ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-170-177

Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические[1]

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Кормачева Антонина Николаевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: juska789@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

Данная работа посвящена получению оценок отклонения параллелепипедальной сетки, которая является рациональной сеткой, приближающей алгебраическую сетку квадратичного поля.

Поставлены новые задачи для дальнейших исследований.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Н. Кормачева, Н. М. Добровольский. Оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 170–177.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 4.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-170-177

Deviation estimates for rational grids approximating algebraic[2]

A. N. Kormacheva

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Kormacheva Antonina Nikolaevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: juska789@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

This paper is devoted to obtaining estimates of the deviation of a parallelepipedal grid, which is a rational grid approximating the algebraic grid of a quadratic field.

New tasks have been set for further research.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. N. Kormacheva, N. M. Dobrovol'skii, 2022, "Deviation estimates for rational grids approximating algebraic", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 170–177.

1. Введение

Метод оптимальных коэффициентов появился в 1959 году и первые публикации Н. М. Коробова [13] и Н. С. Бахвалова [1] были сделаны в 4 выпуске Вестника Московского университета.

В 1976 году в работе [17] К. К. Фролова появились алгебраические сетки. В 1979 году в кулуарах после защиты кандидатской диссертации К. К. Фролова одним из авторов была сформулирована задача о приближении алгебраических сеток рациональными.

Решению этой задачи посвящен ряд работ А. Н. Кормачёвой и А. В. Михляевой [10], [15], [16] и другие работы этих авторов.

В 1984 году Н. М. Добровольский получил общие оценки отклонения параллелепипедальных сеток через гиперболический параметр решёток [4].

Цель данной работы — получить оценки отклонения для рациональных сеток, приближающих алгебраические для случая квадратичного поля из работы [10].

Все обозначения и определения соответствуют работам [10], [12], в которых приведены необходимые сведения из теории цепных дробей, о скобках Эйлера и о наилучших приближениях второго рода.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

2. Необходимые сведения

Прежде всего сформулируем теорему об оценке отклонения из работы [4].

Теорема 1. *Пусть для решётки Λ справедливо неравенство $q(\Lambda) > 1$ для её гиперболического параметра, тогда для отклонения обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ справедливо неравенство*

$$D_s(N) \leqslant 2\left(4^{s-1} + \frac{2\det\Lambda}{q(\Lambda)}(11 + 5\ln\det\Lambda)^s\right), \tag{1}$$

$$N = \det\Lambda + \theta(\Lambda)\left(4^{s-1} + \frac{2\det\Lambda}{q(\Lambda)}(11 + 5\ln\det\Lambda)^s\right), \tag{2}$$

где N — количество точек сетки $M(\Lambda)$ и $|\theta(\Lambda)| \leqslant 1$.

В работе [15] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\quad \Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p} \quad n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det\Lambda(F) = 2\sqrt{p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

с периодом $(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m-ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m\sqrt{p} = P_m + \frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\quad \vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Нетрудно видеть, что для гиперболического параметра справедливо равенство $q(\Lambda_m(F)) = Q_m^2$.

Отсюда следует, что для алгебраической сетки $M(\Lambda_m(F))$, которая является обобщённой параллелепипедальной сеткой, для её отклонения справедлива оценка

$$D_2(N) \leqslant 2\left(4+4\sqrt{p}(11+5(\ln 2+2\ln Q_m+\ln\sqrt{p})^2\right),$$

а для количества точек —

$$N = 2Q_m^2\sqrt{p}+\theta(\Lambda_m(F))\left(4+4\sqrt{p}(11+5(\ln 2+2\ln Q_m+\ln\sqrt{p})^2\right).$$

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(p) = 2Q_mP_m$.

Как известно (см. [8], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda,\Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda,\Gamma) = \max(\ln(1+\mu),\ln(1+\nu)),\quad \mu=\inf_{\Lambda=A\cdot\Gamma}\|A-E_s\|,\quad \nu=\inf_{B\cdot\Lambda=\Gamma}\|B-E_s\|,$$

$$E_s=\begin{pmatrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant s},\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j,\end{cases}\qquad \|A\| = s\cdot\max_{1\leqslant i,j\leqslant s}|a_{ij}|.$$

В работе [10] найдено расстояние $\rho(\Lambda_m(F),\Lambda_m(p))$ для любого натурального m и простого p вида $p=2$ или $p\equiv 3 \pmod 4$.

Теорема 2. *При $P_m\geqslant 2$, $Q_m\geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F),\Lambda_m(p)) = \ln\left(1+\max\left(\frac{\theta_m}{(-1)^m\theta_m+P_mQ_m},\frac{\theta_m}{P_mQ_m}\right)\right).$$

В работе [15] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m,Q_m)})$ арифметических операций, а в работе [16] построен алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m,Q_m))$ арифметических операций. Центральным моментом в этой работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой. Оптимальный коэффициент a_m по модулю $N_m = 2P_mQ_m$ в этой работе задавался по формуле

$$a_m=\begin{cases}2P_mQ_{m-1}-1 & \text{при } m \text{ — нечетном},\\ 2P_m(Q_m-Q_{m-1})-1 & \text{при } m \text{ — четном}.\end{cases}$$

В работе [9] были доказаны две теоремы о соответствующих цепных дробях.

Теорема 3. *При нечетном m справедливо равенство*

$$\frac{a_m}{N_m} =$$

$$= \cfrac{1}{q_m+\cfrac{1}{q_{m-1}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{2q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_m}}}}}}}}.$$

Теорема 4. *При четном m справедливо равенство*

$$\frac{a_m}{N_m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q_m - 1 + \cfrac{1}{q_{m-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_m}}}}}}}}}.$$

3. Множество Быковского для двумерной решётки линейного сравнения

Для решётки решений $\Lambda(a,N)$ решений линейного сравнения $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod N$ в работе [12] доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Для множества Быковского $B(a,N)$ справедливо равенство*

$$B^*(a,N) = \{((-1)^m[q_{m+2},\dots,q_n]_{(n-m-1)}, Q^*_m) | m = 0,\dots,n-1\}, \quad B(a,N) = B^*(a,N) \cup -B^*(a,N).$$

Кроме этого, $r(a,N) = 2n$.

Следствие 1. *Для гиперболического параметра $q(\Lambda(a,N))$ двумерной решётки $\Lambda(a,N)$ решений линейного сравнения справедливо равенство*

$$q(\Lambda(a,N)) = \min_{0 \leqslant m \leqslant n-1} [q_{m+2},\dots,q_n]_{(n-m-1)} \cdot Q^*_m.$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(a,N)) \leqslant a$ для $1 \leqslant a < N$, $(a,N) = 1$.

Здесь Q^*_m — знаменатель m-ой подходящей дроби к числу $\frac{a}{N}$, а $[q_{m+2},\dots,q_n]_{(n-m-1)}$ — скобки Эйлера порядка $n-m-1$.

Если через $a(p)$ обозначить величину максимального неполного частного разложения $\sqrt{p}$ в цепную дробь, то, повторяя рассуждения из работы [12], получим оценку снизу для гиперболического параметра решётки $\Lambda_m(p)$, а именно,

$$q(\Lambda_m(p)) \geqslant \frac{2P_mQ_m}{a(p)+2}.$$

Отсюда следует, что для отклонения параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ справедлива оценка

$$D_2(N) \leqslant 2\left(4 + 4(a(p)+2)(11 + 5(\ln 2 + \ln Q_m + \ln P_m)^2)\right),$$

а для количества точек —

$$N = 2Q_mP_m.$$

Так как параллелепипедальная сетка $M(\Lambda_m(p))$ является рациональной сеткой, приближающей алгебраическую сетку $M(\Lambda_m(F))$, то поставленная цель достигнута.

4. Заключение

Аналогичные утверждения справедливы и для решёток произвольного квадратичного поля, но необходимо рассматривать случаи, как и в работе [11].

В данной тематике возникает несколько вопросов.

Во-первых, можно ли для отклонения параллелепипедальных сеток усилить оценки работы [4] и получить оценки типа оценок Быковского из работ [2] и [3].

Во-вторых, в двумерном случае получены алгоритмы вычисления гиперболического параметра за $O(\ln N)$ от количества точек сетки. Возникает вопрос, а можно ли усилить результаты работ [6] и [7]?

Аналогичный вопрос возникает о возможности переносов результатов работы [5] на большие размерности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

2. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

3. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

4. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

5. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

6. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

8. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

9. Кормачева А. Н. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.

10. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.

11. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

12. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.

13. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

14. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

15. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

16. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.

17. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

3. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // Chebyshevsky Collection, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

4. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids”, Dep. v VINITI, no. 6089–84.

5. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil’kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, “On a single algorithm for finding optimal coefficients”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

6. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.

7. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.

8. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

9. Kormacheva, A. N., 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 293–301.

10. A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 366–373.

11. A. N. Kormacheva, 2020, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

12. A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyp erb olic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", Chebyshevskii sbornik, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.

13. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

14. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

15. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

16. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

17. Frolov, K.K. 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

Получено: 17.06.2022
Принято в печать: 8.12.2022