

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-152-156

Весовое неравенство Карлемана для дробного градиента¹

Д. В. Горбачев

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

Доказывается весовое неравенство Карлемана для дробного градиента

$$\|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{-\gamma} f\|_q \leq C \|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{\bar{\gamma}-\delta} \nabla^\alpha f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0.$$

При $\alpha = 1$ оно было доказано Л. Де Карли, Д. Горбачевым и С. Тихоновым (2020). Приведено приложение неравенства Карлемана для доказательства свойства единственности продолжения слабого решения дифференциального неравенства с потенциалом $|\nabla^\alpha f| \leq V|f|$ в весовом пространстве Соболева.

Ключевые слова: неравенство Карлемана, дробный градиент, преобразование Фурье, неравенство Питта, дифференциальное неравенство.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев. Весовое неравенство Карлемана для дробного градиента // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 152–156.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-152-156

Weighted Carleman inequality for fractional gradient²

D. V. Gorbachev

Gorbachev Dmitriy Victorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Abstract

We prove the weighted Carleman inequality for the fractional gradient

$$\|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{-\gamma} f\|_q \leq C \|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{\bar{\gamma}-\delta} \nabla^\alpha f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0.$$

For $\alpha = 1$, it was proved by L. De Carli, D. Gorbachev, and S. Tikhonov (2020). An application of the Carleman inequality is given to prove the weak unique continuation property of a solution of the differential inequality with the potential $|\nabla^\alpha f| \leq V|f|$ in a weighted Sobolev space.

Keywords: Carleman's inequality, fractional gradient, Fourier transform, Pitt's inequality, differential inequality.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, 2022, "Weighted Carleman inequality for fractional gradient", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 152–156.

В работе [2] доказано следующее параметрическое весовое неравенство типа Карлемана для градиента произвольной финитной бесконечно дифференцируемой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$: для параметра $t \geq 0$

$$\|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} u f\|_q \leq C(t) \|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} v \nabla f\|_p, \quad 1 < p \leq q < \infty, \quad |a| = 1, \quad (1)$$

где u, v — подходящие веса. Здесь и далее через C обозначается положительная константа, которая не зависит от существенных параметров и может изменяться от места к месту, $C(t)$ означает константу, зависящую от параметра t . В (1) константа $C(t)$ не зависит от f и a и ограничена при $t \geq 1$. Отметим, что при $t = 0$, $u = v = 1$ неравенство (1) называется неравенством Пуанкаре–Соболева. Для $t = 0$ и степенных u, v его можно вывести из неравенства Харди–Рейлиха для дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{1/2}$.

Неравенствам Карлемана посвящено большое число работ. Это связано с тем, что они в том числе применяются для доказательства свойства единственности продолжения слабых решений дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. Основное внимание уделялось безвесовому случаю $u = v = 1$. В отличие от этого в работе [2] неравенство (1) было применено для решения проблемы единственности продолжения в весовом случае.

Пусть $\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$ — прямое и обратное преобразования Фурье соответственно. В [2] неравенство (1) доказано при помощи весовых неравенств Питта для преобразования Фурье. Данная идея при $t = 0$ восходит к Н.Р. Heinig [5]. Типичное неравенство Питта имеет вид $\|u\mathcal{F}(f)\|_q \leq C\|vf\|_p$ (см. [1]). Для четных весов u, v здесь можно использовать прямое и обратное преобразования Фурье и перекидывать их из одной части неравенства в другую для функций из классов $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Дадим более простое доказательство неравенства (1) и обобщим его на случай дробного градиента ∇^α , $\alpha > 0$, который определим как мультипликатор $\mathcal{F}(\nabla^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, где $\xi^\alpha = (\xi_1^\alpha, \dots, \xi_d^\alpha)$. При определении степенной функции комплексного переменного выбираем главное значение логарифма. Эта функция аналитическая почти всюду.

Ограничимся важным наглядным случаем степенных весов $u(x) = |x|^{-\gamma}$, $v(x) = |x|^\beta$. Пусть $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель.

Предложение 1. Пусть найдутся параметры $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq r \leq q < \infty$, $\delta = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$, $\gamma \in [(\delta)_+, \frac{d}{q}]$, $\bar{\delta} = d(\frac{1}{r} - \frac{1}{p'})$, $\bar{\gamma} = \delta + \alpha - \gamma \in [(\bar{\delta})_+, \frac{d}{r}]$, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{-\gamma} f\|_q \leq C \|e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{\bar{\gamma}-\delta} \nabla^\alpha f\|_p, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Отметим, что в этом предложении константа C не зависит от t . При $\alpha = 1$ получаем неравенство (1) с соответствующими параметрами. По аналогии с [2] в неравенстве (2) экспоненту $e^{-t\langle a, \cdot \rangle}$ можно заменить на $e^{-t\ell(\cdot)}$, где $\ell(x) = \langle a, x \rangle + b$ — произвольная линейная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством Питта $\| |\cdot|^{-\tilde{\gamma}} \mathcal{F}(f) \|_{\tilde{q}} \leq C \| |\cdot|^{\tilde{\delta}} f \|_{\tilde{p}}$, где $1 < \tilde{p} \leq \tilde{q} < \infty$, $\tilde{\delta} = d(\frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\tilde{p}})$, $\tilde{\gamma} \in [(\tilde{\delta})_+, \frac{d}{\tilde{q}}]$ [1].

Пусть функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, тогда ее преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)(\xi)$ — аналитическая функция в $\mathbb{C}^d$ и $\mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - ita)$. Аналогично

$$\mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} \nabla^\alpha f)(\xi) = (i(\xi - ita))^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi - ita).$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$\begin{aligned} |(i(\xi - ita))^\alpha| &= \left(\sum_{j=1}^d |\xi_j - ita_j|^{2\alpha} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^d (\xi_j^2 + t^2 a_j^2)^\alpha \right)^{1/2} \geq C \left(\sum_{j=1}^d (\xi_j^2 + t^2 a_j^2) \right)^{\alpha/2} \\ &= C \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 + t^2 \right)^{\alpha/2} \geq C \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 \right)^{\alpha/2} = C |\xi|^\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя эти факты и два раза неравенство Питта, получаем

$$\begin{aligned} \| |\cdot|^{-\gamma} e^{-t\langle a, \cdot \rangle} f \|_q &\leq C \| |\cdot|^{\gamma-\delta} \mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} f) \|_r = C \| |\cdot|^{\gamma-\delta} \mathcal{F}(f)(\xi - ita) \|_r \\ &= C \| |\xi|^{-\tilde{\gamma}} |\xi|^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi - ita) \|_r \leq C \| |\xi|^{-\tilde{\gamma}} (i(\xi - ita))^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi - ita) \|_r \\ &= C \| |\xi|^{-\tilde{\gamma}} \mathcal{F}(e^{-t\langle a, \cdot \rangle} \nabla^\alpha f)(\xi) \|_r \leq C \| e^{-t\langle a, \cdot \rangle} |\cdot|^{\tilde{\gamma}-\tilde{\delta}} \nabla^\alpha f \|_p. \end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

В качестве примера, следуя [2], дадим приложение неравенства Карлемана (2) для доказательства свойства единственности продолжения слабого решения дифференциального неравенства с потенциалом в весовом пространстве Соболева $W_0^{p,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^d)$. Оно вводится как замыкание в пространстве обобщенных функций класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ относительно нормы $\|f\|_{W_0^{p,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^d)} = \| |\cdot|^\beta f \|_p + \| |\cdot|^\beta \nabla^\alpha f \|_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть в условиях предложения 1 функция $f \in W_0^{p,\alpha,\tilde{\gamma}-\tilde{\delta}}(\mathbb{R}^d)$ является решением неравенства

$$|\nabla^\alpha f| \leq V|f|,$$

где потенциал $|\cdot|^{\alpha-d/s} V \in L^s(\text{supp } f)$, $s = (\frac{q}{p})'$. Тогда, если $\text{supp } f \subset \{x \in \mathbb{R}^d: \ell(x) \geq 0\}$, где $\ell(x) = \langle a, x \rangle + b$ — некоторая линейная функция, то $f \equiv 0$ всюду.

При $\alpha = 1$ это предложение доказано в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для краткости $u = |\cdot|^{-\gamma}$, $v = |\cdot|^{\tilde{\gamma}-\tilde{\delta}}$. Без ограничения общности можно считать, что $\ell(x) = x_d$, что отвечает $a = (0, \dots, 0, 1)$, $b = 0$. Тогда $f(x) = 0$ при $x_d \leq 0$ и достаточно показать, что $f \equiv 0$ в полосе $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d: 0 < x_d < \varepsilon\}$ для выбранного далее $\varepsilon > 0$. Для этого применим предложение 1 и неравенство Гёльдера. Полагая $S'_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d: x_d \geq \varepsilon\}$ получаем

$$\begin{aligned} \|e^{-tx_d} f u\|_{L^q(S_\varepsilon)} &\leq C \|e^{-tx_d} \nabla^\alpha f v\|_{L^p(S_\varepsilon)} + C \|e^{-tx_d} \nabla^\alpha f v\|_{L^p(S'_\varepsilon)} \\ &\leq C \|e^{-tx_d} V f v\|_{L^p(S_\varepsilon)} + C e^{-t\varepsilon} \|\nabla^\alpha f v\|_{L^p(S'_\varepsilon)} \\ &\leq C \|V v u^{-1}\|_{L^s(S_\varepsilon \cap \text{supp } f)} \|e^{-tx_d} f u\|_{L^q(S_\varepsilon)} + C_1 e^{-t\varepsilon}, \end{aligned}$$

где константа C_1 не зависит от t и в нее включен множитель $\|\nabla^\alpha f v\|_{L^p(S'_\varepsilon)} \leq \|\nabla^\alpha f v\|_p < \infty$.

Имеем $vu^{-1} = |x|^{\bar{\gamma}-\bar{\delta}+\gamma} = |x|^{\delta-\bar{\delta}+\alpha}$, где $\delta - \bar{\delta} = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{r'}) - d(\frac{1}{r} - \frac{1}{p'}) = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) = -\frac{d}{s}$. По условию $vu^{-1}V \in L^s(\text{supp } f)$, поэтому можно подобрать достаточно малое $\varepsilon > 0$, для которого будет $C\|Vvu^{-1}\|_{L^s(S_\varepsilon \cap \text{supp } f)} \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$\|e^{-tx_d}fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} \leq \frac{1}{2}\|e^{-tx_d}fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} + C_1e^{-t\varepsilon},$$

или $\frac{1}{2}\|e^{t(\varepsilon-x_d)}fu\|_{L^q(S_\varepsilon)} \leq C_1$. Если $f \not\equiv 0$ в полосе S_ε , то левая часть неравенства стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, так как в полосе $\varepsilon - x_d > 0$. Но это противоречит правой части, где константа не зависит от t . Отсюда $f \equiv 0$ в S_ε . Предложение 2 доказано.

В заключении скажем, что представляет интерес обобщить неравенство Карлемана на случай дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$, действующего как мультипликатор $\mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2})(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle^{\alpha/2} \mathcal{F}(f)(\xi)$. Здесь уже не работает оценка вида (3).

Также интересен случай пространства $L^p(\mathbb{R}^d)$ с мерой Данкля $d\mu_\kappa$, градиентом ∇_κ и лапласианом Данкля $\Delta_\kappa = \nabla_\kappa^2$. Здесь неравенство Харди–Рейлиха, отвечающее случаю $t = 0$, доказано в работе [4]:

$$\| |x|^{-\gamma} f(x) \|_{q, d\mu_\kappa} \leq C \| |x|^\beta (-\Delta_\kappa)^{\alpha/2} \|_{p, d\mu_\kappa}$$

Однако в случае $t > 0$ замена экспоненты $e^{-t\ell(x)}$ и доказательство аналога неравенства (2) оказываются непростой задачей и перенос предложенного здесь метода сталкивается со сложностями. Также в случае преобразования Данкля недостаточно изучено неравенство Питта (его частные случаи см. в [3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benedetto J.J., Heinig H.P. Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations // J. Fourier Anal. Appl. 2003. Vol. 9. P. 1–37.
2. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Weighted gradient inequalities and unique continuation problems // Calc. Var. Partial Dif. 2020. Vol. 59, no. 3. Article 89.
3. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 258. Article 105462.
4. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Anal. 2021. Vol. 55. P. 513–538.
5. Heinig H.P. Weighted Sobolev inequalities for gradients // Harmonic analysis and applications. Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser, Boston, MA, 2006. P. 17–23.

REFERENCES

1. Benedetto, J.J. & Heinig, H.P. 2003. “Weighted Fourier inequalities: New proofs and generalizations”, *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 9, pp. 1–37.
2. De Carli, L., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Weighted gradient inequalities and unique continuation problems”, *Calc. Var. Partial Dif.*, vol. 59, no. 3, article 89.
3. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2020. “Sharp approximation theorems and Fourier inequalities in the Dunkl setting”, *J. Approx. Theory*, vol. 258, article 105462.
4. Gorbachev, D.V., Ivanov, V.I. & Tikhonov, S.Yu. 2021. “Riesz potential and maximal function for Dunkl transform”, *Potential Anal.*, vol. 55, pp. 513–538.

5. Heinig, H.P. 2006. “Weighted Sobolev inequalities for gradients”, *Harmonic analysis and applications. Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Birkhäuser, Boston, MA, pp. 17–23.

Получено: 01.10.2022

Принято в печать: 8.12.2022