

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-178-187

Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов¹

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский,
Т. А. Морозова

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juska789@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Морозова Татьяна Анатольевна — старший преподаватель, МИРЭА — Российский технологический университет (г. Москва).

e-mail: morozova_t@mirea.ru

Аннотация

Данная работа посвящена получению оценок типа оценок Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов.

Намечены пути для получения аналогов оценки Быковского для конечного отклонения параллелепипедальной сетки.

Ключевые слова: функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, Т. А. Морозова. Об оценках Быковского для меры качества оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 178–187.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта

№19-41-710004_p_a. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-178-187

On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients²

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: juska789@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: i_rebrova@mail.ru***Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: dobrovol@tspu.ru***Morozova Tatiana Anatolyevna** — senior lecturer, MIREA — Russian Technological University (Moscow).*e-mail: morozova_t@mirea.ru*

Abstract

This work is devoted to obtaining estimates of the type of Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients.

The ways to obtain analogs of the Bykovsky estimate for the finite deviation of the parallelepipedal grid are outlined.

Keywords: quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, T. A. Morozova, 2022, "On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 178–187.

Посвящается 65-летию
Виктора Алексеевича Быковского.

1. Введение

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова [9] и Н. С. Бахвалова [1] были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

имеют ещё более простой вид, чем неравномерные сетки, но уже требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки $((a_j, p) = 1 \ (j = 1, 2, \dots, s))$, но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \dots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \dots, a_s)$. $S_p(z_1, \dots, z_s)$ выражается через сумму³

$$S_p(z_1, \dots, z_s) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \dots + z_s m_s)}{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s}, \quad (2)$$

где $z_1, \dots, z_s$ – произвольные целые, $\bar{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m , $p_1 = \left\lceil \frac{p-1}{2} \right\rceil$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ и символ Киробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если } b \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \quad (3)$$

Количественной мерой качества набора коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_s$ параллелепипедальной сетки называется величина

$$H(p, \vec{a}) = \frac{3^{s+1}}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^s \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{p} \right\} \right)^2, \quad (4)$$

которая равна приближенному значению интеграла от функции $h(\vec{x}) = \frac{3^{s+1}}{p} \prod_{j=0}^s (1 - 2x_j)^2$ по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой

$$1 = \int_0^1 \dots \int_0^1 h(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{3^{s+1}}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=0}^s \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{p} \right\} \right)^2 - R_p[h],$$

где $R_p[h]$ – погрешность приближенного интегрирования.

Выбор функции $h(\vec{x})$ и величины $H(p, \vec{a})$ связан с тем, что функция $h(\vec{x})$ является граничной функцией класса $E_s^2 \left(\cdot, \frac{\pi^2}{6} \right)$ (подробности см. [11]).

В работе [2] В. А. Быковский получил принципиально новые оценки для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе E_s^α . Фактически В. А. Быковский получил оценки сверху и снизу для гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения через сумму по конечному множеству минимальных решений, которое мы в своих работах называем множеством Быковского. В работе [3] оценки Быковского были перенесены на случай гиперболической дзета-функции произвольной решётки.

Цель данной работы – получить аналог оценок Быковского для основной меры качества наборов оптимальных коэффициентов и уточнить оценку Быковского для количественной меры качества.

2. Множество Быковского и вспомогательные леммы

Рассмотрим сравнение

$$a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N} \quad (5)$$

относительно целочисленных переменных $m_1, \dots, m_s$. Его ненулевое решение называется минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m'_1, \dots, m'_s)$, для которого

$$|m'_1| \leq |m_1|, \dots, |m'_s| \leq |m_s|; \quad |m'_1| + \dots + |m'_s| < |m_1| + \dots + |m_s|.$$

³Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

Множество всех минимальных решений сравнения (5) будем обозначать через $B_N(a_1, \dots, a_s)$.

Нетрудно показать, что при $(|n_1| + 1) \dots (|n_s| + 1) > N$ сравнение (5) имеет хотя бы одно ненулевое решение $m_1, \dots, m_s$ такое, что

$$|m_1| \leq |n_1|, \dots, |m_s| \leq |n_s|.$$

Поэтому для любого минимального решения выполняется неравенство $\overline{m_1} \dots \overline{m_s} \leq N$, где для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$. Отсюда следует конечность $B_N(a_1, \dots, a_s)$ — множества всех минимальных решений. Нетрудно видеть, что для решетки $\Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$ — решений сравнения (5) множество $B_N(a_1, \dots, a_s)$ минимальных решений сравнения совпадает с множеством локальных минимумов $B(\Lambda)$.

Пусть $\vec{m}_j = (m_{1j}, \dots, m_{sj})$ ($1 \leq j \leq r$), $r = r_N(a_1, \dots, a_s)$ есть все минимальные решения для данного набора коэффициентов $a_1, \dots, a_s$ сравнения (5). Величина

$$q_N(a_1, \dots, a_s) = \min_{1 \leq j \leq r} \overline{m_{1j}} \dots \overline{m_{sj}}$$

является гиперболическим параметром решетки $\Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$, а норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с соответствующей параллелепипедальной сеткой выражается через гиперболическую дзета-функцию целочисленной решётки $\Lambda = \Lambda(a_1, \dots, a_s; N)$:

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) = \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}, \quad (6)$$

где

$$\delta_m(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

— символ Коробова и $\overline{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x .

Периодическая функция $f(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$ имеет разложение в обычный ряд Фурье вида

$$f(x) = 1 + \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 m^2} e^{2\pi i m x}.$$

В работах [14, 15] доказана лемма о конечном ряде Фурье для функции $f(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$.

ЛЕММА 1. *Для конечного ряда Фурье*

$$3 \left(1 - 2 \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right)^2 = \sum_{m=-n_1}^{n_2} C(m) e^{2\pi i \frac{mx}{n}} \quad (x = 0, 1, \dots, n-1) \quad (7)$$

справедливы равенства $n_1 = \left[\frac{n-1}{2} \right]$, $n_2 = \left[\frac{n}{2} \right]$,

$$C(0) = 1 + \frac{2}{n^2}, \quad (8)$$

$$C(m) = \frac{6}{n^2 \sin^2 \pi \frac{m}{n}}, \quad (m \neq 0, -n_1 \leq m \leq n_2). \quad (9)$$

Из этой леммы следует теорема о конечном ряде Фурье для функции $H(p, \vec{a})$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$H(N, \vec{a}) = \left(1 + \frac{2}{N^2}\right)^s + \sum_{m_1, \dots, m_s = -N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{\psi(m_1) \dots \psi(m_s)},$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} \frac{N^2}{N^2 + 2}, & \text{при } m = 0; \\ \frac{N^2 \sin^2 \pi \frac{m}{N}}{6}, & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad N_1 = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor, \quad N_2 = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor.$$

Обозначим через $\Pi(\vec{a}, \vec{x})$ прямоугольный s -мерный полуоткрытый параллелепипед вида

$$\Pi(\vec{a}, \vec{x}) = \left\{ \vec{y} \mid \begin{cases} a_\nu \leq y_\nu < a_\nu + \bar{x}_\nu & \text{при } a_\nu \geq 0 \\ a_\nu < y_\nu \leq a_\nu + \bar{x}_\nu & \text{при } a_\nu < 0 \end{cases} \quad (\nu = 1, \dots, s) \right\},$$

а через $N_\Lambda(\vec{a}, \vec{x})$ — количество точек решётки Λ , лежащих в этом параллелепипеде. В работе [3] доказана следующая лемма:

ЛЕММА 2. *Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) > 1$, то $\det \Lambda > 1$ и для точки $\vec{a}$ и для любого локального минимума $\vec{x}_j \in B(\Lambda)$ справедливо неравенство*

$$N_\Lambda(\vec{a}, \vec{x}_j) \leq 1. \quad (10)$$

В работе [3] доказана принципиальная лемма:

ЛЕММА 3. *Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. При $\alpha > 1$ для суммы*

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda, \\ \overline{y_1} \geq \overline{x_{1j}}, \dots, \overline{y_s} \geq \overline{x_{sj}}}} \frac{1}{(\overline{y_1} \dots \overline{y_s})^\alpha} \quad (11)$$

справедливо неравенство

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\vec{x}_j) \leq \frac{2^s \left(1 + \frac{1}{\alpha-1}\right)^s}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^\alpha}.$$

3. Оценка мер качества

Будим использовать покоординатное умножение двух точек: $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \cdot \overline{y_1}, \dots, x_s \cdot \overline{y_s})$. Полагаем $I_s(N) = \left[-\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right]^s$ и

$$R_\Lambda(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \overline{y_1} \geq \overline{x_{1j}}, \dots, \overline{y_s} \geq \overline{x_{sj}}}} \frac{1}{\overline{y_1} \dots \overline{y_s}},$$

тогда справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R_\Lambda(\vec{x}_j)$ справедливо неравенство*

$$R_\Lambda(\vec{x}_j) \leq \frac{2^s}{\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}}} \prod_{\nu=1}^s (\ln N - \ln(2\overline{x_{\nu j}}) + \gamma) \leq \frac{2^s \ln^s N}{\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}}},$$

где γ — константа Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим величины $k_\nu = \left\lceil \frac{\lceil \frac{N}{2} \rceil}{x_{\nu j}} \right\rceil$, $l_\nu = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}{x_{\nu j}} \right\rfloor$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью прямоугольных параллелепипедов $\Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)$ с $\vec{a} \in \mathbb{Z}^s$, $a_\nu \neq -1, 0$, $-l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu$, ($1 \leq \nu \leq s$):

$$\begin{aligned}
 R_\Lambda(\vec{x}_j) &= \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \bar{y}_1 \geq \bar{x}_{1j}, \dots, \bar{y}_s \geq \bar{x}_{sj}}} \frac{1}{\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s} = \\
 &= \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu \\ a_\nu \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \sum_{\vec{y} \in \Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)} \frac{1}{\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s} \leq \\
 &\leq \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu \\ a_\nu \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{N_\Lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|) \bar{x}_{1j} \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|) \bar{x}_{sj}} \leq \\
 &\leq \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}} \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_\nu \leq a_\nu \leq k_\nu \\ a_\nu \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{1}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|) \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|)} = \\
 &= \frac{1}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})} \prod_{\nu=1}^s \left(\sum_{a=-l_\nu}^{-2} \frac{1}{|a+1|} + \sum_{a=1}^{k_\nu} \frac{1}{a} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}} \prod_{\nu=1}^s \left(2 \sum_{a=1}^{\frac{N}{2\bar{x}_{\nu j}}} \frac{1}{a} \right) \leq \frac{2^s}{(\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj})} \prod_{\nu=1}^s (\ln N - \ln(2\bar{x}_{\nu j}) + \gamma) \leq \frac{2^s \ln^s N}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}},
 \end{aligned}$$

так как $\gamma < \ln 2$, и лемма полностью доказана. $\square$

Назовём суммой Быковского выражение вида

$$SB_N(a_1, \dots, a_s) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\vec{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{sj})$ ($1 \leq j \leq r$) — все локальные минимумы из $B(\Lambda)$, причём $\vec{x}_j \in B^*(\Lambda)$ ($j = 1, \dots, r^*$) и $\vec{x}_{j+r^*} = -\vec{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ ($j = 1, \dots, r^*$). Тогда справедливы неравенства

$$2SB_N(a_1, \dots, a_s) \leq S_N(a_1, \dots, a_s) \leq 2^s \ln^s N \cdot SB_N(a_1, \dots, a_s). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, левое неравенство очевидно, так как

$$2SB_N(a_1, \dots, a_s) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\bar{x}_{1j} \dots \bar{x}_{sj}}.$$

Для доказательства правого неравенства заметим, что

$$\begin{aligned}
 S_N(a_1, \dots, a_s) &\leq \sum_{j=1}^{r^*} \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ |y_1| \geq |x_{1j}|, \dots, |y_s| \geq |x_{sj}|}} \frac{1}{\bar{y}_1 \dots \bar{y}_s} = \sum_{j=1}^{r^*} R_\Lambda(\vec{x}_j),
 \end{aligned}$$

и утверждение теоремы получается из леммы 4. $\square$

Положим

$$R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \overline{y_1} \geq \overline{x_{1j}}, \dots, \overline{y_s} \geq \overline{x_{sj}}}} \frac{1}{\psi(y_1) \dots \psi(y_s)}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $\vec{x}_j$ — произвольный локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы $R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j)$ справедливо неравенство

$$R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) \leq \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим величины $k_{\nu} = \left\lceil \frac{\lceil \frac{N}{2} \rceil}{x_{\nu j}} \right\rceil$, $l_{\nu} = \left\lfloor \frac{\lceil \frac{N-1}{2} \rceil}{x_{\nu j}} \right\rfloor$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью прямоугольных параллелепипедов $\Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)$ с $\vec{a} \in \mathbb{Z}^s$, $a_{\nu} \neq -1, 0$, $-l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu}$, ($1 \leq \nu \leq s$):

$$\begin{aligned} R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) &= \sum_{\substack{\vec{y} \in \Lambda \cap I_s(N), \\ \overline{y_1} \geq \overline{x_{1j}}, \dots, \overline{y_s} \geq \overline{x_{sj}}}} \frac{1}{\psi(y_1) \dots \psi(y_s)} = \\ &= \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu} \\ a_{\nu} \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \sum_{\vec{y} \in \Pi(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j)} \frac{1}{\psi(y_1) \dots \psi(y_s)}. \end{aligned}$$

При $k_{\nu} \geq a_{\nu} > 0$ и $a_{\nu} \cdot \overline{x_{\nu j}} \leq y_{\nu} < (a_{\nu} + 1) \cdot \overline{x_{\nu j}}$ имеем

$$\frac{6}{\pi^2(a_{\nu} + 1)^2 \cdot \overline{x_{\nu j}}^2} \leq \frac{6}{\pi^2 N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1}{\psi(y_{\nu})} = \frac{6}{N^2 \sin^2 \pi \frac{y_{\nu}}{N}} \leq \frac{1,5}{N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1,5}{a_{\nu}^2 \cdot \overline{x_{\nu j}}^2}.$$

При $l_{\nu} \leq a_{\nu} < -1$ и $a_{\nu} \cdot \overline{x_{\nu j}} < y_{\nu} \leq (a_{\nu} + 1) \cdot \overline{x_{\nu j}}$ имеем

$$\frac{6}{\pi^2 a_{\nu}^2 \cdot \overline{x_{\nu j}}^2} \leq \frac{6}{\pi^2 N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1}{\psi(y_{\nu})} = \frac{6}{N^2 \sin^2 \pi \frac{y_{\nu}}{N}} \leq \frac{1,5}{N^2 \cdot \left\| \frac{y_{\nu}}{N} \right\|^2} \leq \frac{1,5}{(a_{\nu} + 1)^2 \cdot \overline{x_{\nu j}}^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu} \\ a_{\nu} \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{N_{\Lambda}(\vec{a} \cdot \vec{x}_j, \vec{x}_j) \cdot (1,5)^s}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|)^2 \overline{x_{1j}}^2 \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|)^2 \overline{x_{sj}}^2} \leq \\ &\leq \frac{(1,5)^s}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2} \sum_{\substack{\vec{a} \in \mathbb{Z}^s, -l_{\nu} \leq a_{\nu} \leq k_{\nu} \\ a_{\nu} \neq -1, 0 \ (1 \leq \nu \leq s)}} \frac{1}{\min(|a_1|, |a_1 + 1|)^2 \dots \min(|a_s|, |a_s + 1|)^2} = \\ &= \frac{(1,5)^s}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2} \prod_{\nu=1}^s \left(\sum_{a=-l_{\nu}}^{-2} \frac{1}{|a+1|^2} + \sum_{a=1}^{k_{\nu}} \frac{1}{a^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{3^s}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2} \prod_{\nu=1}^s \left(\sum_{a=1}^{\frac{N}{2\overline{x_{\nu j}}}} \frac{1}{a^2} \right) < \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2}, \end{aligned}$$

так как $\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} = \frac{\pi^2}{6}$, и лемма полностью доказана. $\square$

Назовём суммой Быковского второго порядка выражение вида

$$SB_N^{(2)}(a_1, \dots, a_s) = \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедлива оценка*

$$\left| H(N, \vec{a}) - \left(1 + \frac{2}{N^2} \right)^s \right| \leq \frac{\pi^{2s}}{2^{s-1}} \cdot SB_N^{(2)}(a_1, \dots, a_s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из теоремы 1 и леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} \left| H(N, \vec{a}) - \left(1 + \frac{2}{N^2} \right)^s \right| &= \sum'_{m_1, \dots, m_s = -N_1}^{N_2} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{\psi(m_1) \dots \psi(m_s)} = \\ &= \sum_{j=1}^r R_{\Lambda}^*(\vec{x}_j) \leq \sum_{j=1}^r \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2} = 2 \sum_{j=1}^{r^*} \frac{\frac{\pi^{2s}}{2^s}}{(\overline{x_{1j}} \dots \overline{x_{sj}})^2} = \frac{\pi^{2s}}{2^{s-1}} \cdot SB_N^{(2)}(a_1, \dots, a_s). \end{aligned}$$

$\square$

4. Заключение

В работе [4] доказано, что локальное отклонение параллелепипедальной сетки оценивается через основную меру качества

$$\left| D_s \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right) \right| \leq S_p(1, a_1, \dots, a_{s-1}) \quad (13)$$

и следовательно для неё выполняется оценка сверху аналогичная (12).

В работе [4] получено интересное выражение для конечного отклонения параллелепипедальной сетки

$$\begin{aligned} D_p = \max_{1 \leq n_\nu \leq p (1 \leq \nu \leq s)} & \left| \sum'_{m_2, \dots, m_s = -p_1, m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1} \not\equiv 0 \pmod{p}}^{p_2' \dots'} \left(\prod_{\nu=2}^s \frac{\sin \left(\pi \frac{n_\nu m_\nu}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_\nu}{p} \right)} \right) \times \right. \\ & \times \frac{\sin \left(\pi \frac{n_1 (m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1})}{p} \right)}{p \sin \left(\pi \frac{m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}}{p} \right)} \times \\ & \times \cos \left(\pi \frac{-(n_1 - 1)(m_2 a_1 + \dots + m_s a_{s-1}) + (n_2 - 1)m_2 + \dots + (n_s - 1)m_s}{p} \right) \Bigg| + \\ & + \theta \frac{sB(2 \ln p + 2\gamma - 2 \ln 2 + 1)^{s-1}}{p}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

Здесь открываются возможные перспективы по получению аналогов оценки Быковского для конечного отклонения параллелепипедальной сетки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.
2. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
3. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.
4. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Конечное отклонение и основная мера качества для сеток Коробова // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 2, С. 56–73.
5. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устьян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.
6. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.
7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.
8. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
9. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
10. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
11. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
12. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
13. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.
14. Серегина Н. К. Алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 193 — 201.
15. Серегина Н. К. О количественной мере качества оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1, 2015. С. 22–29.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 3–18.
2. Bykovskij, V.A 2002, "On the error of number-theoretic quadrature formulas", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.
3. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // *Chebyshevsky Collection*, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.
4. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "The final deviation and the main quality measure for Korobov grids *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 56–73.
5. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil'kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, "On a single algorithm for finding optimal coefficients", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.
6. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", *Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii* (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.
7. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.
8. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.
9. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
10. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.
11. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
12. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
13. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.
14. Seregina N. K., 2013, "Algorithms of numerical integration with the stopping rule", *TulSU extraction. Natural sciences*. Issue 3. pp. 193 — 201.
15. Seregina N. K., 2015, "On the quantitative measure of the quality of optimal coefficients", *Izvestiya TulSU. Natural sciences*. Issue 1, pp. 22–29.

Получено: 17.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022