

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51(091): 51 01.5(09)(082)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-198-210

Исследование Коши по подстановкам¹

Н. В. Ингтем

Ингтем Наталья Васильевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: nathalia_koulik@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена введению и становлению термина и символа действия «подстановка». В математических исследованиях до Лагранжа никогда не практиковалось переставлять независимые переменные, входящие в заданную функцию. Впервые этот приём встречается у Лагранжа в работе 1771г., посвящённой алгебраическому решению уравнений.

Вандермонд, опубликовавший свою работу в том же 1771г., высказывает идею о необходимости ввести обозначения, упрощающие вычисления и восприятие операций над функциями корней. Однако введенные обозначения не были простыми для понимания и усложнялись с повышением степени уравнения.

Работы Руффини, опубликованные с 1799 по 1813г., имели цель доказать невозможность решения уравнения 5-й степени и представляют, по сути, исследование симметрической группы, представленной значениями функции корней, в виде всевозможных перестановок этих корней. В ходе исследований, он доказывает, что группа S_5 не содержит подгрупп индекса 3, 4 или 8. Однако, так же как и Лагранж, Руффини использует сложные громоздкие выражения.

Коши, занимаясь вопросами комбинаторного анализа, попытался обобщить результат, полученный Руффини на уравнения произвольной степени. Работая над вопросом установления пределов, которые может принимать функция n переменных, Коши, изобрёл новый инструмент исследования, ставший впоследствии самостоятельной теорией. Это теория группы подстановок.

Ключевые слова: перестановка, подстановка, типы сочетаний, частичные типы, симметрические функции, индекс функции, произведение подстановок.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. В. Ингтем. Исследование Коши по подстановкам // Чебышевский сборник, , т. 23, вып. 4, с. 198–210.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект XX-XX-XXXXX).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51(091): 51 01.5(09)(082)

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-198-210

Cauchy's research on substitutions

N. V. Ingtem

Ingtem Natalia Vasilyevna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: nathalia_koulik@mail.ru

Abstract

The article is devoted to the introduction and formation of the term and the action symbol "substitution". In mathematical research before Lagrange, it was never practiced to rearrange independent variables contained in a given function. For the first time this technique is found in Lagrange's work of 1771, devoted to the algebraic solution of equations.

Vandermonde, who had published his work in the same year 1771, has expressed the idea of the need to introduce notations that simplify calculations and the perception of operations on root functions. However, the introduced designations were not easy to understand and became more complicated with increasing the degree of the equation.

Ruffini's works, published from 1799 to 1813, aimed to prove the impossibility of solving the equation of the 5th degree and are, in fact, a study of the symmetric group represented by the values of the root function in the form of all possible permutations of these roots. During these researches, he proves that the group S_5 does not contain subgroups of the index 3, 4 or 8. However, just like Lagrange, Ruffini uses complex cumbersome expressions.

Cauchy, dealing with issues of combinatorial analysis, tried to generalize the result obtained by Ruffini to equations of arbitrary degree. Working on the determination of the limits that a function of n variables can take, Cauchy has invented a new research tool, which later became an independent theory. This was the substitution group theory.

Keywords: permutation, substitution, combination types, partial types, symmetric functions, function index, product of substitutions.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. V. Ingtem, 2022, "Cauchy's research on substitutions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 198–210.

1. Основной текст статьи

В статье представлены результаты исследования работы Коши (Огюстен Луи Коши (1789-1857)), касающиеся подстановок, изложенные в работе «Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquies» [1, с., 64-90] («Мемуар о количестве значений, которые может принимать функция»). Эта работа впервые была опубликована в 1815 г., в 17 тетради, 10 т., Журнала Политехнической Школы. Её оценка дана в III части II главы «Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900». («Очерки по истории математики 1700-1900», [5, с. 75]. Эта часть называется «Решение алгебраических уравнений», хотя в работе, Коши никак не касается вопроса о решении уравнений в радикалах, однако её результаты стали неотъемлемым инструментом при их решении - к построенной им теории обращаются другие исследователи этого вопроса, например, Н.Г.Абель (Нильс Генрик Абель (1802-1829)).

Ж. Дьёдонне и Ж. Гериндон [5, с. 75], считают, что именно работы Руффини вдохновили Коши систематизировать такой аппарат исследования как «подстановки», которые представляют собой объекты, состоящие из конечного числа элементов (не обязательно корней уравнения), с заданным порядком следования и имеющие свойство изменять этот порядок. Они отмечают, что подстановки представляют закон, по которому происходит замена одного элемента на другой, и обозначение подстановки $\begin{pmatrix} abc\dots l \\ \alpha\beta\gamma\dots\lambda \end{pmatrix}$, которое вводит Коши, отображает этот закон. Таким образом, указывается, что a меняется на α , b на β и т. д.

Необходимо заметить, что, в кратком вступлении, Коши отмечает работы Лагранжа (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)) и Вандермонда (Александр Теофил Вандермонд (1735-1796) член Парижской академии наук, 1771г. Его математические работы посвящены исследованиям в алгебре и комбинаторном анализе). Он подчеркивает, что в своих исследованиях эти учёные впервые рассматривали функции многих переменных относительно количества значений, которое способна принимать функция от всевозможных перестановок переменных, её составляющих. Однако он не останавливается на контексте работ отмеченных математиков – на решении уравнений, в котором использовалось отмеченное свойство функции, ни на способе, который использовали эти учёные.

Необходимо отметить, что при анализе методов решения уравнений, Лагранж находит упрощающее уравнение, корнями которого являются функции корней заданного уравнения. Однако, в силу свойств, связывающих корни и коэффициенты уравнения, полученные функции изменяют значение в зависимости от положения корней в функции. Для определения количества значений функции Лагранж, приходит к идее переставлять корни, всеми возможными способами. Используя перестановку корней как действие, Лагранжу удалось в присущей ему терминологии сформулировать основные теоремы теории групп, такие как:

Порядок симметрической группы равен $n!$

Порядок конечной группы делится на порядок любой её подгруппы. Соответствующее частное равно индексу подгруппы.

В то же время известно, что для разрешимых уравнений Лагранж, по сути, построил группу Галуа поля разложения уравнения над заданным полем. Он использует терминологию, присущую своей эпохе, и его объяснения очень громоздки.

Работа Вандермонда остаётся до сих пор неизученной, хотя он первый ставит вопрос о необходимости введения обозначений для упрощения изучения функций корней.

Руффини (Паоло Руффини (1765-1822)) полностью опирается на исследования Лагранжа. Таким образом, считаем, что исследования этих учёных могли существенным образом повлиять на становление взглядов Коши, относительно созданной им теории подстановок. Представим краткую историческую справку этого вопроса.

Впервые термин «перестановка» и «подстановка» в математических исследованиях использует Лагранж в работе «*Reflections sur la résolution algébrique des équations*». Причины обращения к перестановке величин, составляющих функцию корня упрощающего уравнения наиболее ярко представлены в анализе решения уравнений третьей степени методом Кардано. Лагранж исходит из заданного уравнения: $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, корни которого a, b, c ; записывает для него упрощающее уравнение $y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$, и выражает корень последнего через

корни заданного: $y = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3}$. Он замечает, что коэффициенты последнего не зависят непосредственно от корней заданного уравнения, а выражаются через m, n, p - коэффициенты заданного, где корни могут быть расположены в любом порядке, поэтому и в выражении корня упрощающего уравнения корни заданного могут находиться в произвольном порядке. Однако представление y показывает, что если нарушить порядок расположения букв a, b, c , то его значение изменится. Это открытие позволяет ему в своих исследованиях основываться на перестановке корней заданного уравнения, входящих в функцию корней, а также сделать

следующие заключения:

1. В выражении y буквы a, b, c могут иметь различное расположение. Следовательно, y будет иметь столько различных значений, сколько можно получить от всевозможных перестановок 3-х величин, т.е. как «следует из комбинаторного анализа» [6, с.216], их будет $3!$.

2. Выражение y показывает, почему упрощающее уравнение решается как квадратное: т.к. это уравнение содержит только степени переменной кратные 3, т.е. если r - значение выражения y , то αr и $\alpha^2 r$, (где $\alpha^i, i = \overline{0, 2}$ - корни уравнения $x^3 - 1 = 0$) – также его значения. Применяв всевозможные перестановки корней (заметим, что циклическую перестановку Лагранж получает при помощи умножения y на α и α^2) в выражении y , он получает шесть представлений этой величины и, обозначив одну из них r , показывает, что найдутся αr и $\alpha^2 r$; остальные, если одну обозначить s , будут представлять αs и $\alpha^2 s$. Он заключает, что упрощающее уравнение 6-й степени разлагается на сомножители $y^3 - r^3$ и $y^3 - s^3$. Причём при циклической перестановке a, b, c величины r^3 и s^3 не изменяют значение, а при транспозиции корней, одна величина переходит в другую и наоборот.

Опираясь на современную теорию групп и полей, можно сказать, что 1. показывает, что каждому значению y поставлена в соответствие перестановка, или, что то же самое - подстановка, т.е. порядок симметрической группы подстановок уравнения 3-й степени равен $3!$.

Из 2. следует, что циклические подстановки уравнения 3-й степени не меняют значения функций r^3 и s^3 , т.е. эти подстановки образуют подгруппу третьего порядка. Отсюда следует т.н. теорема Лагранжа: «Порядок конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы». [8, с. 269]

Руководствуясь этими результатами, Лагранж применяет способ перестановки и подстановки корней для установления свойств функций корней заданного уравнения с произвольной степенью. В своём анализе он опирается на методы Чирнгауза, Эйлера и Безу.

В процессе исследования он устанавливает: степень упрощающего уравнения для заданного уравнения степени μ будет равна $(\mu - 1)!$. Доказательство этого утверждения основано на способе перестановок и подстановок одного или нескольких корней вместо других.

Как известно метод Чирнгауза заключается в нахождении коэффициентов уравнения подстановки:

$$x^\rho + f x^{\rho-1} + g x^{\rho-2} + \dots + l + y = 0;$$

где y определяется из уравнения $y^\mu + V = 0$, т.е. $y = \alpha^i u, i = \overline{0, \mu-1}$. Полагая, что $\rho = \mu - 1$, а корнями заданного уравнения будут $x^I, x^{II}, x^{III}, \dots$, Лагранж записывает систему уравнений относительно коэффициентов подстановки:

$$x^{(i)\mu-1} + f x^{(i)\mu-2} + g x^{(i)\mu-3} + \dots + l + \alpha^{i-1} u = 0.$$

Он отмечает, что все коэффициенты $f, g, \dots, l$, а так же u входят в уравнение в 1-й степени, поэтому они будут выражаться функцией μ корней $x^I, x^{II}, x^{III}, \dots$ и корней α^i .

Лагранж подчеркивает, что между $x^{(i)}$ и $y^{(i)} = \alpha^{i-1} u$ нет соответствия, поэтому в выражении они сочетаются произвольно. Чтобы исчерпать все варианты, он переставляет корни всеми возможными способами. Мы рассмотрим тот, который сам автор отметил – он наиболее ярко демонстрирует выделение подгруппы и разложение симметрической группы подстановок по подгруппе.

Для этого он фиксирует x^I , т.е. первую строку системы, остальные переставляются всеми возможными способами. Таким образом получается $(\mu - 1)!$ вариант систем уравнений. В каждую из получившихся систем, вместо u последовательно подставляется $\alpha^i u, i = \overline{1, \mu-1}$, что даёт μ вариантов системы уравнений. Однако, при решении системы u будет исключена, поэтому подстановка $\alpha u, \alpha^2 u, \dots$ вместо u никак не изменит значение f . Таким образом, будет только $(\mu - 1)!$ вариант систем уравнений, полученных от перестановки $\mu - 1$ корня $x^{II}, x^{III}, \dots$

[6, с. 313]. Из этого можно заключить, что здесь в роли подстановок у Лагранжа выступают варианты системы уравнений.

Как видим слова перестановка и подстановка Лагранж использует только в их лексическом значении, для обозначения действия перестановки (подстановки) одного или нескольких символов содержащихся в функции корней упрощающего уравнения вместо других. Он не вводит новую терминологию и полученные от перестановок и, подстановок результаты, он выражает в терминах варианты системы уравнений. Варианты системы, полученные от подстановки $\alpha u, \alpha^2 u, \dots$ вместо u , не изменяющие значение f , так же не выделены особым термином. В современном понимании это инвариантная группа подстановок. Таким образом Лагранж построил множество (варианты системы уравнений), которому можно поставить в соответствие математическую структуру - группа подстановок по умножению и формально представил разложение симметрической группы заданного уравнения по инвариантной подгруппе.

Несколько слов необходимо сказать о работе Вандермонда.

Ссылаясь на «A comprehensive textbook of Classical mathematics», Н. Griffiths and P. Hilton, [G – H], 1970, р. 294, авторы [5, с. 73] Ж. Дьёдонне и Ж. Гериндон, отмечают работу Вандермонда как носителя «начала понятий, которые станут важнейшими в теории групп перестановок, таких как разложение перестановки из n букв в произведение циклических подстановок» а также «первые идеи «простой» группы перестановок» «Mémoire sur la résolution des équations».

«Мемуар о решении уравнений» Вандермонда опубликован в 1771. В сноске автор отмечает работу Лагранжа, где последний «представил особый метод, который он предлагает применить для неразрешимых уравнений высших степеней» и подчёркивает сходство в их исследованиях. [7, с. 365]. Однако, несмотря на общность, о которой заявляет Вандермонд, его подход очень отличается от предложенного Лагранжем. Как было отмечено выше, Лагранж использует сложные конструкции при описании элементов, полученных в ходе своих рассуждений, а так же многократно отмечает весьма громоздкие вычисления, сопровождающие решение уравнений в радикалах. Однако, он не высказывает идею о необходимости введения символики. Впервые о необходимости использования «обозначений», приводящих выражения к более «лаконичному виду» [7, с. 371], говорит Вандермонд. Здесь будет показано, что обозначения, введенные Вандермондом, могли послужить идеей для развития представлений Коши о виде подстановок.

В своей работе Вандермонд ставит следующие задачи.

1. Найти такую функцию корней, заданного уравнения, которая будет равна одному из этих корней, выбранному заранее;

2. Записать её в таком виде, в котором она не будет изменяться от перестановки, входящих в неё корней;

3. Выразить эту функцию через функции суммы корней, суммы их попарного произведения, и т. д. [7, с.370].

Покажем воплощение этих задач на примере уравнения 3-й степени, предложенном Вандермондом.

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc,$$

где a, b, c – корни заданного уравнения.

В качестве решения этого уравнения Вандермонд ищет функцию величин $(a + b + c)$, $(ab + ac + bc)$, abc , которая бы принимала одно из значений a, b, c . В построении такого решения, он опирается на решение уравнения 2-й степени, для которого, преследуя цель подчеркнуть корни заданного уравнения, записывает заданное уравнение, в следующем виде: $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$, a и b – корни уравнения.

Корень этого уравнения a , как известно, записывается в виде:

$$a = \frac{1}{2} \left[a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} \right],$$

где радикал представляет неоднозначность. Эту неоднозначность Вандермонд объясняет тем, что, заменяя a на b в функции корня $a: a = \text{fonct}(a+b, ab)$, получается, что $b = \text{fonct}(a+b, ab)$ [7, с.367]. Эти два условия могут существовать раздельно только в случае двузначности функции. Такой функцией Вандермонд называет функцию:

$$\frac{1}{2} \left[a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \right],$$

из которой вытекают значения a и b [7, с.368].

Корень уравнения 3-й степени Вандермонд представляет в виде:

$$a = \frac{1}{3} \left[a + b + c + \sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3} + \sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3} \right],$$

где подкоренные выражения предполагаются возведёнными в 3-ю степень. Однако эта функция многозначна, она принимает столько же значений, как и $r^3 = 1$, корнями которого являются $1, r', r''$ и, учитывая это замечание, получается 3 корня: a и еще b , $c = \frac{1}{3} \left[a + b + c + r^{(i)} \sqrt[3]{(a+r'b+r''c)^3} + r^{(j)} \sqrt[3]{(a+r''b+r'c)^3} \right]$, $i, j = 1, 2; i \neq j$.

Используя, что $r' = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{3}$ и $r'' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{3}$ и, подставляя эти значения в выражение корня, он получает:

$$\begin{aligned} (a+r'b+r''c)^3 = & a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - \frac{3}{2}(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + \\ & + \frac{3\sqrt{-3}}{2}(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b). \end{aligned}$$

Из этого представления Вандермонд заключает, что только в выражении $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$ от замены каких либо 2-х букв меняется значение функции с плюса на минус. Полагая $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b) = u'$ и, полученное от замены b на c : $(a^2c + c^2b + b^2a - a^2b - c^2a - b^2c) = u''$, он использует двузначную функцию, полученную при решении уравнения 2-й степени: $\frac{1}{2} \left[u' + u'' + \sqrt{(u' - u'')^2} \right]$, для которой не имеет значения какую из двух величин выбрать. Таким образом, функция:

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)^2}$$

будет необходимо принимать одно из двух значений независимо от замены каких-либо 2-х букв. Для подтверждения заключения автор записывает выражение $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$ в виде: $(a-b)(a-c)(b-c)$ и для наглядности представляет его квадрат.

Таким образом выполнена 2-я из поставленных задач для решения уравнения 3-й степени, заданного в общем виде [7, с. 369].

Далее Вандермонд вводит следующие обозначения

$$\begin{aligned} (A) &= a + b + c + \dots & (A^2) &= a^2 + b^2 + c^2 + \dots \\ (AB) &= ab + ac + \dots + bc + \dots & (A^2B) &= a^2b + b^2a + c^2a + \dots + \\ & & & + a^2c + b^2c + c^2a + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, выражение $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$ указывает на сумму всех членов, полученных из последнего, с помощью всевозможных подстановок букв $a, b, c, d, e, \dots$ в $(A, B, C, \dots)$, в произвольном порядке. Эти выражения Вандермонд называет Типы сочетаний или просто Типы. [7, с. 370]. На случай равенства показателей в выражении $(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\epsilon)$ он вводит следующую запись: в показателях $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots\}$, например, $\alpha = \beta = \gamma, \delta = \epsilon$, тогда

$(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta E^\epsilon) = \{\alpha, \alpha, \alpha, \delta, \delta\} = \{\alpha^3, \delta^2, \dots\}$. В силу этого введения, обозначения, представленные выше, записываются следующим образом:

$$\begin{array}{lll} (A) = \{1\}; & (A^2) = \{2\}; & (A^3 B^3) = \{3^2\} \\ (AB) = \{1^2\}; & (A^3) = \{3\}; & (A^2 B^2 C^2 D) = \{2^3 1\} \\ (ABC) = \{1^3\}, \text{ и т.д.} \end{array}$$

«Функции не изменяющие своё значение от замены одних букв другими, очевидно, будут функциями Типов» [7, с. 371].

Все эти обозначения Вандермонд использует для упрощения записи функций корней заданного уравнения через функции Типов или в современном понимании через симметрические функции и выписывает их в таблицы, представленные [7, с. 374], для $n = 2, 3, \dots, 9$.

Прежде чем перейти к исследованию решения уравнений 5-й степени, Вандермонд вводит ещё одно «новое краткое обозначение, которое сделает выражения более лаконичными и обеспечит процесс вычисления более эффективным, чем методы, имеющиеся в алгебре. Это обозначение соответствует определённым величинам одинакового вида, с помощью которых задаются функции Типов и которых достаточно, чтобы записать функцию, представляющую любой из корней» [7, с. 389].

Необходимо отметить, что Вандермонд первый, кто заявляет о необходимости введения символики, способствующей упростить вычисления и представить выражения в виде, удобном для восприятия. Для этого дополнительно вводится понятие частичных Типов. Под частичными Типами он понимает краткие выражения, состоящие из последовательностей членов, составляющих разложение одного и того же типа. Основным свойством этих последовательностей является то, что при определённом обмене между буквами из одного члена последовательности появляется другой из этой же последовательности и не появляется новый. Таким образом замена не вызывает никаких изменений. С современной точки зрения можно сказать, что это определение является макетом определения цикла.

В качестве примера частичного типа он рассматривает последовательность показателей, заключённые квадратные скобки: $[\alpha \beta \gamma] = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\gamma b^\alpha c^\beta$, т.е. $[\alpha \beta \gamma]$ представляет сумму всех членов, которые можно составить, сохраняя алфавитный порядок букв a, b, c и, присваивая им показатели следующим образом. Первый член в разложении сохраняет указанный порядок показателей в квадратных скобках; показатели второго записываются в соответствии, указанном римскими цифрами (автор называет их характеристиками), т.е. γ станет показателем a , α будет показателем b , и β - показателем c ; степени последнего члена разложения определяются из полученного, т.е.: $[\gamma \alpha, \beta]$ будут присваиваться буквам a, b, c , исходя из новой записи

[7, с. 389]. Следовательно, последний член будет иметь показатели как указано в последней формуле: β станет показателем a ; γ станет показателем b и α показателем c . Аналогично $[\alpha \gamma \beta]$. Как видим такая запись изменения порядка показателей очень близка по форме к со-

временной. Действительно, если записать это представление как подстановку, т.е. $(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} \end{smallmatrix})$, следующая подстановка, согласно порядку, указанном 2-строкой, будет $(\begin{smallmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} \end{smallmatrix})$, и последняя подстановка будет $(\begin{smallmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \text{II} & \text{III} & \text{I} \end{smallmatrix})$. Можно сказать, что последняя подстановка получена от последовательного применения второй подстановки к первой, так α переходит с 1-го места на 2-е согласно первой подстановке и со 2-го на 3-е, согласно второй подстановке. Следовательно в последней подстановке α на третьем месте. Другие показатели так же удовлетворяют этому правилу. Таким образом здесь мы видим циклическую перестановку букв. Вандермонд замечает, что при дальнейшей перестановке величина вернется в исходный вид, что подчёркивает тот факт, что порядок циклической группы n -й степени равен n . Заметим также, что перестановку он применяет не ко всей функции корней заданного уравнения, а к каждому члену

по отдельности, поэтому в дальнейшем он так же приводит правило изменения показателей для слагаемых с неполным набором букв [7, с. 392]. Эти правила перестановки он применяет и для функций корней уравнения более высоких степеней. В то же время надо отметить, что привязка к функции корней уравнения более низкой степени усложняет понимание.

Например, чтобы величина $[\alpha\beta\gamma\delta]$ принадлежала функции *Типы*, нужно, построить функцию, которая будет принимать одно из 6-ти значений полученных от перестановок букв в ней [7, с. 390].

$$\begin{array}{ccc} [\alpha\beta\gamma\delta], & [\alpha\delta\beta\gamma], & [\alpha\gamma\delta\beta] \\ \text{III IV II I} & \text{IV I II III} & \text{II IV I III} \\ [\alpha\beta\delta\gamma], & [\alpha\gamma\delta\beta], & [\alpha\delta\gamma\beta] \\ \text{III IV II I} & \text{IV I II III} & \text{II IV I III} \end{array}$$

где Вандермонд обращает внимание на то, что $\text{min}(A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta)$ делится на части, элементы которых переставляются разными способами. К каждому элементу он применяет циклическую подстановку 4-й степени как указывают «характеристики». Такой способ он применяет для общности построения решения уравнения, т.е., чтобы привести подрадикальную функцию к такому виду, как было показано для уравнения 3-й степени. Однако для уравнения 5-й степени символика нарушается: используются новые обозначения, например: $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$, которое не объяснено или $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$, где * заменяет цифру V, а также $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]$, в котором записаны

2 цикла.

Таким образом, символика, введённая Вандермондом, не только не упрощает представление функции корней, но учитывая, что не все элементы представляются в символической записи одновременно, она усложняет понимание вопроса. В тоже время идея о необходимости введения записи и терминологии для представления рассуждений, касающихся решения уравнений была важным шагом для объяснения свойств, которыми обладают разрешимые уравнения.

На фоне этих подходов к решению уравнений появляются исследования Коши.

Ж. Дьёдонне и Ж. Гериндон [5, с. 75] отмечают, что «работа Коши замечательна открытием первых общих теорем, касающихся групп подстановок, которые были доказаны Руффини только для частного случая: подстановок симметрической группы G_5 . Коши, в своих исследованиях, установил свойство, что «цикл» (abc) порождает знакпеременную группу U_n , а также, что в группе G_n , для $n \geq 5$ не содержится никакой подгруппы, индекс которой был бы равным наибольшему простому числу $p < n$. Вместе с тем Коши не применяет эти результаты для решения уравнений в радикалах и известно, что доказательство Руффини он считал удовлетворительным. Этот факт, возможно, повлиял на решение Коши отдать предпочтение изучению других уравнений, перед «общими». В данной статье показано, что эта оценка:

1) не является полной;

2) в доказательстве теоремы, о которой идёт речь, допущены неточности, и в частности, для $n = 6$, эта теорема не проверяется, о чём сам автор отмечает в конце статьи [1, с. 89]

Говоря о вкладе своих предшественников в развитие вопроса о количестве значений, принимаемых функцией, Коши, отмечает, что наиболее важным следствием работ этих учёных является то, что не всегда можно указать функцию с заданным числом букв, которая от их перестановок будет иметь желаемое число значений. Однако, для заданного числа букв, можно указать пределы, в которых будет находиться число значений, принимаемых функцией, и определить возможные исключения. Именно решению вопроса нахождения этих пределов посвящены исследования Коши. [1, с. 64],

Теорема: Число различных значений, которые приобретает несимметрическая функция от n величин, не может быть меньше чем наибольшее простое число $p < n$ и больше 2. [1, с. 78].

Для доказательства этой теоремы он вводит следующие понятия:

1. симметрическая функции – функция, не изменяющая значение от транспозиций, действующих на величины, содержащиеся в ней;

2. порядок функции - количество величин, содержащихся в функции; (это определение вводится для иллюстрации связи между числом переменных и числом принимаемых значений, откуда следует верхний предел: максимальное количество значений для функции n -го порядка равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ т.е. $n!$) [1, с. 65];

3. понятие перестановки - последовательность индексов переменных в заданной функции, записанных слева направо в порядке их нахождения и учитываемых один раз. Например, для функции $K = a_1 a_2^m \cos a_4 a_4 + \sin a_3$, 4-го порядка перестановка будет иметь вид: 1243 [1, с. 66];

4. понятие подстановки и её символическая запись - две перестановки, записанные одна под другой и указывающие на то, что для получения нового значения функции $K - K^I$, индексы в верхней перестановке должны поменяться на соответствующие индексы в нижней. Подстановка функции K обозначается $\left(\begin{smallmatrix} 1243 \\ 2431 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, применяя данную подстановку к K , K перейдёт в K^I ; Заметим, что верхняя и нижняя строчки, представляют один и тот же цикл [1, с. 67].

5. понятие индекса функции: если $N = n!$ – число всех значений, которые принимает функция, M - число равных значений, то, $R = \frac{N}{M}$, R – индекс функции, M – указательный или индикаторный делитель [1, с. 69];

6. на множестве подстановок вводится понятие произведения: произведением двух подстановок называется подстановка, которая является результатом последовательного выполнения сомножителей. Приводится пример: последовательное применение к перестановке A_1 подстановок $\left(\begin{smallmatrix} A_2 \\ A_3 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} A_4 \\ A_5 \end{smallmatrix}\right)$ даёт подстановку $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_6 \end{smallmatrix}\right)$, эквивалентную перестановке A_6 , [1, с. 73];

Замечание. Необходимо подчеркнуть, что речь здесь не идёт об операции умножения подстановок, а говорится только то, что найдётся элемент (в данном случае A_6), который будет соответствовать последовательному применению соответствующих подстановок. Правило, которому нужно следовать, чтобы получить A_6 , не указано. И, поскольку пример абстрактный, нет возможности понять, как автор пришёл к указанному результату.

7. понятие идентичной подстановки - подстановка, в которой перестановки в верхней и нижней строках совпадают [1, с. 73];

8. понятие смежной подстановки - подстановки называются смежными, если нижняя перестановка первой совпадает с верхней перестановкой второй [1, с. 73]. Две смежные подстановки $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} A_2 \\ A_3 \end{smallmatrix}\right)$ выполненные последовательно дадут такой же результат, как и подстановка $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_3 \end{smallmatrix}\right)$;

9. понятие степени подстановки: - степенью подстановки называется подстановка, которая «эквивалентна некоторой другой, выполненной последовательно определённое число раз», степень подстановки обозначается: $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right)^r$.

10. важным моментом в работе является введение циклической подстановки "Substitution circulaire" [1, с. 80]. Она получается следующим образом: Последовательное применение подстановки $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$ к перестановке A_1 приведёт к перестановкам $A_1, A_2, \dots, A_m$. Коши заключает, что, для конечного m , перестановка A_m , будет такова, что применение к ней данной подстановки приведёт снова к A_1 . Для иллюстрации все перестановки (в представлении A_i) располагаются на окружности на одинаковом расстоянии друг от друга. Из этого представления Коши делает вывод, что подстановки, составленные из соседних перестановок, расположенных «с востока на запад» [1, с. 75] будут эквивалентны между собой, а так же устанавливает свойства для степени подстановки:

1) степень m подстановки $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)$ эквивалентна подстановке $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right)$.

2) $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^{mx}$ тоже будет единичной подстановкой.

3) $\left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^{mx+r} = \left(\begin{smallmatrix} A_s \\ A_t \end{smallmatrix}\right)^r$;

$$4) \begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix}$$

5) Только те подстановки, показатели степени которых меньше m , будут различными. Это следующие подстановки: $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}$. В частности "степень циклической подстановки равна числу индексов, содержащихся в ней". [1, с. 80]

Совокупность этих подстановок Коши называет периодом. Число m , соответствующее количеству различных подстановок, называется порядком подстановки. Порядок подстановки обозначает как наименьшую из степеней, в которой подстановка равна идентичной подстановке, так и количество перестановок входящих в период, что сохранилось и в современной терминологии [8, с. 74].

Необходимо заметить, что здесь в терминологии периода формально представлена циклическая «группа подстановок» степени m (у Коши ещё не прослеживается четкое описание множественной структуры, речь идёт о конечной совокупности элементов, относительно степени одного и того же элемента) и описано понятие порядка группы (периода). Это понятие и многие свойства вошли в современную теорию [8, с. 265]

Опираясь на введённые понятия, Коши представляет доказательство сформулированной выше теоремы. Оно состоит из 3-х частей.

I. Если $R < p$, то никакое значение функции K не может измениться никакой подстановкой степени p [1, с. 72].

II. Если значение K не может быть изменено никакой подстановкой степени p , то его не может изменить и никакая подстановка третьей степени [1, с. 78].

III. Если значение функции K не изменяется циклическими подстановками третьей степени, то эта функция является либо симметрической, либо принимает только два значения [1, с. 81].

1) Рассмотрим доказательство I части [1, с. 77]. Исследуется абстрактная функция K , которая не описана. К перестановкам $A_i, i = 1, \dots, N, N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$ соответствующим различным значениям этой функции, Коши применяет подстановку $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ степени m (на основе каких свойств функции K выбрана эта подстановка не оговаривается) и таким образом получает $\frac{n!}{m}$ окружностей, каждая из которых содержит m перестановок: m – степень подстановки.

Как было отмечено выше [1, с. 75], автор размещает подстановки m цикла на окружности.

Понятно, что среди $n!$ подстановок будут и другие циклы, о правиле размещения которых, автор не указал.

Для доказательства теоремы Коши вводит понятие эквивалентных перестановок — это перестановки, соответствующие эквивалентным значениям K (в тексте «равные» [1, с. 68], и «эквивалентные» [1, с. 69], значения используются равнозначно). По предположению, перестановке A_1 эквивалентны M перестановок. «Очевидно», — говорит Коши, — если, $M > \frac{n!}{m}$, то, среди окружностей найдется, хотя бы одна, содержащая две эквивалентные перестановки: A_x и A_y — такие перестановки. Тогда подстановка $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ будет степенью $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, но $\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ не изменит значения функции, следовательно, для простого m подстановка $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ так же не может изменить значение K . Полагая, p – наибольшим простым числом $< n$ и $p = m$, Коши заключает, что если индекс R функции K меньше p , то никакая подстановка степени p не изменит значение функции K .

Замечание. Известно, что количество значений принимаемых функцией равно $N = n!$, следовательно, функция зависит от n переменных; количество её равных значений - M (в каком отношении находятся M и n , не оговаривается); количество различных значений - $R = \frac{n!}{M}$. [1, с. 68]. Тогда, в соответствии с теорией групп, $n!$ перестановок составляют группу S_n . Её можно разложить по подгруппе H_M порядка M — группа перестановок, в которых функция K остаётся инвариантной; индекс H_M в S_n равен R , что подтверждается рассуждениями автора

[1, с. 72].

Далее Коши рассматривает циклическую подгруппу порядка $m < n$, по которой, как можно судить из описания, разлагает группу S_n на смежные классы. Их будет $\frac{N}{m}$, что совпадает с указанным Коши числом окружностей. Как известно, все подстановки представители смежных классов - различные, этот факт совпадает и с построением Коши [1, с. 77]. В каждой окружности подстановки так же различны [1, с. 76]. Поэтому, предположение, что перестановка A_x и A_y эквивалентны не может иметь места. С современной точки зрения подстановки (A_1) , (A_2) , (A_3) , ..., (A_m) образуют подгруппу в группе S_n , обозначим её H_m . Все смежные классы симметрической группы по H_m , будут иметь одинаковое число элементов и все элементы будут различными. Если (A_x) степень (A_t) , то $(A_x) \in H_m$, что не может иметь места, т. к. в противном случае смежный класс, содержащий подстановку (A_x) совпадёт с группой H_m [8, с. 267], что невозможно. В связи с этим, представленное доказательство не может считаться исчерпывающим.

В завершении анализа фрагмента этой работы необходимо отметить её важность, заключающуюся в том, что Коши пытается построить математическую структуру для абстрактных объектов. Сначала подстановки выступают как действие на перестановки, но впоследствии Коши придаёт им характер элементов. Он объединяет их во множество с единицей, на котором определяет произведение (можно считать, что косвенно введена операция умножения т.к. указано правило выполнения «умножения» смежных подстановок и правило как построить две смежные подстановки). Необходимо заметить, что через 30 лет [5, с. 115] Коши снова вернётся к этому вопросу в работе «Sur les dérivées d'une ou plusieurs substitutions, et sur les systems des substitutions conjuguées» - «О степенях одной или нескольких сопряжённых подстановок и о системах сопряжённых подстановок», [4, с. 184], где он строит коммутативную группу подстановок, называя её по содержанию в ней элементов «сопряжённые подстановки». Здесь он доказывает теорему:

ТЕОРЕМА. Для любого простого делителя p порядка конечной группы G , эта группа содержит элемент порядка p [4, с. 184].

Впоследствии (1872г.) эта теорема была обобщена Силовым (первая теорема Силова). [8, с. 289]

2. Заключение

Представленный здесь исторический обзор эволюции термина и символа подстановки показывает, что Коши удалось обобщить идеи представленных ученых и, дополнив их своими наблюдениями, а так же потребностью удобного аппарата для своих исследований привели его к изложенным результатам.

Понятно, что умножение Лагранжем функции корней уравнения на α^i , $i = \overline{1, \mu}$, μ - показатель степени заданного уравнения, для перестановки всех корней одновременно, могло породить как понятие циклической подстановки, так и понятие степени подстановки. К циклической перестановке букв в функции корней уравнения прибегали так же Вандермонд и Руффини. Интересные мысли Вандермонда о законе перехода от одной буквы к другой могли стать образом символа подстановки у Коши.

Как показывает анализ исследований Коши, теория в своем первоначальном виде не была совершенной, имела много неточностей, как например гипотеза Коши о порядке «подгруппы», по которой, он разлагает симметрическую группу, предполагая, что индекс этой «подгруппы» не меньше наибольшего простого числа, содержащегося в n , т.е. может быть меньше n , если n - составное, что, как заметил сам автор, уже не проверяется для $n = 6$. Так же, в свете представленного анализа, ясно что у Коши ещё нет понятия группы. Однако развитие этого

вопроса проявилось в более поздней статье, где можно говорить о множестве, являющемся группой, хотя термин «группа», как понятие множественной структуры появляется в работах Кронекера и Дедекинда, начиная с 1855 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cauchy A.L. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 64-90.
2. Cauchy A.L. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les valeurs qu'elles renferment. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 91-169.
3. Cauchy A.L., Memoire sur les arrangements que on peut former avec les letters donnees. Oeuvres complètes, 2-e série, T. XIII. Paris, Gauthiers-Villars, 1844, p. 171-282.
4. Cauchy A.L. Exercices d'analyse et de physique mathématiques, v. III, 1844, p. 183-185.
5. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. Sous la direction de Jean Dieudonné Herman, 1978.
6. Oeuvres de Lagrange, T.3, Serret J.A., Paris 1771.
7. Vandermonde A. T., Memoires de l'Academie Royale des Sciences, T.9, 1771, p. 365-416
8. Постников М.М. Теория Галуа. Москва, Факториал Пресс, 2003
9. Jordan C. , Triate de substitutions et des equations algebriques, Paris, 1870.
10. Valson S.A., La vie et les travaux de baron Cauchy, Paris, 1868.
11. Dahan A. Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Etuded de son approche du concept de groupe, Archive for Histiry of Exact Sciences, v 23,4 by Springer-Verlag, 1980, p. 279-316.
12. Meo M., The mathematical life of Cauchys group-theoreme, Historia mathematica, 31(2004), Portland Or, USA, p.196-221.
13. Колмогоров А.Н., Юшкевич А.П., Математика XIX в., М., Наука, 1978.
14. Бурбаки Н., Очерки по истории математики. Москва 1963
15. Wussing H., Des genesis des abstracten gruppen begriffes, Berlin, 1969.
16. Burkhard H., die Anfange der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. Abhandlugen zur Geschichte der Mahtematik, Heft V, Leipzig 1892, p.119-159.

REFERENCES

1. Cauchy A.L. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 64-90.
2. Cauchy A.L. Memoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les valeurs qu'elles renferment. Oeuvres complètes, 2-e série, T1. Paris, Gauthiers-Villars, 1905, p. 91-169.
3. Cauchy A.L., Memoire sur les arrangements que on peut former avec les letters donnees. Oeuvres complètes, 2-e série, T. XIII. Paris, Gauthiers-Villars, 1844, p. 171-282.

4. Cauchy A.L. Exercices d'analyse et de physique mathématiques, v. III, 1844, p. 183-185.
5. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. Sous la direction de Jean Dieudonné Herman, 1978.
6. Oeuvres de Lagrange, T.3, Serret J.A., Paris 1771.
7. Vandermonde A. T., Memoires de l'Academie Royale des Sciences, T.9, 1771, p. 365-416
8. Postnikov M. M. Teoriya Galua. Moskva, Faktorial Press, 2003
9. Jordan C. , Triate de substitutions et des equations algebriques, Paris, 1870.
10. Valson S.A., La vie et les travaux de baron Cauchy, Paris, 1868.
11. Dahan A. Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Etude de son approche du concept de groupe, Archive for History of Exact Sciences, v 23,4 by Springer-Verlag,1980, p. 279-316.
12. Meo M., The mathematical life of Cauchys group-theoreme, Historia mathematica, 31(2004), Portland Or, USA, p.196-221.
13. Kolmogorov A.N., Yushkevich A.P., Matematika XIX v., M., Nauka, 1978.
14. Burbaki N., Ocherki po istorii matematiki. Moskva 1963
15. Wussing H., Des genesis des abstracten gruppen begriffes, Berlin, 1969.
16. Burkhard H., die Anfange der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. Abhandlugen zur Geschichte der Mahtematik, Heft V, Leipzig 1892, p.119-159.

Получено: 30.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022