2}^{x_3} \int_{-h/2}^y (C_{\gamma 3\gamma 3}^0 - C_{\gamma 3\gamma 3})/C_{\gamma 3\gamma 3} dz + c_{\gamma\gamma 3} dy + c_{\gamma\gamma\beta\beta}, \\ N_{33\alpha\alpha} &= - \int_{-h/2}^{x_3} C_{33\alpha\alpha}(y) C_{3333}^{-1}(y) \left[\int_{-h/2}^y (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3})/C_{\alpha 3\alpha 3} dz - c_{\alpha\alpha 3} \right] dy + c_{33\alpha\alpha}, \end{aligned} \quad (23)$$

аддитивные постоянные аналогично случаю СФ первого порядка определяются из соотношений $\langle N_{ijkl} \rangle = 0$.

5. Явный вид приближений решения исходной задачи

Используя результаты разделов 3 и 4 – найденные приближения решения СЗ и СФ первого и второго порядка – запишем явный вид четырех МСФ-приближений решения ИЗ. Мы рассмотрим МСФ-приближения первого и второго порядка, основанные на приближениях решения сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа и гипотезы типа Тимошенко.

5.1. Приближение первого порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа

Непосредственной подстановкой данных об отличных от нуля структурных функциях первого порядка (20) и соотношения для перемещений сопутствующей пластины (10) в соотношение МСФ первого порядка (16) получаем вид приближения перемещений в исходном теле:

$$\begin{aligned} u_I &= v_I^K = w_I - x_3 w_{3,I}, \\ u_3 &= v_3^K + N_{311} v_{1,1}^K + N_{322} v_{2,2}^K = w_3 + N_{311}(x_3)(w_{1,1} - x_3 w_{3,11}) + N_{322}(x_3)(w_{2,2} - x_3 w_{3,22}), \end{aligned}$$

или, с учётом формы решения СЗ (11),

$$\begin{aligned} u_1(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ u_2(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn}) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(W_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3)(W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) \right. \\ &\quad \left. - \mu_n N_{322}(x_3)(W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn}) \right) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \end{aligned} \quad (24)$$

отметим, что приближение решения ИЗ, построенное в этом пункте, отличается от приближенного решения СЗ по теории Кирхгофа (11) лишь незначительно: приближения продольных перемещений вовсе совпадают, а поправка, вносимая в поперечное перемещение, невелика, так как порядок поправочных слагаемых $|N_{3\alpha\alpha} w_{\alpha,\alpha}| \lesssim H * |w_\alpha|/L_\alpha$, $|N_{3\alpha\alpha} w_{3,\alpha\alpha}| \lesssim H * |w_3|/L_\alpha^2$, обе оценки сверху в силу ограничения $|H| < |L_\alpha|$ и уравнений (12) малы по сравнению с $|w_3|$.

5.2. Приближение второго порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа

Подставляя найденные СФ первого и второго порядка (20), (23) и вид перемещений (10) в форму МСФ-приближения второго порядка (21), получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1 - x_3 w_{3,1} + N_{1111}(x_3)(w_{1,11} - x_3 w_{3,111}) + N_{1221}(x_3)(w_{2,21} - x_3 w_{3,122}), \\ u_2 &= w_2 - x_3 w_{3,2} + N_{2222}(x_3)(w_{2,22} - x_3 w_{3,222}) + N_{2112}(x_3)(w_{1,12} - x_3 w_{3,112}), \\ u_3 &= w_3 + N_{311}(x_3)(w_{1,1} - x_3 w_{3,11}) + N_{322}(x_3)(w_{2,2} - x_3 w_{3,22}) - N_{3113}(x_3)w_{3,11} - N_{3223}(x_3)w_{3,22}, \end{aligned}$$

а также, с учётом вида решения (11), в явном виде:

$$\begin{aligned} u_1(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[W_1^{mn} \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111}(x_3) \right) - W_2^{mn} \lambda_m \mu_n N_{1221}(x_3) - \right. \\ &\quad \left. x_3 W_3^{mn} \lambda_m \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111}(x_3) - \mu_n^2 N_{1221}(x_3) \right) \right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ u_2(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[-W_1^{mn} \lambda_m \mu_n N_{2112}(x_3) + W_2^{mn} \left(1 - \mu_n^2 N_{2222}(x_3) \right) - \right. \\ &\quad \left. x_3 W_3^{mn} \mu_n \left(1 - \mu_n^2 N_{2222}(x_3) - \lambda_m^2 N_{2112}(x_3) \right) \right] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[W_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3)(W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) \right. \\ &\quad \left. - \mu_n N_{322}(x_3)(W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_m^2 W_3^{mn} N_{3113}(x_3) + \mu_n^2 W_3^{mn} N_{3223}(x_3) \right] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2). \end{aligned} \quad (25)$$

5.3. Приближение первого порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках теории первого порядка

Запишем последовательно МСФ-приближения первого и второго порядка, основанные на приближении решения СЗ по теории первого порядка (3.3). Результат подстановки СФ первого порядка (20) и перемещений (13) в выражение для МСФ-приближения перемещений (16) –

$$\begin{aligned} u_I &= v_I^F + N_{IJ3}(x_3)(v_{J,3}^F + v_{3,J}^F) = y_I - x_3(y_{3,I} - \gamma_I) + N_{IJ3}(x_3)\gamma_J, \\ u_3 &= v_3^F + N_{311}(x_3)v_{1,1}^F + N_{322}(x_3)v_{2,2}^F = \\ &= y_3 + N_{311}(x_3)[y_{1,1} - x_3(y_{3,11} - \gamma_{1,1})] + N_{322}(x_3)[y_{2,2} - x_3(y_{3,22} - \gamma_{2,2})], \end{aligned}$$

или, в терминах тригонометрических рядов с учётом (14),

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - G_1^{mn}) + N_{113}(x_3)G_1^{mn} \right) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ u_2 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - G_2^{mn}) + N_{223}(x_3)G_2^{mn} \right) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3)[Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - G_1^{mn})] - \right. \\ &\quad \left. \mu_n N_{322}(x_3)[Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - G_2^{mn})] \right) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что данное приближение продольных перемещений в исходном теле, в отличие от предыдущих, содержит отличные от нуля дополнительные к решению СЗ слагаемые $N_{\alpha\alpha 3}\gamma_\alpha$, которые по порядку сопоставимы с остальными слагаемыми выражений для u_I . Эти слагаемые также важны качественно – они позволяют моделировать зигзагообразную зависимость продольных перемещений от поперечной координаты.

5.4. Приближение второго порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках теории первого порядка

Аналогично предыдущим построениям, подставим найденные СФ (20) и (23), и соотношение для перемещений в теории первого порядка (13) в выражение для МСФ-приближения второго порядка (21):

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 - x_3(y_{3,1} - \gamma_1) + N_{113}(x_3)\gamma_1 + N_{1111}(x_3)[y_{1,11} - x_3(y_{3,111} - \gamma_{1,11})] + \\ &\quad N_{1221}(x_3)[y_{2,12} - x_3(y_{3,122} - \gamma_{2,12})], \\ u_2 &= y_2 - x_3(y_{3,2} - \gamma_2) + N_{223}(x_3)\gamma_2 + N_{2222}(x_3)[y_{2,22} - x_3(y_{3,222} - \gamma_{2,22})] + \\ &\quad N_{2112}(x_3)[y_{1,12} - x_3(y_{3,112} - \gamma_{1,12})], \\ u_3 &= y_3 + N_{311}(x_3)[y_{1,1} - x_3(y_{3,11} - \gamma_{1,1})] + N_{322}(x_3)[y_{2,2} - x_3(y_{3,22} - \gamma_{2,2})] + \\ &\quad [N_{3311}(x_3) + N_{3113}(x_3)]\gamma_{1,1} - N_{3113}(x_3)y_{3,11} + [N_{3322}(x_3) + N_{3223}(x_3)]\gamma_{2,2} - N_{3223}(x_3)y_{3,22}, \end{aligned}$$

приведем также результат подстановки вида решения СЗ (14) в данные равенства:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[Y_1^{mn} \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111} \right) - Y_2^{mn} \lambda_m \mu_n N_{1221} - \lambda_m \mu_n G_2^{mn} N_{1221} - \right. \\ &\quad \left. x_3 Y_3^{mn} \lambda_m \left(1 - \lambda_m^2 N_{1111} - \mu_n^2 N_{1221} \right) + G_1^{mn} \left(x_3 + N_{113} - \lambda_m^2 x_3 N_{1111} \right) \right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ u_2 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[-Y_1^{mn} \lambda_m \mu_n N_{2112} + Y_2^{mn} \left(1 - \mu_n^2 N_{2222} \right) - \lambda_m \mu_n G_1^{mn} N_{2112} - \right. \\ &\quad \left. x_3 Y_3^{mn} \mu_n \left(1 - \mu_n^2 N_{2222} - \lambda_m^2 N_{2112} \right) + G_2^{mn} \left(x_3 + N_{223} - \mu_n^2 x_3 N_{2222} \right) \right] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ u_3 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[Y_3^{mn} - \lambda_m N_{311} (Y_1^{mn} - x_3 \lambda_m Y_3^{mn}) - \mu_n N_{322} (Y_2^{mn} - x_3 \mu_n Y_3^{mn}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_m^2 Y_3^{mn} N_{3113} + \mu_n^2 Y_3^{mn} N_{3223} - \lambda_m G_1^{mn} (x_3 N_{311} + N_{3311} + N_{3113}) - \right. \\ &\quad \left. \mu_n G_2^{mn} (x_3 N_{322} + N_{3322} + N_{3223}) \right] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2). \end{aligned} \tag{27}$$

Отметим, что все приближения (24)-(27) непрерывны по поперечной координате (в силу непрерывности по ней СФ), а приближения (26) и (27), основанные на решении СЗ по теории первого порядка, позволяют моделировать зигзагообразную форму зависимости перемещений от поперечной координаты.

6. Сопоставление МСФ-приближений с решением исходной задачи по методу Пагано

В этом разделе приведены результаты численного сопоставления четырех вариантов приближений решения задачи о нагружении неоднородной пластины, построенных выше ((24)-(27)), с аналитическим решением данной задачи в трехмерной постановке, полученным N.

J. Pagano [33]; последнее и вторичные величины, вычисленные на базе данного решения, далее обозначены верхним индексом P . В качестве модельных взяты пластины, составленные из двух или трех слоев тестового материала, упругие свойства которого задаются соотношениями $E_L = 30E_T$, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$, $G_{LT} = 0.5E_T$, $G_{TT} = 0.2E_T$. Модельные пластины подвергнуты тестовой нагрузке $q_3^+ = q_0 \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2$, q_0 – константа, $q_1^\pm \equiv 0$, $q_2^\pm \equiv 0$. В скрипте на языке Python 3 реализованы четыре описанных выше варианта приближений параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) модельной пластины – первое и второе приближение на базе решений СЗ в рамках классической теории пластин и теории пластин первого порядка, а также решение по методу Пагано; параметры НДС пластины вычислены в нормализованном виде,

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3) = 100H^3 * E_T * u_i(x_1, x_2, x_3)/(L_1^4 * q_0),$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3) = H * \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)/(L_1^2 * q_0),$$

ниже без ограничения общности мы полагаем, что $L_1 \leq L_2$. Константы, входящие в приближения решения СЗ (11) и (14), определялись путём решения систем (12) и (15) соответственно. Для ряда примеров компоновки пластин построены графики, на которых изображены эпюры $\bar{u}_1(x_3)$ в точке $x_1 = 0$, $x_2 = L_2/2$, $\bar{\sigma}_{11}(x_3)$ в точке $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_2/2$, при фиксированном значении H/L_1 . На всех построенных графиках прерывистой линией обозначена граница фаз композиционного материала.

6.1. Трёхслойная сэндвич-панель композиции $[-h/2, -h/6, h/6]$, $L_1 = L_2$

Для квадратной трехслойной сэндвич-панели с соотношением размеров $H/L_1 = 1/5$ приведём (Рис. 1) эпюры перемещения $\bar{u}_1$ и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$, вычисленные по приближенным формулам, а также по методу Пагано. Заметим, что в этом, как и в нижеследующих случаях, слагаемые, содержащие СФ второго порядка, оказывают малое влияние на вычисленные величины, поэтому МСФ-приближения первого и второго порядка визуально неотличимы.

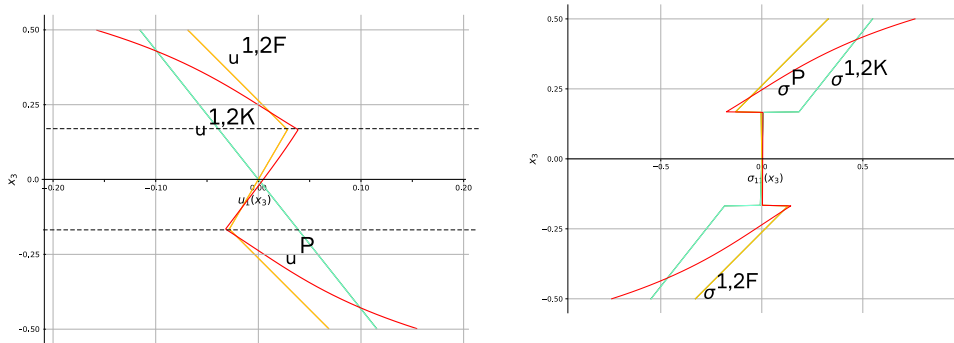


Рис. 1: Зависимость от толщины перемещения $\bar{u}_1$ при $x_1 = 0$, $x_2 = L_1/2$, и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ при $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_1/2$ в квадратной трехслойной сэндвич-пластине, составленной из слоев равной толщины, с соотношением толщины к линейному размеру $1/5$; кривые с верхним индексом P – результат решения задачи (6) по методу Пагано; с верхним индексом 1,2K – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа, с верхним индексом 1,2F – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках теории пластин первого порядка, прерывистые линии – границы раздела слоёв пластины

6.2. Трёхслойная пластина композиции $[-h/2, -h/6, 0]$, $L_1 = L_2$

Построим (Рис. 2) аналогичные предыдущему разделу эпюры для асимметричной по толщине трёхслойной пластины.

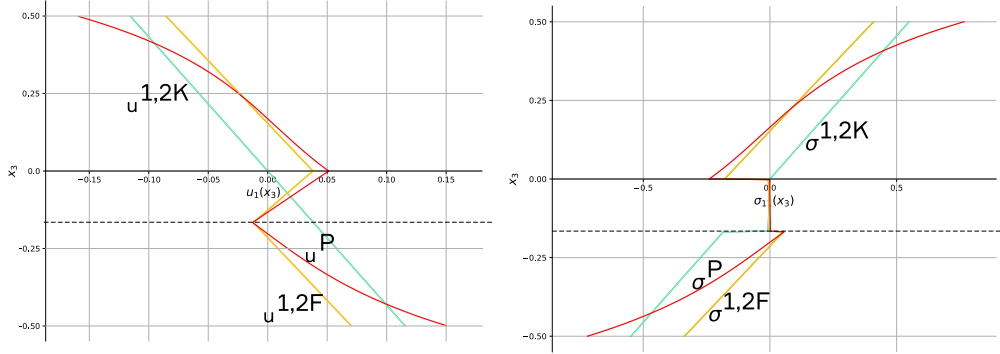


Рис. 2: Зависимость от толщины перемещения $\bar{u}_1$ при $x_1 = 0$, $x_2 = L_1/2$, и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ при $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_1/2$ в квадратной трёхслойной пластине, составленной из слоёв толщины $h/3$, $h/6$, $h/2$, с соотношением толщины к линейному размеру $1/5$; кривые с верхним индексом P – результат решения задачи (6) по методу Пагано; с верхним индексом 1,2K – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа, с верхним индексом 1,2F – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках теории пластин первого порядка, прерывистые линии – границы раздела слоёв пластины

6.3. Двухслойная пластина композиции $[-h/2, -h/6]$, $L_1 = L_2$

Построим (Рис. 3) аналогичные предыдущему разделу эпюры для двухслойной пластины. Построенные примеры иллюстрируют общую применимость МСФ в данной задаче, однако

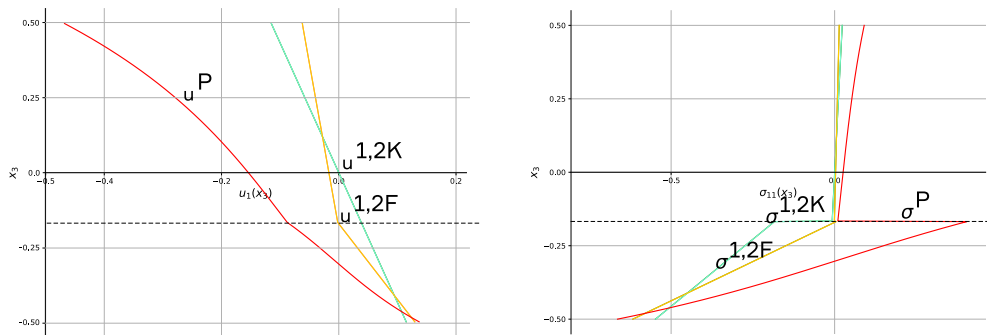


Рис. 3: Зависимость от толщины перемещения $\bar{u}_1$ при $x_1 = 0$, $x_2 = L_1/2$, и напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ при $x_1 = L_1/2$, $x_2 = L_1/2$ в квадратной двухслойной пластине, составленной из слоёв толщины $h/3$, $2h/3$, с соотношением толщины к линейному размеру $1/5$; кривые с верхним индексом P – результат решения задачи (6) по методу Пагано; с верхним индексом 1,2K – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках гипотезы Кирхгофа, с верхним индексом 1,2F – результат МСФ-приближения 1 и 2 порядка, задействующего решение СЗ в рамках теории пластин первого порядка, прерывистые линии – границы раздела слоёв пластины

показывают, что для точного моделирования поведения сравнительно толстых пластин (с $H/L \approx 5$) требуется более точное приближение решения сопутствующей задачи.

Заключение

Данная работа посвящена применению метода структурных функций к решению квазистатической задачи теории упругости в перемещениях для неоднородного тела. Метод структурных функций основан на соотношении, представляющем перемещения в неоднородном теле в виде взвешенной суммы производных деформаций в однородном теле идентичной геометрии, подвергнутом идентичным нагрузкам, называемом сопутствующим; коэффициенты этой суммы называют структурными функциями; таким образом, помимо задачи для неоднородного тела, называемой исходной, рассматривается аналогичная задача для однородного тела, называемая сопутствующей.

В настоящей работе использовано приближение первого (включающее слагаемые, содержащие деформации сопутствующего тела) и второго порядка (включающее слагаемые, содержащие первые производные деформаций сопутствующего тела по координате). Метод структурных функций применен к задаче о квазистатическом нагружении прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластины, упругие свойства которой зависят только от поперечной координаты; пластина составлена из слоёв линейно-упругих, ортотропных материалов. Использован вариант метода структурных функций, предполагающий последовательное определение решения сопутствующей задачи и структурных функций.

Рассмотрены два варианта приближенного решения сопутствующей задачи разной точности – классическое приближение по теории Кирхгофа-Лява и приближение по теории пластин первого порядка, основанной на гипотезе типа Тимошенко. Вычислены структурные функции первого и второго порядка неоднородной пластины. Получены явные формулы для всех четырех приближений перемещений в исходном теле – приближений первого и второго порядка, действующих решение сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа, и приближений первого и второго порядка, действующих решение сопутствующей задачи в рамках теории пластин первого порядка. Данные приближения численно сопоставлены с решением трехмерной задачи теории упругости, полученным известным методом Пагано. Приближения, основанные на решении сопутствующей задачи в рамках теории первого порядка, демонстрируют удовлетворительную точность, наиболее эффективно в рассмотренных примерах приближение по методу структурных функций первого порядка, действующее решение сопутствующей задачи по теории пластин первого же порядка (поправка, вносимая структурными функциями второго порядка, в этом случае оказывается невелика по сравнению с характерным масштабом величин), однако в случае сравнительно толстых пластин представляется необходимым привлечение приближения решения сопутствующей задачи, более точно описывающего поперечные деформации. Кроме количественного совпадения, приближение по методу структурных функций, действующее решение сопутствующей задачи по теории пластин первого порядка, позволяет моделировать зигзагообразную зависимость перемещений от поперечной координаты, что является важной качественной особенностью кинематики слоистой пластины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных тел // Вычислительная механика. — 1991. — № 2. — С. 61–76.
2. Горбачев В.И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости. Диссертация доктора физико-математических наук. МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 1991. 395 с.
3. Горбачев В.И., Кокарев А.С Интегральная формула в динамической задаче неоднородной упругости // Вестник МГУ. № 2. 2005. С. 62-66.

4. Gorbachev V. I. Integral formulae in the coupled problem of the elasticity of an inhomogeneous body. application in the mechanics of composite materials // Journal of Applied Mathematics and Mechanics (English translation of Prikladnaya Matematika i Mekhanika). — 2014. — Vol. 78, no. 2. — P. 192–208.
5. Емельянов А. Н. Эффективные материальные функции слоистых композитов в линейной моментной теории упругости // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2015. — № 1. — С. 40–45.
6. Горбачёв В. И. Интегральные формулы решений основных линейных дифференциальных уравнений математической физики с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18, № 3. — С. 209–233.
7. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. Stability of a straight bar of variable rigidity // Mechanics of Solids. — 2011. — Vol. 46, no. 4. — P. 645–655
8. Gorbachev V. I., Olekhova L. V. Effective properties of a nonuniform beam under torsion // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2007. — Vol. 62, no. 5. — P. 123–130.
9. Горбачёв В. И. О распространении тепла в неоднородном стержне с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2017. — № 2. — С. 48–54
10. Gorbachev V. I. Differential equations with variable coefficients in the mechanics of inhomogeneous bodies // Mechanics of Solids. — 2020. — Vol. 55, no. 3. — P. 396–402
11. Горбачев В. И., Гулин В. В. Точные решения некоторых задач теории упругости о равновесии неоднородной по ширине, анизотропной полосы // Композиты и наноструктуры. — 2021. — Т. 13, № 3-4. — С. 120–126
12. Соляев Ю. О., Горбачев В. И. Сопоставление методов Мори-Танака и Горбачева-Победри в задаче определения эффективных свойств композитов с пьезоактивными сферическими включениями // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 57–75.
13. Kirchhoff G. Vorlesungen Über Mathematische Physik: Mechanik. — 1877.
14. Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. — CRC press, 2006.
15. Kienzler R., Shneider P. Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // Shell Structures: Theory and Applications. — 2013. — Т. 3. — С. 109–112.
16. Hencky H. Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten, Ing. — 1947.
17. Levinson M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates // Mechanics Research Communications. — 1980. — Т. 7. — №. 6. — С. 343–350.
18. Stephen N. G. Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity // Journal of Sound and Vibration. — 1997. — Т. 202. — №. 4. — С. 539–553.
19. Vassiliev V.V., Lurie S.A. On refined theories of beams, plates & shells // J. of Composite Materials, 1992, Vol. 26, No 4.
20. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассических теорий пластин // Известия АН СССР, МТТ, 1990, № 2. — С. 158–167

21. Mechab B., Mechab I., Benaissa S. Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermo-mechanical loading //Composites Part B: Engineering. – 2012. – Т. 43. – №. 3. – С. 1453-1458.
22. Tovstik P. E. Two-dimensional model of second-order accuracy for an anisotropic plate //Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. – 2019. – Т. 52. – №. 1. – С. 112-121.
23. Zenkour A. M., El-Mekawy H. F. Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores //Journal of Vibroengineering. – 2014. – Т. 16. – №. 7. – С. 3260-3272.
24. Hadavinia H. et al. Deriving shear correction factor for thick laminated plates using the energy equivalence method //Structural Durability & Health Monitoring. – 2006. – Т. 2. – №. 4. – С. 197.
25. Altenbach, H., and Eremeyev, V. A., On the bending of viscoelastic plates made of polymer foams // Acta Mechanica, vol. **204**, no. 3, pp. 137-154, 2010.
26. Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic plates*, Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh, 1968.
27. Ambartsumian S. A. Theory of anisotropic plates: strength, stability, vibration. – Technomic Publishing Company, 1970.
28. Vlasov B. F. On the equations of bending of plates (in Russian) //Doklady Akademii Nauk Azerbeijanskoi SSR. – 1957. – Т. 13. – №. 9. – С. 955-959.
29. Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. – 1986.
30. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек //Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2005. – Т. 11. – №. 2. – С. 439-448.
31. Si J., Zhang Y. An enhanced higher order zigzag theory for laminated composite plates under mechanical/thermal loading //Composite Structures. – 2022. – Т. 282. – С. 115074.
32. Lezgy-Nazargah M., Salahshuran S. A new mixed-field theory for bending and vibration analysis of multi-layered composite plate //Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2018. – Т. 18. – №. 3. – С. 818-832.
33. Pagano N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates //Journal of composite materials. – 1970. – Т. 4. – №. 1. – С. 20-34.
34. Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates //Composite structures. – 2000. – Т. 50. – №. 2. – С. 183-198.
35. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking //Archives of Computational Methods in Engineering. – 2003. – Т. 10. – №. 3. – С. 215-296.
36. Filippi M., Carrera E., Valvano S. Analysis of multilayered structures embedding viscoelastic layers by higher-order, and zig-zag plate elements //Composites Part B: Engineering. – 2018. – Т. 154. – С. 77-89.
37. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. – 1984.
38. Горбачёв В. И., Кабанова Л. А. О постановке задач в общей теории пластин Кирхгофа-Лява // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 3. — С. 43–50.

39. Kabanova L. A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 7. — P. 1628–1639.

REFERENCES

1. Gorbachev V. I. 1991. “Green’s tensors method for solution of boundary value problem of nonhomogeneous elasticity“, *Vychislitel’naya mekhanika* [in Russian], vol. 2, p. 61–76.
2. Gorbachev V. I. 1991. “A variant of the averaging method for solving boundary value problems of inhomogeneous elasticity“, Doctor of Science thesis, Lomonosov MSU, 395 pp.
3. Gorbachev, V. I., Kokarev, A. S. 2005. “Integral formula in dynamical problem on inhomogeneous elasticity“, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika* [in Russian], vol. 2, 62–66.
4. Gorbachev V. I. 2014. “Integral formulae in the coupled problem of the elasticity of an inhomogeneous body. application in the mechanics of composite materials“, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (English translation of Prikladnaya Matematika i Mekhanika)*, vol. 78, no. 2., p. 192–208.
5. Emel’yanov, A.N. 2015. “Effective material functions of laminated composites in the linear moment theory of elasticity“, *Moscow Univ. Mech. Bull.* vol. 70, no.1, pp. 8–12
6. Gorbachev, V. I. 2017. “Integral formulas of solutions of the basic linear differential equations of mathematical physics with variable factors“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 3, 210–234.
7. Gorbachev V. I., Moskalenko O. B. 2011. “Stability of a straight bar of variable rigidity“, *Mechanics of Solids*, vol. 46, no. 4., pp. 645–655.
8. Gorbachev V. I., Olekhova L. V. 2007. “Effective properties of a nonuniform beam under torsion“, *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 62, no. 5, pp. 123–130.
9. Gorbachev V. I. 2017. “Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section“, *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 72, no. 2., pp. 48–53.
10. Gorbachev V. I. 2020. “Differential equations with variable coefficients in the mechanics of inhomogeneous bodies“, *Mechanics of Solids*, vol. 55, no. 3, pp. 396–402.
11. Gorbachev V. I., Gulin V. V. 2021. “Exact solutions of some problems of the theory of elasticity on the equilibrium of an anisotropic inhomogeneous band“, *Kompozity i nanostruktury*, vol. 13, no. 3-4, pp. 120–126
12. Solyaev Y. O., Gorbachev V. I. 2019 “Omparison between Mori-Tanaka and Gorbachev-Pobedrya methods in the problem of determinination of the effective properties of composites with piezoelectric spherical inclusions“, *Mekhanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij* [in Russian], vol. 25, no. 1, pp. 57–75.
13. Kirchoff G. 1877. “Vorlesungen Über Mathematische Physik: Mechanik“.
14. Reddy J. N. 2006. “Theory and analysis of elastic plates and shells“, *CRC press*.
15. Kienzler R., Shneider P. 2013. “Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation“, *Shell Structures: Theory and Applications*. vol. 3, pp. 109–112.

16. Hencky H. 1947. "Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten", Ing.
17. Levinson M. 1980. *An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates*, *Mechanics Research Communications*, vol. 7, no. 6, pp. 343-350.
18. Stephen N. G. 1997. "Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 202, no. 4, pp. 539-553.
19. Vassiliev V.V, Lurie S.A. 1992. "On refined theories of beams, plates & shells", *J. of Composite Materials*, vol. 26, No 4.
20. Vassiliev V.V, Lurie S.A. 1990. "On the problem of constructing non-classical theories of plates", *Izvestiya AN SSSR, MTT*, no. 2., pp. 158-167
21. Mechab B., Mechab I., Benaissa S. 2012. "Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermo-mechanical loading", *Composites Part B: Engineering.*, vol. 43, no. 3, pp. 1453-1458.
22. Tovstik P. E. 2019. "Two-dimensional model of second-order accuracy for an anisotropic plate", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, vol. 52, no. 1, pp. 112-121.
23. Zenkour A. M., El-Mekawy H. F. 2014. "Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores", *Journal of Vibroengineering*, vol. 16, no. 7, pp. 3260-3272.
24. Hadavinia H. et al. 2006. "Deriving shear correction factor for thick laminated plates using the energy equivalence method", *Structural Durability & Health Monitoring.*, vol. 2, no. 4, pp. 197.
25. Altenbach, H., and Eremeyev, V. A. 2010. "On the bending of viscoelastic plates made of polymer foams", *Acta Mechanica*, vol. 204, no. 3, pp. 137-154.
26. Lekhnitskii, S. G. 1968. "Anisotropic plates", *Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh.*
27. Ambartsumian S. A. 1970. "Theory of anisotropic plates: strength, stability, vibration", *Technomic Publishing Company.*
28. Vlasov B. F. 1957. "On the equations of bending of plates" (in Russian), *Doklady Akademii Nauk Azerbejanskoi SSR*, vol. 13, no. 9, pp. 955-959.
29. Murakami H. 1986. "Laminated composite plate theory with improved in-plane responses".
30. Grigolyuk E. I., Kulikov G. M. 2005. "Development of the Theory of Elastic Multilayered Plates and Shells", *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 11, no. 2, pp. 439-448.
31. Si J., Zhang Y. 2022. "An enhanced higher order zigzag theory for laminated composite plates under mechanical/thermal loading", *Composite Structures*, vol. 282, p. 115074.
32. Lezgy-Nazargah M., Salahshuran S. 2018. "A new mixed-field theory for bending and vibration analysis of multi-layered composite plate", *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, vol. 18, no. 3, pp. 818-832.
33. Pagano N. J. 1970. "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *Journal of composite materials*, vol. 4, no. 1, pp. 20-34.
34. Carrera E. 2000. "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates", *Composite structures*, vol. 50, no. 2, pp. 183-198.

35. Carrera E. 2003. “Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking“, *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 215-296.
36. Filippi M., Carrera E., Valvano S. 2018. “Analysis of multilayered structures embedding viscoelastic layers by higher-order, and zig-zag plate elements“, *Composites Part B: Engineering*, vol. 154, pp. 77-89.
37. Pobedrya B. E. 1984. “Mechanics of composite materials“, *Izd. Mosk. Univ., Moscow.*
38. Gorbachev V. I., Kabanova L. A. 2018. “Formulation of problems in the general Kirchhoff—Love theory of inhomogeneous anisotropic plates“, *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 73, no. 3, pp. 60–66.
39. Kabanova L. A. 2022. “The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem“, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 7, pp 1628–1639.

Получено: 18.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022