ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 2 (2014)

УДК 512.548

К ТЕОРЕМЕ ПОСТА О СМЕЖНЫХ КЛАССАХ

А. М. Гальмак (г. Могилев, Белоруссия),
Н. А. Щучкин (г. Волгоград)

mti@mogilev.by   nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Аннотация

В теории полиадических групп велика роль групп A^* и A_0, фигурирующих в теореме Поста о смежных классах [2], утверждающей, что для всякой n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ существует группа A^*, в которой имеется нормальная подгруппа A_0 такая, что фактор-группа A^*/A_0 — циклическая группа порядка $n-1$. Образующий смежный класс xA_0 этой циклической группы является n-арной группой с n-арной операцией, производной от операции в группе A^*, при этом n-арные группы $\langle A, [\ ]\rangle$ и $\langle xA_0, [\ ]\rangle$ изоморфны. Группу A^* называют универсальной обертывающей группой Поста, а группу A_0 — соответствующей группой.

В начале статьи рассматривается обобщение теоремы Поста о смежных классах: для всякой n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, $n = k(m-1)+1$, в универсальной обертывающей группе Поста A^* имеется нормальная подгруппа ${}^mA$ такая, что фактор-группа $A^*/{}^mA$ — циклическая группа порядка $m-1$. Причем, $A_0 \subseteq {}^mA \subseteq A^*$ и ${}^mA/A_0$ – циклическая группа порядка k.

В статье изучается перестановочность элементов в n-арной группе. В частности, изучается m-полуабелевость в n-арных группах, которая является обобщением широко изучаемых понятий абелевости и полуабелевости. Напомним, что n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ называется абелевой, если в ней для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ верно тождество

$$[a_1a_2\ldots a_n] = [a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\ldots a_{\sigma(n)}],$$

и n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ называется полуабелевой, если в ней верно тождество

$$[aa_1\ldots a_{n-2}b] = [ba_1\ldots a_{n-2}a].$$

Обобщая эти два определения, Э. Пост назвал n-арную группу $\langle A, [\ ]\rangle$ m-полуабелевой, если $m-1$ делит $n-1$ и

$$(aa_1\ldots a_{m-2}b, ba_1\ldots a_{m-2}a) \in \theta_A$$

для любых $a, a_1, \ldots, a_{m-2}, b \in A$.

Установлен новый критерий m-полуабелевости n-арной группы, сформулированный с помощью подгруппы ${}^mA$ универсальной обертывающей группы Поста: n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ является m-полуабелевой тогда и только тогда, когда группа ${}^mA$ абелева.

Для $n = k(m-1)+1$ с помощью фиксированных элементов $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ на n-арной группе $\langle A, [\ ]\rangle$ строится $(k+1)$-арная группа $\langle A, [\ ]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$. На смежном классе $A^{(m-1)}$ из обобщенной теоремы Поста строится $(k+1)$-арная группа $\langle A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1}\rangle$. Доказывается изоморфизм построенных $(k+1)$-арных групп. Этот изоморфизм позволяет доказать еще один критерий m-полуабелевости n-арной группы: n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ m-полуабелева тогда и только тогда, когда для некоторых $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$-арная группа $\langle A, [\ ]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$ является абелевой.

Ключевые слова: n-арная группа, полуабелевость, смежный класс.

Библиография: 16 названий.

TO THE POST'S COSET THEOREM

A. M. Gal'mak (Mogilev), N. A. Shchuchkin (Volgograd)

mti@mogilev.by nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Abstract

In the theory of polyadic groups plays an important role groups A^* and A_0, appearing in Post's Coset Theorem [2], asserts that for every n-ary groups $\langle A, [\ ]\rangle$ exists a group of A^*, in which there is normal subgroup A_0 such that the factor group A^*/A_0 — cyclic group of order $n-1$. Generator xA_0 this cyclic group is the n-ary group with n-ary operation derived from operation in the group A^*, wherein n-ary groups $\langle A, [\ ]\rangle$ and $\langle xA_0, [\ ]\rangle$ isomorphic. Group A^* is called the Post's universal covering group, and the group A_0 — appropriate group.

The article begins with a generalization of the Post's Coset Theorem: for every n-ary groups $\langle A, [\ ]\rangle$, $n = k(m-1)+1$, the Post's universal covering group A^* has a normal subgroup ${}^mA$ such that the factor group $A^*/{}^mA$ — cyclic group of order $m-1$. Moreover, $A_0 \subseteq {}^mA \subseteq A^*$ and ${}^mA/A_0$ - cyclic group of order k.

In this paper we study the permutability of elements in n-ary group. In particular, we study the m-semi-commutativity in n-ary groups, which is a generalization of of the well-known concepts of commutativity and semi-commutativity. Recall that the n-ary group $\langle A, [\ ]\rangle$ is called abelian if it contains any substitution σ of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ true identity

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}],$$

and n-ary group $\langle A, [\ ]\rangle$ is called a semi-abelian if it true identity

$$[a a_1 \ldots a_{n-2} b] = [b a_1 \ldots a_{n-2} a].$$

Summarizing these two definitions, E. Post called n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$ m-semi-abelian if $m-1$ divides $n-1$ and

$$(aa_1 \ldots a_{m-2}b, ba_1 \ldots a_{m-2}a) \in \theta_A$$

for any $a, a_1, \ldots, a_{m-2}, b \in A$.

We have established a new criterion of m-semi-commutativity of n-ary group, formulated by a subgroup ${}^mA$ of the Post's universal covering group: n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$ is m-semi-abelian if and only if the group ${}^mA$ is abelian.

For $n = k(m-1)+1$ by fixed elements $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ on n-ary group of $\langle A, [\,]\rangle$ construct $(k+1)$-ary group $\langle A, [\,]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$. On the coset $A^{(m-1)}$ in generalized Post's Coset Theorem construct $(k+1)$-ary group $\langle A^{(m-1)}, [\,]_{k+1}\rangle$. Proved isomorphism of constructed $(k+1)$-ary groups. This isomorphism allows us to prove another criterion m-semi-commutativity n-ary group: n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$ is m-semi-abelian if and only if for some $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$-ary group $\langle A, [\,]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$ is abelian.

Keywords: n-ary group, semi-commutativity, coset.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Алгебру $\langle G, f\rangle$ с n-арной операцией f $(n \geqslant 3)$ называют n-арной группой ([1],[2]), если в ней выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}) = f(a_1, \ldots, a_i, f(a_{i+1}, \ldots, a_{i+n}), a_{i+n+1}, \ldots, a_{2n-1})$$

для всех $i = 1, \ldots, n-1$ и разрешимы каждое из уравнений

$$f(x, a_1, \ldots, a_{n-1}) = b, \; f(a_1, \ldots, a_{n-1}, y) = b$$

для любых $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ из G. Имеются и другие эквивалентные определения n-арной группы (см., например, [3], [4], [5]).

Теория n-арных групп относится к многочисленным алгебраическим теориям, которые являются как классическими объектами общей алгебры, так и разделами теории универсальных алгебр. Необходимость изучения таких теорий отмечал А.Г. Курош (см. [6]).

Пусть $\langle A, [\,]\rangle$ — n-арная группа, F_A — свободная полугруппа над алфавитом A, θ_A — отношение эквивалентности Поста [1], [7] определенное на F_A по правилу: $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ из F_A такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Легко проверяется, что θ_A — конгруэнция на полугруппе F_A, а полугруппа $A^* = F_A/\theta_A$ является группой.

Для всякого $i = 1, \ldots, n-1$ определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta_A(\alpha) \mid \theta_A(\alpha) \in A^*, l(\alpha) = i\},$$

где $\theta_A(\alpha)$ — класс конгруэнции θ_A, содержащий последовательность α; $l(\alpha)$ — длина последовательности α. В частности

$$A' = \{\theta_A(a) \mid a \in A\},\ A'' = \{\theta_A(ab) \mid a, b \in A\}.$$

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ будем обозначать распространенным в литературе по n-арным группам символом A_0, то есть $A_0 = A^{(n-1)}$.

Легко проверяется (см., например, предложение 1.3.7 из [8], [9]), что $A^{(i)} \cap A^{(j)} = \emptyset$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j$.

Замечание 1. *Если $n = k(m-1)+1$, где $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$, то легко проверяется, что множество $A^{(m-1)}$ являентся $(k+1)$-арной группой относительно $(k+1)$-арной операциии*

$$[\theta_A(\alpha_1)\theta_A(\alpha_2)\ldots\theta_A(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta_A(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}),\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in A^{(m-1)}.$$

Если $m = 2$, то $k = n-1$ и получаем n-арную операцию

$$[\theta_A(a_1)\theta_A(a_2)\ldots\theta_A(a_n)]_n = \theta_A(a_1a_2\ldots a_n) = \theta_A([a_1a_2\ldots a_n]),\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

При этом, как не сложно установить, отображение $\varphi : a \to \theta_A(a)$ является изоморфизмом n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ на n-арную группу $\langle A', [\ ]_n\rangle$.

Если $m = n$, то $k = 1$ и получаем бинарную операцию

$$[\theta_A(a_1a_2\ldots a_{n-1})\theta_A(b_1b_2\ldots b_{n-1})]_2 = \theta_A(a_1a_2\ldots a_{n-1}b_1b_2\ldots b_{n-1}) =$$

$$= \theta_A([a_1a_2\ldots a_{n-1}b_1]b_2\ldots b_{n-1}),\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in A.$$

При этом группу $\langle A^{(n-1)} = A_0, [\ ]_2\rangle$ называют соответствующей *для n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ и для сокращения записей обозначают одним символом A_0.*

Замечание 2. *Для n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ обозначим символом $[\ ]_n$ n-арную операцию, производную от операции в A^*:*

$$[\theta_A(\alpha_1)\theta_A(\alpha_2)\ldots\theta_A(\alpha_n)]_n = \theta_A(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n),\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A^*.$$

Легко проверяется, что для любого $i = 1, \ldots, n-1$ множество $A^{(i)}$ замкнуто относительно этой n-арной операции, а универсальная алгебра $\langle A^{(i)}, [\ ]_n\rangle$ является n-арной подгруппой n-арной группы $\langle A^*, [\ ]_n\rangle$. Ясно, что на множестве A' n-арная операция $[\ ]_n$ совпадает с n-арной операцией из замечания 1.

Если $m-1$ делит $n-1$, где $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$, то положим

$${}^mA = \{\theta_A(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) \text{ кратно } m-1\}.$$

При $m = 2$ множество ${}^mA$ совпадает с универсальной обертывающей группой A^*, а при $m = n$ множество ${}^mA$ совпадает с соответствующей группой A_0:

$${}^2A = A^*,\ {}^nA = A_0.$$

2. Обобщение теоремы Поста о смежных классах

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Поста о смежных классах.

Теорема 1. *Пусть* $\langle A, [\ ]\rangle$ — *n-арная группа,* $n = k(m-1)+1$. *Тогда:*

1) $A_0 \subseteq {}^mA \subseteq A^*$;

2) ${}^mA = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))}$;

3) ${}^mA$ — *инвариантная подгруппа группы* A^*;

4) группа ${}^mA$ *порождается множеством* $A^{(m-1)}$;

5) ${}^mA/A_0 = \{A^{(m-1)}, A^{(2(m-1))}, \ldots, A^{(k(m-1))} = A_0\}$ — *циклическая группа порядка k, порожденная элементом* $A^{(m-1)}$;

6) $A^*/{}^mA$ — *циклическая группа порядка* $m-1$.

Доказательство. 1) Так как $F_A/\theta_A = A^*$, то из определения множества ${}^mA$ вытекает включение ${}^mA \subseteq A^*$. А так как $n = k(m-1)+1$, то $n-1$ кратно $m-1$. Следовательно, $A_0 = A^{(n-1)} \subseteq {}^mA$.

2) Включение $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))} \subseteq {}^mA$ очевидно.

Пусть теперь $\theta_A(\alpha) = \theta_A(a_1 \ldots a_{t(m-1)})$ — произвольный элемент из ${}^mA$. Если $1 \leqslant t \leqslant k$, то

$$\theta_A(\alpha) \in A^{(t(m-1))} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))}.$$

Если же $t > k$, то $t = sk + r$, где $s \geqslant 1$, $1 \leqslant r \leqslant k$. Тогда

$$\theta_A(\alpha) = \theta_A(a_1 \ldots a_{t(m-1)}) = \theta_A(a_1 \ldots a_{(sk+r)(m-1)}) =$$

$$= \theta_A(a_1 \ldots a_{sk(m-1)+r(m-1)}) = \theta_A(a_1 \ldots a_{s(n-1)+r(m-1)}) =$$

$$= \theta_A([a_1 \ldots a_{s(n-1)+1}]a_{s(n-1)+2} \ldots a_{s(n-1)+r(m-1)}) =$$

$$= \theta_A(b_1 b_2 \ldots b_{r(m-1)}) \in A^{(r(m-1))} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))},$$

где $b_1 = [a_1 \ldots a_{s(n-1)+1}], b_2 = a_{s(n-1)+2}, \ldots, b_{r(m-1)} = a_{s(n-1)+r(m-1)}$.

Таким образом, доказано включение ${}^mA \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))}$. Из доказанных включений следует требуемое равенство.

3) Если $\theta_A(\alpha), \theta_A(\beta)$ — произвольные элементы из ${}^mA$, то длины $l(\alpha)$ и $l(\beta)$ кратны $m-1$. Тогда $l(\alpha\beta) = l(\alpha) + l(\beta)$ также кратно $m-1$. Следовательно,

$$\theta_A(\alpha)\theta_A(\beta) = \theta_A(\alpha\beta) \in {}^mA,$$

то есть множество ${}^mA$ замкнуто относительно операции в группе A^*.

Так как $A_0 \subseteq {}^mA$, то в ${}^mA$ имеется нейтральный элемент E, совпадающий с классом конгруэнции θ_A, содержащим все нейтральные последовательности n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$.

Пусть $\theta_A(\alpha)$ — произвольный элемент из ${}^mA$ и $\theta_A^{-1}(\alpha) = \theta_A(\beta)$ — обратный к нему в A^*. Так как

$$E = \theta_A(\alpha)\theta_A^{-1}(\alpha) = \theta_A(\alpha)\theta_A(\beta) = \theta_A(\alpha\beta),$$

то $\alpha\beta$ — нейтральная последовательность n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, длина $l(\alpha\beta)$ которой, как известно, кратна $n-1$. А так как $n = k(m-1)+1$, то число $l(\alpha\beta)$ кратно $m-1$. Так как числа $l(\alpha)$ и $l(\alpha\beta)$ кратны $m-1$, то из равенства

$$l(\alpha\beta) = l(\alpha) + l(\beta)$$

следует, что длина $l(\beta)$ последовательности β также кратна $m-1$.

Таким образом, множество ${}^mA$ содержит нейтральный элемент E группы A^* и все свои обратные. Следовательно, ${}^mA$ — подгруппа группы A^*.

Так как

$$\theta_A(\beta)A^{(j)}\theta_A^{-1}(\beta) = A^{(j)}$$

для любого $\theta_A(\beta) \in A^*$ и любого $j = 1, \ldots, n-1$, то

$$\theta_A(\beta)^mA\theta_A^{-1}(\beta) = \theta_A(\beta)(\bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))})\theta_A^{-1}(\beta) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k}(\theta_A(\beta)A^{(i(m-1))}\theta_A^{-1}(\beta)) = \bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))} = {}^mA.$$

Следовательно, подгруппа ${}^mA$ инвариантна в группе A^*.

4) Пусть $\theta_A(\alpha)$ — любой элемент из ${}^mA$. Согласно 2), $\theta_A(\alpha) \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))}$, то есть для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$ и некоторых $a_1, \ldots, a_{i(m-1)} \in A$ имеем

$$\theta_A(\alpha) = \theta_A(a_1 \ldots a_{i(m-1)}) =$$

$$= \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})\theta_A(a_m \ldots a_{2(m-1)}) \ldots \theta_A(a_{(i-1)(m-1)+1} \ldots a_{i(m-1)}),$$

где $\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}), \theta_A(a_m \ldots a_{2(m-1)}), \ldots, \theta_A(a_{(i-1)(m-1)+1} \ldots a_{i(m-1)}) \in A^{(m-1)}$.

Таким образом, произвольный элемент группы ${}^mA$ представим в виде произведения элементов из $A^{(m-1)}$. Это значит, что группа ${}^mA$ порождается множеством $A^{(m-1)}$.

5) Инвариантность A_0 в ${}^mA$ следует из инвариантности A_0 в A^*. Так как, согласно 4) теоремы 1.4.2 [8]

$$\theta_A(\beta)A_0 = A_0\theta_A(\beta) = A^{(i(m-1))}$$

для любого $\theta_A(\beta) \in A^{(i(m-1))}$, то

$$^mA/A_0 = \{A^{(m-1)}, A^{(2(m-1))}, \dots, A^{(k(m-1))}\}.$$

Из легко проверяемого равенства

$$\underbrace{A^{(m-1)} \dots A^{(m-1)}}_{i} = A^{(i(m-1))}$$

следует, что $^mA/A_0$ — циклическая группа, порожденная элементом $A^{(m-1)}$.

6) Так как A^*/A_0 — циклическая группа порядка $n-1$, то, учитывая изоморфизм

$$(A^*/A_0)/(^mA/A_0) \cong A^*/^mA$$

и порядок $|^mA/A_0| = k$, видим, что $A^*/^mA$ —циклическая группа порядка

$$|A^*/^mA| = (n-1)/k = k(m-1)/k = m-1.$$

Теорема доказана. □

Так как $A^{(i(m-1))} \cap A^{(j(m-1))} = \emptyset$ при $i \neq j$, то из 2) предыдущей теоремы вытекает

Следствие 1. *Если $n = k(m-1)+1$, $\langle A, [\ ]\rangle$ — конечная n-арная группа порядка γ, то порядок группы ^mA равен $k\gamma$.*

Замечание 3. *Если в теореме 1 положить $m = 2$, то тогда $k = n-1$, $^mA = A^*$, а утверждения 1) — 6) примут следующий вид:*

1) $A_0 \subseteq A^*$;

2) $A^* = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A^{(i)}$;

3) A^* — инвариантная подгруппа группы A^*;

4) группа A^* порождается множеством A';

5) $A^*/A_0 = \{A', A'', \dots, A^{(n-1)} = A_0\}$ — циклическая группа порядка $n-1$, порожденная элементом A';

6) A^*/A^* — циклическая группа порядка 1.

Утверждения 3 и 6 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах ([1], теорема 1.4.2 из [8]).

Замечание 4. *Если в теореме 1 положить $m = n$, то тогда $k = 1$, $^mA = A_0$, а утверждения*
1) — 6) примут следующий вид:

1) $A_0 \subseteq A^*$;

2) $A_0 = A_0$;

3) A_0 — инвариантная подгруппа группы A^*;

4) группа A_0 порождается множеством A_0;

5) A_0/A_0 — циклическая группа порядка 1;

6) A^*/A_0 — циклическая группа порядка $n-1$.

Утверждения 2, 4 и 5 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах.

Таким образом, теорема 1 является обобщением теоремы Поста о смежных классах. При этом утверждение последней о том, что A^*/A_0 — циклическая группа порядка $n-1$, может быть получено из теоремы 1 двояко: из утверждения 5) при $m=2$; из утверждения 6) при $m=n$. Вообще говоря, указанное обобщение является формальным, так как утверждения теоремы 1 могут быть извлечены из теоремы Поста о смежных классах. Например, цикличность группы ${}^mA/A_0$ вытекает из того, что ${}^mA/A_0$ — подгруппа циклической группы A^*/A_0; а цикличность группы $A^*/{}^mA$, как видно из доказательства утверждения 6), вытекает из цикличности группы A^*/A_0 и изоморфизма

$$(A^*/A_0)/({}^mA/A_0) \cong A^*/{}^mA.$$

Используя утверждения 3) и 4) предложения 1.3.7 [8] несложно получить разложения групп A^* и ${}^mA$ на непересекающиеся смежные классы по подгруппам ${}^mA$ и A_0 соответственно.

Предложение 1. *Пусть* $\langle A, [\,]\rangle$ — *n-арная группа,* $n = k(m-1)+1$, $b \in A$. *Тогда:*

$$1)\quad A^* = {}^mA + \theta_A(b)^mA + \theta_A^2(b)^mA + \ldots + \theta_A^{m-2}(b)^mA =$$
$$= {}^mA + {}^mA\theta_A(b) + {}^mA\theta_A^2(b) + \ldots + {}^mA\theta_A^{m-2}(b);$$
$$2)\quad {}^mA = A_0 + \theta_A(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})A_0 + \theta_A^2(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})A_0 + \ldots + \theta_A^{k-1}(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})A_0 =$$
$$= A_0 + A_0\theta_A(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}) + A_0\theta_A^2(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}) + \ldots + A_0\theta_A^{k-1}(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}).$$

Известное разложение Поста ([1], предложение 1.4.6 из [8])

$$A^* = A_0 + \theta_A(b)A_0 + \theta_A^2(b)A_0 + \ldots + \theta_A^{n-2}(b)A_0 =$$
$$= A_0 + A_0\theta_A(b) + A_0\theta_A^2(b) + \ldots + A_0\theta_A^{n-2}(b)$$

может быть получено либо из 1) предыдущего предложения при $m = n$, либо из 2) этого же предложения при $m = 2$.

Согласно Э. Посту [1] группа G называется *обертывающей* для n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, если:

1) группа G порождается множеством A;

2) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ бинарная и n-арная операции связаны равенством

$$[x_1x_2\ldots x_n] = x_1x_2\ldots x_n.$$

Любая обертывающая группа G n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ является гомоморфным образом универсальной обертывающей группы Поста A^* ([1], теорема 1.4.9 из [8]).

Замечание 5. *Из утверждения 4) теоремы* 1 и определения $(k+1)$-арной операции $[\ ]_{k+1}$ следует, что группа ${}^mA$ является обертывающей для $(k+1)$-арной группы $\langle A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1}\rangle$. Более того, группа ${}^mA$ изоморфна универсальной обертывающей группе Поста $(A^{(m-1)})^*$ для $(k+1)$-арной группы $\langle A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1}\rangle$.

Группа A^* из теоремы Поста о смежных классах и ее подгруппа A_0 используются при изучении n-арных групп. Яркими примерами эффективного использования этих групп являются описание В. А. Артамоновым свободных n-арных групп [10] и шрайеровых многообразий n-арных групп [11], а также разработанная Э. Постом [1] и С. А. Русаковым [12] силовская теория n-арных групп. Кроме того, в [13] с помощью группы A^* описывались свободные абелевы n-арные группы, а в [14] с помощью подгруппы A_0 описывались конгруэнции в n-арной группе $\langle A, [\ ]\rangle$. В следующем разделе будет показано, что при изучении n-арных групп с успехом может быть использована и группа ${}^mA$, частным случаем которой, как отмечалось в конце раздела 1, являются как сама группа A^*, так и ее подгруппа A_0.

3. Критерий m-полуабелевости n-арной группы

Сформулируем и докажем с помощью группы ${}^mA$ критерий m-полуабелевости n-арной группы. Предварительно напомним определения некоторых понятий и докажем две леммы.

n-Арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ называется абелевой [15], если в ней для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ верно тождество

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}].$$

n-Арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ называется полуабелевой [15], если в ней верно тождество

$$[aa_1 \ldots a_{n-2}b] = [ba_1 \ldots a_{n-2}a].$$

Э. Пост объединил абелевость и полуабелевость общим понятием, назвав [1] n-арную группу $\langle A, [\ ]\rangle$ m-полуабелевой, если $m-1$ делит $n-1$ и

$$(aa_1 \ldots a_{m-2}b, ba_1 \ldots a_{m-2}a) \in \theta_A$$

для любых $a, a_1, \ldots, a_{m-2}, b \in A$.

Лемма 1. *В m-полуабелевой n-арной группе $\langle A, [\ ]\rangle$ для всех*

$$a, a_1, \ldots, a_{i(m-1)-1}, b \in A$$

при любом $i \geqslant 1$ последовательности

$$aa_1 \ldots a_{i(m-1)-1}b \quad \text{и} \quad ba_1 \ldots a_{i(m-1)-1}a$$

эквивалентны.

Доказательство. Для сокращения записей положим

$$\alpha_1 = a_1 \ldots a_{m-2},\ c_1 = a_{m-1},$$

$$\alpha_2 = a_m \ldots a_{2(m-1)-1},\ c_2 = a_{2(m-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{i-1} = a_{(i-2)(m-1)+1} \ldots a_{(i-1)(m-1)-1},\ c_{i-1} = a_{(i-1)(m-1)},$$

$$\alpha_i = a_{(i-1)(m-1)+1} \ldots a_{i(m-1)-1}.$$

Тогда, используя m-полуабелевость $\langle A, [\,]\rangle$, будем иметь

$$\theta_A(aa_1 \ldots a_{i(m-1)-1}b) = \theta_A(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2 \ldots \alpha_{i-1}c_{i-1}\alpha_ib) =$$

$$= \theta_A(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2 \ldots \alpha_{i-1})\theta_A(c_{i-1}\alpha_ib) = \theta_A(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2 \ldots \alpha_{i-1})\theta_A(b\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_A(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2 \ldots \alpha_{i-2}c_{i-2}\alpha_{i-1}b)\theta_A(\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_A(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2 \ldots \alpha_{i-2})\theta_A(c_{i-2}\alpha_{i-1}b)\theta_A(\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_A(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2 \ldots \alpha_{i-2})\theta_A(b\alpha_{i-1}c_{i-2})\theta_A(\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_A(a\alpha_1c_1\alpha_2c_2 \ldots \alpha_{i-2}b)\theta_A(\alpha_{i-1}c_{i-2}\alpha_ic_{i-1}) = \ldots$$

$$\ldots = \theta_A(a\alpha_1b)\theta_A(\alpha_2c_1 \ldots \alpha_ic_{i-1}) = \theta_A(b\alpha_1a)\theta_A(\alpha_2c_1 \ldots \alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_A(b\alpha_1)\theta_A(a\alpha_2c_1)\theta_A(\alpha_3c_2 \ldots \alpha_ic_{i-1}) = \theta_A(b\alpha_1)\theta_A(c_1\alpha_2a)\theta_A(\alpha_3c_2 \ldots \alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_A(b\alpha_1c_1\alpha_2)\theta_A(a\alpha_3c_2 \ldots \alpha_ic_{i-1}) = \ldots$$

$$\ldots = \theta_A(b\alpha_1c_1\alpha_2 \ldots \alpha_{i-2}c_{i-2}\alpha_{i-1})\theta_A(a\alpha_ic_{i-1}) =$$

$$= \theta_A(b\alpha_1c_1 \ldots \alpha_{i-2}c_{i-2}\alpha_{i-1})\theta_A(c_{i-1}\alpha_ia) =$$

$$= \theta_A(b\alpha_1c_1 \ldots \alpha_{i-1}c_{i-1}\alpha_ia) = \theta_A(ba_1 \ldots a_{i(m-1)-1}a),$$

то есть

$$\theta_A(aa_1 \ldots a_{i(m-1)-1}b) = \theta_A(ba_1 \ldots a_{i(m-1)-1}a).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *n-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ является m-полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_{m-1} \in A$ последовательности*

$$a_1 \ldots a_{m-1}b_1 \ldots b_{m-1} \quad \text{и} \quad b_1 \ldots b_{m-1}a_1 \ldots a_{m-1} \tag{1}$$

эквивалентны.

Доказательство. Зафиксировав $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$, получим

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}) = \theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}),$$

$$\theta_A(b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_A(bc_1 \ldots c_{m-2})$$

для некоторых $a, b \in A$.

Необходимость. Так как $\langle A, [\ ]\rangle$ m-полуабелева, то

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}bc_1 \ldots c_{m-2}) =$$

$$= \theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}b)\theta_A(c_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_A(bc_1 \ldots c_{m-2}a)\theta_A(c_1 \ldots c_{m-2}) =$$
$$= \theta_A(bc_1 \ldots c_{m-2})\theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_A(b_1 \ldots b_{m-1}a_1 \ldots a_{m-1}),$$

то есть последовательности (1) эквивалентны.

Достаточность. Из эквивалентности последовательностей (1) следует

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_A(b_1 \ldots b_{m-1}a_1 \ldots a_{m-1}),$$

откуда

$$\theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}bc_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_A(bc_1 \ldots c_{m-2}ac_1 \ldots c_{m-2}),$$
$$\theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}b)\theta_A(c_1 \ldots c_{m-2}) = \theta_A(bc_1 \ldots c_{m-2}a)\theta_A(c_1 \ldots c_{m-2}),$$
$$\theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}b) = \theta_A(bc_1 \ldots c_{m-2}a),$$

то есть последовательности $ac_1 \ldots c_{m-2}b$ и $bc_1 \ldots c_{m-2}a$ эквивалентны. По теореме 2.6.6 [8] n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ будет m-полуабелевой. Лемма доказана. □

Замечание 6. *Если в лемме* 2 положить $m = n$, то получим результат Э. Поста ([1], с.245), согласно которому *n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1} \in A$ последовательности*

$$a_1 \ldots a_{n-1}b_1 \ldots b_{n-1} \quad \text{и} \quad b_1 \ldots b_{n-1}a_1 \ldots a_{n-1}$$

эквивалентны.

Замечание 7. *Если $n = k(m-1) + 1$, то непосредственным следствием леммы* 2 является равносильность m-полуабелевости n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ и абелевости $(k+1)$-арной группы $\langle A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1}\rangle$ из замечания 1.

Замечание 8. *При $n = k(m-1) + 1$ еще одним непосредственным следствием леммы* 2 является равносильность m-полуабелевости n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ и абелевости n-арной группы $\langle A^{(m-1)}, [\ ]_n\rangle$ из замечания 2.

Теорема 2. *n-Арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ является m-полуабелевой тогда и только тогда, когда группа ${}^mA$ абелева.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть

$$u = \theta_A(a_1 \ldots a_{i(m-1)}),\ v = \theta_A(b_1 \ldots b_{j(m-1)}),$$

где $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $n = k(m-1)+1$, произвольные элементы из ${}^mA$. Если зафиксировать $c \in A$, то u и v можно представить в виде

$$u = \theta_A(a \underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1}),\ v = \theta_A(b \underbrace{c \ \ldots \ c}_{j(m-1)-1})$$

для некоторых $a, b \in A$. Пусть для определенности $i < j$. Тогда, дважды применяя лемму 1, получим

$$uv = \theta_A(a \underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1})\theta_A(b \underbrace{c \ \ldots \ c}_{j(m-1)-1}) = \theta_A(a \underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1} b)\theta_A(\underbrace{c \ \ldots \ c}_{j(m-1)-1}) =$$

$$= \theta_A(b \underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1} a)\theta_A(\underbrace{c \ \ldots \ c}_{j(m-1)-1}) = \theta_A(b \underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1})\theta_A(a \underbrace{c \ldots \ c}_{(j-i)(m-1)-1} c)\theta_A(\underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1}) =$$

$$= \theta_A(b \underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1})\theta_A(c \underbrace{c \ \ldots \ c}_{(j-i)(m-1)-1} a)\theta_A(\underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1}) = \theta_A(b \underbrace{c \ \ldots \ c}_{j(m-1)-1})\theta_A(a \underbrace{c \ \ldots \ c}_{i(m-1)-1}) = vu,$$

то есть группа ${}^mA$ абелева.

Если $i = j$, то проводятся те же самые рассуждения, но лемма 1 применяется один раз.

Достаточность. Если $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_{m-1}$ — произвольные элементы из A, то из абелевости ${}^mA$ следует

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})\theta_A(b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_A(b_1 \ldots b_{m-1})\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}),$$

откуда

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1} b_1 \ldots b_{m-1}) = \theta_A(b_1 \ldots b_{m-1} a_1 \ldots a_{m-1}),$$

то есть последовательности

$$a_1 \ldots a_{m-1} b_1 \ldots b_{m-1} \quad \text{и} \quad b_1 \ldots b_{m-1} a_1 \ldots a_{m-1}$$

эквивалентны. Тогда по лемме 2 n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ m-полуабелева. Теорема доказана. □

Полагая в теореме 2 $m = 2$, получим

Следствие 2. [1] *n-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда ее универсальная обертывающая группа A^* абелева.*

Полагая в теореме 2 $m = n$, получим

Следствие 3. [1] *n-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда ее соответствующая группа A_0 абелева.*

Заметим, что следствие 3 равносильно результату Э. Поста, сформулированному в замечании 6.

Для полноты изложения приведем еще один критерий m-полуабелевости n-арной группы [8], в формулировке которого присутствует $(k+1)$-арная группа, изоморфная $(k+1)$-арной группе из замечания 1. Предварительно зафиксируем в n-арной группе $\langle A, [\ ]\rangle$, где $n = k(m-1)+1$, элементы $c_1, \ldots, c_{m-2}$ и определим на A $(k+1)$-арную операцию $[\ ]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}$ следующим образом:

$$[a_1a_2\ldots a_{k+1}]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}} = [a_1c_1\ldots c_{m-2}a_2c_1\ldots c_{m-2}\ldots a_kc_1\ldots c_{m-2}a_{k+1}].$$

Проведя соответствующие вычисления (см., например, [8]), можно убедиться в том, что $\langle A, [\ ]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$ — $(k+1)$-арная группа. Этот результат может быть получен и как следствие изоморфизма из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $n = k(m-1)+1$, $\langle A, [\ ]\rangle$ — n-арная группа, $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$. Тогда $(k+1)$-арные группы $\langle A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1}\rangle$ и $\langle A, [\ ]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$ изоморфны.*

Доказательство. Определим отображение $\tau : A^{(m-1)} \to A$ по правилу:

$$\tau : \theta_A(ac_1\ldots c_{m-2}) \to a.$$

Ясно, что τ — биекция $A^{(m-1)}$ на A.

Для любых

$$\theta_A(a_1c_1\ldots c_{m-2}), \ldots, \theta_A(a_{k+1}c_1\ldots c_{m-2}) \in A^{(m-1)}$$

имеем

$$\begin{gathered}\tau([\theta_A(a_1c_1\ldots c_{m-2})\ldots\theta_A(a_{k+1}c_1\ldots c_{m-2})]_{k+1}) = \\ = \tau([\theta_A([a_1c_1\ldots c_{m-2}\ldots a_kc_1\ldots c_{m-2}a_{k+1}]c_1\ldots c_{m-2})) = \\ = [a_1c_1\ldots c_{m-2}\ldots a_kc_1\ldots c_{m-2}a_{k+1}] = [a_1a_2\ldots a_{k+1}]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}} = \\ = [\tau(\theta_A(a_1c_1\ldots c_{m-2}))\tau(\theta_A(a_2c_1\ldots c_{m-2}))\ldots\tau(\theta_A(a_{k+1}c_1\ldots c_{m-2}))]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}},\end{gathered}$$

то есть

$$\begin{gathered}\tau([\theta_A(a_1c_1\ldots c_{m-2})\ldots\theta_A(a_{k+1}c_1\ldots c_{m-2})]_{k+1}) = \\ = [\tau(\theta_A(a_1c_1\ldots c_{m-2}))\tau(\theta_A(a_2c_1\ldots c_{m-2}))\ldots\tau(\theta_A(a_{k+1}c_1\ldots c_{m-2}))]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}.\end{gathered}$$

Лемма доказана. □

Замечание 7 и лемма 3 позволяют сформулировать следующий критерий m-полуабелевости n-арной группы.

Предложение 2. ([8], предложение 2.6.14) *Пусть $n = k(m-1)+1$, $\langle A, [\ ]\rangle$ — n-арная группа. Тогда:*

1) если $\langle A, [\ ]\rangle$ — m-полуабелева, то для любых $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$-арная группа $\langle A, [\ ]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$ — абелева;

2) если для некоторых $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$-арная группа $\langle A, [\ ]_{k+1,c_1\ldots c_{m-2}}\rangle$ — абелева, то $\langle A, [\ ]\rangle$ — m-полуабелева.

Замечание 9. *Для обозначения операции $[\ ]_{2,c_1\ldots c_{n-2}}$ используется также символ $\circ_c$ из теоремы Поста-Глускина-Хоссу* [8], [16], *где элемент c определяется нейтральностью последовательности $cc_1\ldots c_{n-2}$.*

4. Заключение.

Получены следующие основные результаты:

1) приведено обобщение теоремы Поста о смежных классах. В универсальной обертывающей группе A^* n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, $n = k(m-1)+1$, найдена инвариантная подгруппа ${}^mA$, где $A_0 \subseteq {}^mA \subseteq A^*$, такая, что $A^*/{}^mA$ — циклическая группа порядка $m-1$ и ${}^mA/A_0$ — циклическая группа порядка k (A_0 – соответствующая подгруппа для $\langle A, [\,]\rangle$) (теорема 1);

2) получены разложения групп A^* и ${}^mA$ на непересекающиеся смежные классы по подгруппам ${}^mA$ и A_0 соответственно (предложение 1).

3) с помощью группы ${}^mA$ доказан критерий m-полуабелевости n-арной группы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) — P. 208–350.

2. Сушкевич А. К. Теория обобщенных групп. Харьков-Киев: Хозтехиздат, 1937.

3. Gleichgewicht B. and Glasek K. Remarks on n-groups as abstract algebras // Coll. Math. 17 (1967). P. 209–219.

4. Гальмак А. М. Об определении n-арной группы // Междунар. алгебр. конф., посвящ. памяти А.И. Ширшова: тез. докл., Новосибирск, 20–25 авг. 1991. / Ин-т мат. Сиб. отделения АН СССР, Алтайский гос. ун-т. Новосибирск, 1991. С. 30.

5. Usan J. n-Groups as variety of type <n,n-1,n-2> / J.Usan // Algebra and Model Theory, Novosibirsk. (1997) P. 182–208.

6. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969–1970 уч. года. М.: Наука, 1974.

7. Bruck R. A. Survey of binary systems. / Berlin - Heidelberg - Newyork.: Springer. 1971.

8. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть I. / Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. 196 с.

9. Гальмак А. М. Конгруэнции полиадических групп. Минск: Беларуская навука, 1999.

10. Артамонов В. А. Свободные n-группы // Мат. заметки 1970. Т. 8, №4. С. 499–507.

11. Артамонов В. А. О шрайеровых многообразиях n-групп и n-полугрупп // Труды семинара им. Г. И. Петровского. 1979. Вып. 5. С. 193–202.

12. Русаков С. А. Алгебраические n-арные системы. – Мн: Навука і тэхніка, 1992. 245 с.

13. Щучкин Н. А. Свободные абелевы n-арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, вып. 2 (38) С. 163–170.

14. Щучкин Н. А. Разрешимые и нильпотентные n-группы // Алгебраические системы: сб. науч. тр. Волгоград: Перемена 1989. С. 133–139.

15. Dornte W. Untersuchungen uber ainen verallgemeinerten Gruppenbegrief. // Math. Z. Bd. 29 (1928) — P. 1–19.

16. Гальмак А. М., Воробьев Г. Н. О теореме Поста-Глускина-Хоссу // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 1(14) С. 55–60.

Могилевский государственный университет продовольствия.
Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Получено 19.05.2014