ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-157-161

Задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной 3-сфере[1]

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Экстремальная задача Дельсарта $A(d, s)$ для сферических s-дизайнов позволяет оценить снизу минимальной число узлов $N(d, s)$ взвешенной квадратурной формулы на сфере $\mathbb{S}^d$. Мы доказываем, что

$$A(3, 4) = 14.560317967882\dots.$$

Отсюда $N(3, 4) \geqslant 15$. Наша открытая гипотеза состоит в том, что $N(3, 4) = 16$.

Ключевые слова: единичная сфера, сферический дизайн, квадратурная формула, задача Дельсарта.

Библиография: 1 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной 3-сфере // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 157–161.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-157-161

Delsarte problem for 4-designs on the unit 3-sphere[2]

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Martyanov Ivan Anatol'evich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, `https://rscf.ru/project/18-11-00199/`.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), `https://rscf.ru/project/18-11-00199/`.

Abstract

The extremal Delsarte problem $A(d,s)$ for spherical s-designs allows us to estimate from below the minimum number of nodes $N(d,s)$ of a weighted quadrature formula on the sphere $\mathbb{S}^d$. We prove that

$$A(3,4) = 14.560317967882\ldots.$$

Hence $N(3,4) \geqslant 15$. Our open conjecture is that $N(3,4) = 16$.

Keywords: unit sphere, spherical design, quadrature formula, Delsarte problem.

Bibliography: 1 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov, 2022, “Delsarte problem for 4-designs on the unit 3-sphere”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 157–161.

Введение

В работе [1] решена задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной сфере $\mathbb{S}^2$. Для этого развивается метод Арестова–Бабенко. Здесь мы предложим другую версию предложения 2 из этой работы (см. теорему 1) и, как следствие, решим аналогичную задачу для 4-дизайнов на сфере $\mathbb{S}^3$ (см. предложение 1). Основные принципы решения остаются прежними. Основную библиографию по проблеме см. в [1].

Пусть $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_{d+1}^2 = 1\}$ — единичная d-сфера, $d \in \mathbb{N}$. Конечно множество узлов $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \subset \mathbb{S}^d$ и положительных весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_N = 1$, называется дизайном порядка s, если квадратурная формула

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \int_{\mathbb{S}^d} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu f(x^{(\nu)})$$

справедлива для любого алгебраического полинома

$$f(x) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{d+1}=0,1,2,\ldots\\ k_1+\ldots+k_{d+1}\leqslant s}} c_{k_1\ldots k_{d+1}} x_1^{k_1} \ldots x_{d+1}^{k_{d+1}}$$

степени не выше s. Важной проблемой дискретной геометрии является нахождение дизайнов порядка s с наименьшим числом узлов, которое обозначим $N(d,s)$. Различают случаи равных и общих весов. В обоих вариантах данная проблема сложная и величина $N(d,s)$ вычислена только в отдельных случаях. В частности, при $d = 2$ она найдена для $s = 0,1,2,3,4,5$, при $d = 3$ для $s = 0,1,2,3,11$.

Рассмотрим подробнее случай $d = 3$, $s = 4$. Нами экспериментально был построен взвешенный 4-дизайн из 16 узлов

0.639726	0.0152617	0.595778	0.485352	0.0553634
−0.629721	0.696058	−0.270633	−0.213805	0.0570614
−0.245647	0.183476	−0.946618	0.0995471	0.0573756
−0.866471	0.0634142	0.470147	−0.155462	0.0588697
0.920334	−0.143129	0.155223	−0.32925	0.0589884
−0.250351	−0.390209	0.735751	0.493692	0.0592385
0.433062	−0.384394	−0.73696	−0.348696	0.0596654
0.0522311	−0.196284	0.732337	−0.649943	0.0623637
−0.471544	−0.396094	−0.255867	−0.745176	0.0626609
0.198229	0.487008	−0.160801	−0.835267	0.0634566
0.138091	−0.973979	0.155831	−0.0895129	0.0635595
−0.686782	−0.530328	−0.341251	0.361429	0.0655224
0.0678247	0.75557	0.649959	−0.045453	0.0669076
0.41231	−0.392335	−0.364503	0.737029	0.0687174
0.583212	0.681643	−0.379628	0.226075	0.0698256
−0.331415	0.444335	0.0200545	0.832063	0.0704237

(построчно $(x_1^{(\nu)}\ x_2^{(\nu)}\ x_3^{(\nu)}\ x_4^{(\nu)}\ \lambda_\nu)$, $\nu=1,\ldots,16$). К сожалению, нам не удалось найти его аналитическую форму в литературе. Поэтому гипотетически имеем $N(3,4)\leqslant 16$.

Из оценки плотных дизайнов Дельсарта–Гёталса–Зейделя следует, что $N(3,4)\geqslant 14$. Как известно, в общем случае оценка плотных дизайнов может быть улучшена, если рассмотреть задачу Дельсарта для функций. Напомним основные факты. Пусть $P_k^{(d)}(t)=\frac{P_k^{(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)}(t)}{P_k^{(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)}(1)}$ — ортогональные полиномы Якоби–Гегенбауэра. Имеем

$$N(d,s)\geqslant A(d,s),$$

где

$$A(d,s)=\sup_{f\in F(d,s)} f(1)$$

и $F(d,s)$ — класс непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций вида $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k^{(d)}(t)$, таких что $f(t)\geqslant 0$ при $t\in[-1,1]$, $f(1)>0$, $f_0=1$, $f_k\leqslant 0$ при $k\geqslant s+1$.

Оценку плотных дизайнов влечет решение полиномиальной проблемы

$$\sup_{\substack{f\in F(d,s)\\ f_{s+1}=f_{s+2}=\ldots=0}} f(1)\leqslant A(d,s).$$

Это дает $A(3,4)\geqslant 14$. Разные авторы показали, что $A(3,4)>14$, откуда $N(3,4)\geqslant 15$. Если окажется, что $A(3,4)>15$, то это позволило бы вычислить $N(3,4)$. Однако справедлив следующий результат.

Предложение 1. *Имеем (все цифры значащие)*

$$A(3,4)=14.560317967882\ldots.$$

Таким образом, решение задачи Дельсарта дает только $N(3,4)\geqslant 15$. Выскажем гипотезу, что $N(3,4)=16$.

Для доказательства предложения 1 воспользуемся следующим утверждением, в котором положим $Q(f)=f(1)+\sum_{i=1}^{u}\rho_i f(\tau_i)$, $K=\{1,\ldots,s,k_1,\ldots,k_v\}$, $1'=1$ для $\tau_1>-1$ и пусто иначе.

Теорема 1. *Пусть найдутся узлы $-1\leqslant\tau_1<\ldots<\tau_u<1$, веса $\rho_1>0,\ldots,\rho_u>0$, целые числа $s+1\leqslant k_1<\ldots<k_v$ и полином $g=1+\sum_{k\in K} g_k P_k^{(d)}\in F(d,s)$, такие что*

$$Q(P_k^{(d)})=0,\quad k\in K,\quad g(\tau_i)=0,\quad i=1,\ldots,u,\quad g'(\tau_i)=0,\quad i=1',2,\ldots,u, \tag{1}$$

$$\tau_i \text{ — единственные нули } g \text{ на } [-1,1], \tag{2}$$

$$Q(P_k^{(d)})>0,\quad k\notin K. \tag{3}$$

Тогда

$$A(d,s)=Q(1)$$

и g — экстремальный полином.

Доказательство теоремы 1. По сравнению с [1, предложение 2] мы немного изменили формулировку и добавили интерполяционное условие на производные экстремального полинома g. Оно естественно вытекает из его неотрицательности. Тогда в узлах $\tau_i \in (-1,1)$ будут двойные нули. Для $\tau_1 = -1$ достаточности кратности один.

Далее доказательство аналогично: если $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k^{(d)}$ — произвольная функция из класса $F(d,s)$, то в силу неотрицательности f, неположительности f_k при $k \geqslant s+1$ и условий теоремы получаем

$$f(1) \leqslant f(1) + \sum_{i=1}^{u} \underbrace{\rho_i f(\tau_i)}_{\geqslant 0} = Q(f) = \underbrace{f_0 Q(P_0)}_{=Q(1)} + \sum_{k\in K} f_k \underbrace{Q(P_k^{(d)})}_{=0} + \sum_{k\notin K} \underbrace{f_k}_{\leqslant 0} \underbrace{Q(P_k^{(d)})}_{>0} \leqslant Q(1).$$

Отсюда $A(d,s) \leqslant Q(1)$. При этом на полиноме g левое и правое неравенства становятся равенствами. Теорема 1 доказана.

Заметим, что в [1] при $d = 2$, $s = 4$ оказалось, что $u = v = 4$, $K = \{1,2,3,4,7,12,17,22\}$, поэтому для нахождения 8 неизвестных ρ_i, τ_i достаточно системы $Q(P_k^{(2)}) = 0$, $k \in K$, из 8 уравнений. Полином g уже может быть найден после. В общей ситуации это может быть не так, что подтверждает текст далее.

Доказательство предложения 1. Пусть $d = 3$, $s = 4$. С помощью численных экспериментов по методу [1] вначале находим параметры u, v, K и $1'$, заодно получая грубые значения коэффициентов g_k, $k \in K$, весов $\rho_1,\ldots,\rho_u$ и узлов $\tau_1,\ldots,\tau_u$. Оказывается, что

$$u = 3, \quad v = 1, \quad K = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7\}, \quad 1' = 1.$$

Далее на основе теоремы 1 (1) коэффициенты g_k, веса ρ_i и узлы τ_i (всего $5+3+3 = 11$ переменных) находятся с большой точностью (мы использовали 100 знаков после точки) из системы 11 полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами

$$Q(P_k^{(3)}) = 0, \quad k \in K, \quad g(\tau_i) = g'(\tau_i) = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{4}$$

Данная система решается быстро, если в качестве начальных приближений использовать грубые приближения переменных, найденные на предыдущем шаге. Выпишем результат с 10-ю знаками:

$$g_k\colon 2.65935585558,\ 4.85186130728,\ 3.64724886638,\ 3.56985987663,\ -1.16800793798,$$

$$\rho_i\colon 4.31650404208,\ 1.58599756126,\ 7.65781636454,$$

$$\tau_i\colon -0.643762285167,\ -0.323139939939,\ 0.299210839445.$$

Интересующая нас величина

$$Q(1) = 14.5603179678828147261516205432563\ldots$$

Заметим, что здесь системы $Q(P_k^{(3)}) = 0$, $k \in K$, из 5 уравнений недостаточно для определения 6 неизвестных ρ_i, τ_i.

Факторизуя полином g убеждаемся, что он имеет 6 комплексных нулей в малой (размера 10^{-49}) окрестности узлов τ_i и один нуль $1.335382\ldots$ вне отрезка $[-1,1]$. Отсюда и из непрерывной зависимости g_k от ρ_i, τ_i следует, что если система (4) в окрестности найденного численного решения имеет единственное действительное аналитическое решение (сертификация решения), то (1) и (2) будут выполнены. Тогда соответствующий аналитический полином g неотрицателен на $[-1,1]$.

В [1] для сертификации решения использовалась функция certify из пакета HomotopyContinuation.jl, в которой реализован интервальный метод Кравчука. В нашем случае сертификации прошла успешно и функция certify выдала, что в малой окрестности (размера меньше 10^{-7}) существует единственное действительное решение системы (4).

Осталось проверить (3). Достаточно использовать приближенные значения ρ_i, τ_i, если получаемые оценки будут многократно превышать погрешность. Для больших k по аналогии с [1] воспользуемся простой равномерной оценкой полиномов $P_k^{(3)}(t) = \frac{\sin((k+1)\arccos t)}{(k+1)\sqrt{1-t^2}}$. Имеем

$$Q(P_k^{(3)}) = 1 + \sum_{i=1}^{3} \rho_i P_k^{(3)}(\tau_i) \geqslant 1 - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\rho_i}{\sqrt{1-\tau_i^2}} > 1 - \frac{15.4}{k+1} > 0.037, \quad k \geqslant 15.$$

При $k \leqslant 14$, $k \notin K$, непосредственно проверяем, что $Q(P_k^{(3)}) > 0.1$.

Предложение 1 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартьянов И.А. Решение задачи Дельсарта для 4-дизайнов на сфере S^2 // Чебышевский сборник. 2021. Том 22, № 3. С. 154–165.

REFERENCES

1. Martyanov, I.A. 2021. “Solving the Delsarte problem for 4-designs on the sphere S^2”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 154–165. (In Russ.)

Получено: 01.10.2022
Принято в печать: 8.12.2022