

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151

**Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника
дерева типа «змея»¹**

О. С. Щербаков

Щербаков Олег Сергеевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

Аннотация

В данной работе изучаются минимальные заполнения конечных метрических пространств (объект, возникший как обобщение понятий кратчайшего дерева и минимального заполнения в смысле Громова). Как известно, вес минимального заполнения данного типа может быть найден как решение задачи линейного программирования или с помощью так называемых мультиобходов. Связь между этими двумя подходами можно проследить, перейдя к двойственной задаче линейного программирования: рациональные точки выпуклого многогранника, который строится по типу заполнения, соответствуют мультиобходам. Данная работа посвящена изучению таких многогранников. Показано, что их вершины соответствуют неприводимым мультиобходам. Получена описание многогранника и явная формула веса для минимального параметрического заполнения бинарного дерева типа «змея».

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, минимальное заполнение, линейное программирование, двойственность, выпуклые многогранники.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

О. С. Щербаков. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея» // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 136–151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-136-151

**Polytops of Binary Trees, Structure of the Polytop
for the «Snake-type»-Tree**

O. S. Shcherbakov

Shcherbakov Oleg Sergeevich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

¹Исследование выполнено в рамках Научно образовательной школы МГУ «Математические методы анализа сложных систем».

Abstract

In the paper minimal fillings of finite metric spaces are investigated. This object appeared as a generalization of the concepts of a shortest tree and a minimal filling in the sense of Gromov. It is known that the weight of a minimal filling of a given type can be found by linear programming and by so-called multitours technique. A relation between these two approaches can be demonstrated using duality in linear programming, namely, rational points of the polytop constructed by the dual problem correspond to multitours. The paper is devoted to investigation of such polytopes. It is shown that the vertices of the polytop are in one-to-one correspondence with irreducible multitours. A description of the polytop and an explicit formula for the weight of the minimal filling of the «snake-type» binary tree is obtained.

Keywords: finite metric space, minimal filling, linear programming, duality, convex polytops.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

O. S. Shcherbakov 2022, “Polytopes of Binary Trees, Structure of the Polytop for the «Snake-type» Tree”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 136–151.

1. Введение

Широко известна классическая задача Штейнера о поиске сети минимальной длины, соединяющей заданный набор точек на плоскости [1]. Задача Штейнера и её обобщения имеют множество приложений: проектирование транспортных сетей, линий электропередач, беспроводных сетей и т.п. Разные обобщения получаются путём изменения формулировки классической задачи: набор точек рассматривается в каких-либо метрических пространствах, изучаются различные аналоги длины, вводятся некоторые ограничения на сети.

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства поставлена и подробно описана в [2] (краткое введение в [3] или [4]). Это — одно из обобщений, с одной стороны задачи Штейнера о кратчайшей сети, с другой — задачи Громова о минимальном заполнении гладкого риманова многообразия. Развитию сюжета задачи о минимальном заполнении посвящены работы [6], [8], [9], [10], [11], [12], [13]. Отметим, что теория минимальных заполнений позволяет получать новые оценки на отношение Штейнера [14], [15].

Задача состоит в поиске взвешенного дерева наименьшего веса, соединяющего данное метрическое пространство (т.е. точки метрического пространства вкладываются в множество вершин графа) так, что для любых двух точек метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве. В ходе решения задачи приходится иметь дело с т.н. задачей минимального параметрического заполнения (ЗМПЗ), в такой постановке фиксируется граф (тип заполнения) и минимизируется весовая функция на ребрах графа в сделанных выше предположениях.

Ещё в работе [2] отмечена связь ЗМПЗ с задачей линейного программирования, однако подробное исследование дано в статье [3]. В работе [4] получена формула веса минимального заполнения в терминах так называемых мультиобходов. Несмотря на то, что не дано точных рецептов по поиску этих мультиобходов, разработана техника работы с мультиобходами, введено понятие неприводимых мультиобходов. Так же показано, что неприводимых мультиобходов конечное число. Формула веса минимального параметрического заполнения использует только неприводимые мультиобходы.

В работе [3] поиск формулы веса минимального параметрического заполнения осуществляется в терминах задачи линейного программирования. Задача о поиске минимального параметрического заполнения рассматривается как классическая задача линейного программирования (КЗЛП), затем следует переход к двойственной задаче (ДЗ). Как известно, КЗЛП и ДЗ разрешимы или не разрешимы одновременно (в рассматриваемом случае разрешимы),

и минимум целевой функции на допустимом множестве в КЗЛП совпадает с максимумом целевой функции в ДЗ на допустимом множестве в ДЗ. В ДЗ допустимое множество строится по бинарному дереву — это многогранник $\mathbf{X}$, который не зависит от метрического пространства (в отличие от допустимого множества в классической задаче), а зависит только от типа заполнения, то есть от структуры графа. Вершины многогранника $\mathbf{X}$ соответствуют некоторым мультиобходам, а произвольному мультиобходу соответствует некоторая точка многогранника. Вес заполнения рассматривается как целевая функция в КЗЛП. Значение минимального веса совпадает с максимумом целевой функции ДЗ, который достигается на одной из вершин многогранника $\mathbf{X}$. Существует известный рецепт вычисления вершин многогранного множества в задачах линейного программирования (например подробно описан в [5]), но вычислительные трудности на современных ПК начинаются уже для 8 точечных метрических пространств.

В настоящей работе

- установлена биекция между множеством неприводимых мультиобходов и множеством вершин многогранника $\mathbf{X}$;
- доказано, что формула веса минимального параметрического заполнения полученная в работах [4] и [3] не может быть улучшена;
- в явном виде найдено строение всех мультиобходов, в том числе неприводимых, для бинарного дерева определённого типа (так называемая “змея”) с произвольным количеством вершин, и найдена формула веса минимального заполнения этого типа, имеющая вид минимума линейных функций от расстояний между точками исходного конечного метрического пространства.

2. Необходимые определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Бинарное дерево — связный ациклический простой конечный граф, у которого все вершины имеют степень 1 или 3.*

Далее $G = (V, E)$ — бинарное дерево, V — множество его вершин, E — множество рёбер.

Внутренние вершины — вершины степени 3.

Граничные вершины — вершины степени 1. Множество граничных вершин дерева G обозначим ∂G .

w

Пусть $|\partial G| = m$, тогда по индукции $|E| = 2m - 3$.

Рассмотрим конечное псевдометрическое пространство (M, ρ) , $|M| = m \geq 3$. Пусть $\partial G = M$, тогда будем говорить, что дерево G затыгивает M .

Пусть $\partial G = M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, обозначим e_k ребро инцидентное вершине v_k (оставшиеся $m - 3$ ребра занумеровываются в зависимости от типа бинарного дерева).

2.1. Мультиобходы бинарных деревьев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Мультициклический порядок кратности l на множестве M из m элементов — это отображение $\sigma : \mathbb{Z}_{lm} \rightarrow M$, такое, что*

1. $\forall n \in \mathbb{Z}_{lm} \quad \sigma(n+1) \neq \sigma(n)$

2. $\forall v \in M \quad |\sigma^{-1}(v)| = l.$

Будем говорить, что $\sigma(n+1)$ следует за $\sigma(n)$ в мультициклическом порядке σ . Отождествив точки M с их номерами, мультициклический порядок будем обозначать $(i_1 i_2 \dots i_{lm})$, где $i_{k+1} = \sigma(k)$, подобно обычным циклам в перестановках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Мультиперметр мультициклического порядка σ кратности l на псевдометрическом пространстве M — это число, определенное формулой:*

$$p(M, \sigma) = \frac{1}{2l} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{lm}} \rho(\sigma(n), \sigma(n+1))$$

Удаление любого ребра e_k бинарного дерева разбивает его на 2 компоненты связности, которые индуцируют дизъюнктное разбиение множества граничных вершин (и их номеров)

$$M = M_k^{(1)} \sqcup M_k^{(2)}$$

Путь от вершины v_i в v_j обозначим² $\vec{\Gamma}_{ij}$ заметим, что такой путь — единственный. Обозначим Γ_{ij} путь с точностью до направления. Путь, соединяющий граничные вершины, будем называть *граничным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Множество всех граничных путей мультициклического порядка обозначим Γ^σ : $\Gamma^\sigma := \{\Gamma_{\sigma(n)\sigma(n+1)} : n \in \mathbb{Z}_{lm}\}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Кратность направленного пути $\vec{\Gamma}_{ij}$ в мультициклическом порядке σ — это целое неотрицательное число $\vec{\omega}_{ij} := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{lm}} \text{Indicator}\{(\sigma(n) = i) \wedge (\sigma(n+1) = j)\}$.*

Кратность пути Γ_{ij} , соответственно $\omega_{ij} := \vec{\omega}_{ij} + \vec{\omega}_{ji}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Мультиобход бинарного дерева G кратности l с множеством граничных вершин $M = \partial G$ — это мультициклический порядок σ на M , такой, что для всякого ребра e_k существует ровно l граничных путей в мультиобходе из $M_k^{(1)}$ в $M_k^{(2)}$ и столько же обратно.*

Множество всех мультиобходов и множество l -обходов дерева G обозначим $\mathcal{T}(G)$ и $\mathcal{T}_l(G)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Мультиграф мультиобхода. Для мультиобхода $\sigma \in \mathcal{T}(G)$ определим вспомогательный граф с кратными ребрами (мультиграф) без петель G^σ , множество вершин G^σ совпадает с M . Кратность ребра, соединяющего произвольные вершины, $v_i v_j$ определим равной ω_{ij} , т.е. множество ребер графа G^σ совпадает с множеством Γ^σ граничных путей.*

В [4] (Предложение 2.5) доказан полезный технический результат:

ЛЕММА 1. *Пусть w произвольная внутренняя (степени 3) вершина графа G , и $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, тогда через каждую пару инцидентных вершине w рёбер проходит ровно l граничных путей из Γ^σ .*

2.2. Линейная алгебра мультиобходов

Данный раздел — краткое изложение необходимых понятий, введенных в §3 работы [4] и работе [3].

Рассмотрим векторное пространство $V = V(M)$, базисные векторы которого $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ соответствуют множеству M . Введем пространство $U = \text{Sym}^2 V / \{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i, 1 \leq i \leq m\}$. В пространстве U определим базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{(m-1)m}\}$, базисные векторы $\mathbf{v}_{ij}$ соответствуют

²Обозначение $\vec{}$ подчёркивает направление от i к j

неупорядоченным парам различных вершин M . Заметим, что $\dim U = \binom{m}{2}$. Далее считаем базис $\mathfrak{B}$ фиксированным. Превратим пространство U в евклидово, определив стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в базисе $\mathfrak{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Вектор w^σ мультиобхода σ . По мультиобходу $\sigma \in \mathcal{T}(G)$ построим вектор $w^\sigma \in U$, координаты вектора в базисе $\mathfrak{B}$ определяем равными кратностям ребер графа G^σ :

$$w^\sigma = (\omega_{12}, \dots, \omega_{ij}, \dots, \omega_{(m-1)m})^T$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Мультиобходы σ и τ называют эквивалентными, если их векторы совпадают: $w^\sigma = w^\tau$. В терминах вспомогательных графов $\sigma \sim \tau$, если $G^\sigma = G^\tau$.

Результат факторизации множеств $\mathcal{T}(G)$ и $\mathcal{T}_l(G)$ будем обозначать $\tilde{\mathcal{T}}(G)$ и $\tilde{\mathcal{T}}_l(G)$ соответственно.

Определим векторное пространство $W = \mathbb{R}^{|E|}$ и зафиксируем в нём базис $\mathfrak{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{2m-3}\}$, соответствующий рёбрам графа G . Определим линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow W$ на базисных векторах:

$$\mathcal{A}\mathbf{v}_{ij} = \sum_{k=1}^{2m-3} \text{Indicator}\{e_k \in \Gamma_{ij}\} \mathbf{e}_k$$

Матрица A линейного оператора $\mathcal{A}$ в указанных базисах представляет собой матрицу разрезов полного графа $K(M)$, построенную по бинарному дереву G . Подробнее, удаление любого ребра из бинарного дерева разбивает его на 2 компоненты связности и соответственно разбивает на 2 части множество граничных вершин M , семейство рёбер с концами в разных частях образуют т.н. разрез графа $K(M)$, соответствующий этому разбиению. Столбцы матрицы индексированы парами $ij : 1 \leq i < j \leq m$ и соответствуют неупорядоченным парам различных вершин M , то есть ребрам графа $K(M)$. Строки матрицы A соответствуют рёбрам дерева G . Элемент a_k^{ij} матрицы A из k строки и ij столбца определён следующим образом:

$$a_k^{ij} = \begin{cases} 1 & e_k \in \Gamma_{ij} \\ 0 & e_k \notin \Gamma_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

В [3] (Лемма 2.2) доказано, что:

ЛЕММА 2. Матрица A максимального ранга, $\text{rang } A = 2m - 3$.

Определяем вектор $\mathbb{I} = (1, 1, \dots, 1)^T \in W$.

Следующий результат доказан в статьях [4] (теорема 3.3) и [3] (лемма 2.5)

ТЕОРЕМА 1. Пусть w^σ вектор l -обхода $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, тогда $\mathcal{A}w^\sigma = 2l\mathbb{I}$.

Для любого вектора $u \in U$, координаты которого целые неотрицательные числа, такого, что $\mathcal{A}u = 2l\mathbb{I}$, $l \in \mathbb{N}$, существует l -обход $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, такой, что $w^\sigma = u$.

2.3. Аддитивная полугруппа мультиобходов

Используя теорему 1, в [4] определяется сумма $\sigma_1 + \sigma_2$ мультиобходов σ_1 и σ_2 и произведение $n\sigma$ мультиобхода σ на натуральное число n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Сумма. По σ_1 и σ_2 строятся векторы мультиобходов w^{σ_1} и w^{σ_2} , по теореме 1 строится мультиобход τ , такой, что $w^\tau = w^{\sigma_1} + w^{\sigma_2}$, далее $\sigma_1 + \sigma_2 := \tau$.

Согласно замечанию 3.12 в [4], кратность мультиобхода τ равна сумме кратностей мультиобходов σ_1 и σ_2 .

Ввиду очевидного равенства $w^{\sigma_1+\sigma_2} = w^{\sigma_1} + w^{\sigma_2}$, сразу будем рассматривать операцию сложения на фактормножестве $\tilde{\mathcal{T}}$:

$$+ : \tilde{\mathcal{T}}_{l_1}(G) \times \tilde{\mathcal{T}}_{l_2}(G) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_{l_1+l_2}(G)$$

В силу ассоциативности и коммутативности сложения векторов получаем, что $(\tilde{\mathcal{T}}, +)$ — аддитивная полугруппа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Умножение на натуральное число. По теореме 1 строится мультиобход τ , такой, что $w^\tau = n \cdot w^\sigma$, $n \cdot \sigma := \tau$.

Согласно замечанию 3.17 в [4], кратность мультиобхода τ в n раз больше кратности мультиобхода σ . Для векторов мультиобходов выполнено: $w^{n\sigma} = nw^\sigma$. Заметим, что $n\sigma \sim \underbrace{\sigma + \sigma + \dots + \sigma}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Мультиобход σ называют неприводимым, если справедлива импликация

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\sigma \sim \sigma_1 + \sigma_2 \implies \exists k \quad \sigma_1 \sim k\sigma, \sigma_2 \sim (n-k)\sigma$$

и приводимым в противном случае.

Множество классов эквивалентности неприводимых мультиобходов обозначим $\tilde{\mathcal{T}}'(G)$

2.4. Многогранники бинарных деревьев

В статье [3] показано, что с матрицей разрезов A бинарного дерева G можно связать выпуклый многогранник $\mathbf{X} = \mathbf{X}(G) := \{x = (x_{12}, \dots, x_{(m-1)m})^T \in U : Ax = \mathbb{I}, x_{ij} \geq 0\}$.

Далее $U_{\geq 0} := \{x \in U : x \geq 0\}$. Пусть x_0, x — произвольные точки многогранника, тогда $A(x - x_0) = 0$, получаем:

$$\mathbf{X} = \{x_0 + \ker A\} \cap U_{\geq 0} \quad (2)$$

ЛЕММА 3. Размерность многогранника $\mathbf{X}$ равна $\binom{m-2}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из представления (2) следует, что $\dim \mathbf{X} = \dim \ker A$. Используя лемму 2 найдем $\dim \ker A = \dim U - \dim \operatorname{im} A = \frac{1}{2}(m^2 - 5m + 6)$ $\square$

Число строк матрицы A равно количеству рёбер бинарного дерева G . Строки матрицы можно рассматривать как функционалы (ковекторы), их будем обозначать как ребра $e_k \in U^*$.

Стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задает изоморфизм³ $U^* \cong U$, ввиду этого будем отождествлять ковекторы с соответствующими им векторами, и действие ковектора e на векторе x будем обозначать $\langle e, x \rangle$. В U^* фиксируем базис, двойственный базису $\mathfrak{B}$. В таких обозначениях условие $Ax = \mathbb{I}$ переписывается в виде системы из $2m - 3$ уравнений:

$$\langle e_k, x \rangle = 1 \quad k = 1, \dots, 2m - 3 \quad (3)$$

Векторы e_k при $1 \leq k \leq m$ соответствуют ребрам, инцидентным граничным вершинам v_k дерева G . Координаты вектора $e_k = (a_k^{12}, \dots, a_k^{(m-1)m})$ определены равенством (1). Из произвольной граничной вершины $v_k \in V$ через ребро e_k проходят все пути Γ_{kj} ($j \neq k$) и не проходит ни один из путей Γ_{ij} где $i \neq k$ и $j \neq k$ одновременно, получаем, что

$$a_k^{ij} = \begin{cases} 1 & i = k \text{ или } j = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq m$$

³ $\mathcal{K} : U^* \rightarrow U$
 $\mathcal{K} : e \mapsto y$ здесь вектор y определен условием $\forall x \in U \quad e(x) = \langle y, x \rangle$

Что удобно записать в виде:

$$a_k^{ij} = \delta_k^i + \delta_k^j \quad (4)$$

Каждый вектор e_k задает ортогональную ему аффинную гиперплоскость H_k :

$$H_k := \{x \in U \quad : \quad \langle e_k, x \rangle = 1\}$$

Пусть $\Pi := \bigcap_{k=1}^{2m-3} H_k$, ясно, что $\Pi = x_0 + \ker \mathcal{A}$. В таких обозначениях получаем $\mathbf{X} = \Pi \cap U_{\geq 0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Усы бинарного дерева — это пара его граничных вершин, имеющих общую смежную вершину. Также усами называется соответствующая пара соседних ребер, инцидентных этим граничным вершинам.*

Про координаты многогранника $\mathbf{X}$ соответствующие усам получим следующие утверждение:

ЛЕММА 4. *Пусть граничные вершины v_i и v_j образуют усы, тогда $x_{ij} = \frac{1}{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности занумеруем вершины усов $v_i = v_1$ и $v_j = v_2$ и рассмотрим рёбра e_1 e_2 инцидентные вершинам v_1, v_2 и e_k третье смежное ребро, тогда

$$\begin{aligned} e_1 &= (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-2}, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{m-1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-2}, 0, 0, \dots, 0) \\ e_k &= (\underbrace{0, 1, \dots, 1}_{m-1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-2}, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Из системы уравнений (3) имеем $\langle e_1 + e_2 - e_k, x \rangle = 1$,

$$\langle (2, 0, 0, \dots, 0), (x_{12}, \dots, x_{(m-1)m})^T \rangle = 1$$

откуда следует утверждение. $\square$

Существует критерий [5] того, что точка многогранника является вершиной (угловой точкой):

ТЕОРЕМА 2. *Пусть дано множество (необязательно многогранник) $\mathbf{Y} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad Ax = b, x \geq 0\}$, где $\mathbb{R}^n$ — стандартное n -мерное евклидово пространство, A — матрица $m \times n$ ранга r , $A \neq 0$, b — вектор из $\mathbb{R}^m$. Обозначим столбцы матрицы $A_1, A_2, \dots, A_n$, условие $Ax = b$ переписывается в виде*

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = b$$

Для того, чтобы точка x была угловой, необходимо и достаточно, чтобы нашлись линейно-независимые столбцы $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$, такие что:

$$A_{j_1} x_{j_1} + A_{j_2} x_{j_2} + \dots + A_{j_r} x_{j_r} = b$$

причём $x_{j_k} \geq 0$, а все остальные $x_i = 0$.

Для рассматриваемого многогранника $\mathbf{X}$ коэффициенты матрицы A равны 0 и 1, в частности лежат в поле $\mathbb{Q}$, откуда получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Все вершины многогранника $\mathbf{X}$ имеют рациональные неотрицательные координаты.*

2.5. Мультиобходы и многогранники

Следующее утверждение сразу вытекает из теоремы 1:

СЛЕДСТВИЕ 2. Если дан l -обход $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$, то $\frac{1}{2l}w^\sigma \in \mathbf{X}$.

Точки многогранника $\mathbf{X}$, имеющие рациональные координаты в базисе $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathbf{X}_{\mathbb{Q}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Точка мультиобхода. По l -обходу $\sigma \in \mathcal{T}_l(G)$ определяем точку многогранника $x^\sigma := \frac{1}{2l}w^\sigma \in \mathbf{X}$. Вектор w^σ имеет рациональные координаты, таким образом определено отображение:

$$\chi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{X}_{\mathbb{Q}} \quad \chi : \sigma \mapsto x^\sigma$$

И, соответственно, определено отображение:

$$\tilde{\chi} : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbf{X}_{\mathbb{Q}} \quad \tilde{\chi} : \tilde{\sigma} \mapsto x^\sigma$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Из определений получаем формулы:

$$x^{n\sigma} = x^\sigma$$

$$\sigma_1 \in \mathcal{T}_{l_1}(G), \sigma_2 \in \mathcal{T}_{l_2}(G) \implies x^{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{l_1}{l_1 + l_2}x^{\sigma_1} + \frac{l_2}{l_1 + l_2}x^{\sigma_2}$$

Точка $x^{\sigma_1 + \sigma_2}$ делит отрезок $[x^{\sigma_1}; x^{\sigma_2}]$ в отношении $l_1 : l_2$.

Аналогично:

$$x^{\sigma_1 + \dots + \sigma_p} = \frac{l_1}{l_1 + \dots + l_p}x_1^\sigma + \dots + \frac{l_p}{l_1 + \dots + l_p}x_p^\sigma$$

Точка $x^{\sigma_1 + \dots + \sigma_p}$ является выпуклой комбинацией (строго внутренней) точек $x_1^\sigma, \dots, x_p^\sigma$, в частности, если точки $x_1^\sigma, \dots, x_p^\sigma$ аффинно независимы, то кратности $l_1, \dots, l_p$ мультиобходов $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ являются барицентрическими координатами точки $x^{\sigma_1 + \dots + \sigma_p}$.

Объединяя предыдущее:

$$x^{n_1\sigma_1 + \dots + n_p\sigma_p} = \frac{n_1 l_1}{n_1 l_1 + \dots + n_p l_p}x_1^\sigma + \dots + \frac{n_p l_p}{n_1 l_1 + \dots + n_p l_p}x_p^\sigma \quad (5)$$

В статье [4] доказана (теорема 3.27):

ТЕОРЕМА 3. Пусть G — бинарное дерево, $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — все его неприводимые мультиобходы крайностей $l_1, \dots, l_s$ соответственно. Тогда для любого решения x уравнения $Ax = \mathbb{I}$, такого, что все $x_{ij} \geq 0$ найдутся неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, в сумме дающие 1, такие, что

$$x = \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k}{2l_k} w^{\sigma_k}$$

ЛЕММА 5. Любая точка многогранника $\mathbf{X}$ с рациональными координатами — точка мультиобхода, иными словами отображения χ и $\tilde{\chi}$ сюръективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x точка многогранника $\mathbf{X}$ с рациональными координатами, l — наибольший общий делитель знаменателей, тогда $u = 2lx$ — целочисленный вектор и $Au = 2\mathbb{I}$, согласно теореме 1 существует l -обход σ такой, что $w^\sigma = u$. Получаем $x = \frac{1}{2l}w^\sigma = x^\sigma$. $\square$

3. Неприводимые мультиобходы и вершины многогранника

Оказывается, что вершины многогранника $\text{Vert}(\mathbf{X}(G))$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности неприводимых мультиобходов $\tilde{\mathcal{T}}'(G)$:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — все неприводимые мультиобходы (попарно неэквивалентные) и $x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_s}$ соответствующие им точки многогранника $\mathbf{X}$, тогда $x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_s}$ — множество всех вершин многогранника $\mathbf{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\tilde{\mathcal{N}}$ — множество классов мультиобходов, кратных неприводимым, т.е. мультиобходов вида $n\sigma_i$, $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma_i \in \tilde{\mathcal{T}}'$. Оставшиеся классы приводимых мультиобходов обозначим как $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{T}} \setminus \tilde{\mathcal{N}}$. Через $\mathcal{N}$ и $\mathcal{S}$ обозначаем множества мультиобходов, соответствующие классам $\tilde{\mathcal{N}}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$.

Множество вершин многогранника обозначим $\mathcal{V} = \text{Vert}(\mathbf{X})$, а множество остальных рациональных точек многогранника обозначим $\mathcal{W} = \mathbf{X}_{\mathbb{Q}} \setminus \mathcal{V}$.

Пусть $\{x_1, \dots, x_p\} = \mathcal{V}$ и $x \in \mathcal{W}$ и пусть σ — произвольный мультиобход, такой что $x = x^{\sigma}$, такой мультиобход существует, поскольку отображение χ сюръективно (лемма 5). Покажем, что σ приводим.

По следствию 2 вершины имеют рациональные координаты, следовательно:

1. существуют мультиобходы $\tau_1, \dots, \tau_p$, такие, что $x_1 = x^{\tau_1}, \dots, x_p = x^{\tau_p}$;
2. для точки с рациональными координатами можно выбрать коэффициенты выпуклой комбинации рациональными:

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

Поскольку точка x отлична от вершин, то выпуклая комбинация нетривиальна. Оставим только $\alpha_i > 0$, и без ограничения общности, выбирая соответствующую нумерацию вершин, считем $\alpha_1, \dots, \alpha_q > 0$:

$$x^{\sigma} = \alpha_1 x^{\tau_1} + \dots + \alpha_q x^{\tau_q} \quad 2 \leq q \leq p, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}_{> 0}$$

Пусть кратности мультиобходов $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_q$ равны соответственно $k, k_1, \dots, k_q$, тогда предыдущее равенство записывается в виде:

$$\frac{1}{2k} w^{\sigma} = \frac{\alpha_1}{2k_1} w^{\tau_1} + \dots + \frac{\alpha_q}{2k_q} w^{\tau_q}$$

Поскольку $\alpha_i \in \mathbb{Q}_{> 0}$, то $\alpha_i = \frac{b_i}{c_i}$ где b_i и c_i натуральны и взаимнопросты. Домножим рассматриваемое равенство на число $2kk_1 \dots k_q c_1 \dots c_q$, получим:

$$nw^{\sigma} = n_1 w^{\tau_1} + \dots + n_q w^{\tau_q} \quad n, n_1, \dots, n_q \in \mathbb{N}$$

Последнее равенство означает что мультиобход $\sigma \notin \mathcal{N}$, значит $\sigma \in \mathcal{S}$, то есть $\chi^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{S}$, что означает $\tilde{\chi}^{-1}(\mathcal{W}) \subset \tilde{\mathcal{S}}$.

Пусть l -обход σ не кратен неприводимому мультиобходу, т.е. $\sigma \in \mathcal{S}$, тогда

$$n\sigma \sim n_1 \sigma_{i_1} + \dots + n_q \sigma_{i_q} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq s \quad n, n_k \in \mathbb{N} \quad q \geq 2$$

Без ограничения общности выберем нумерацию мультиобходов так, что $i_1 = 1, \dots, i_q = q$. Пусть $l_1, \dots, l_q$ — кратности соответствующих мультиобходов.

Используя формулу (5) из следствия 3, получаем:

$$x^\sigma = \frac{n_1 l_1}{n_1 l_1 + \dots + n_q l_q} x^{\sigma_1} + \dots + \frac{n_q l_q}{n_1 l_1 + \dots + n_q l_q} x^{\sigma_q}$$

Что переписывается в виде:

$$x^\sigma = \alpha_1 x^{\sigma_1} + \dots + \alpha_q x^{\sigma_q} \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0$$

Точка x^σ представлена нетривиальной выпуклой комбинацией точек $x^{\sigma_1} \dots x^{\sigma_q}$ значит x^σ — не вершина.

Получили, что $\chi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{W}$, значит $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{S}}) \subset \mathcal{W}$. Из доказанных включений $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{S}}) = \mathcal{W}$, учитывая сюръективность $\tilde{\chi}$ получаем $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{N}}) = \mathcal{V}$.

Если σ кратен неприводимому мультиобходу σ_i , тогда согласно следствию 3 получаем $x^\sigma = x^{n\sigma_i} = x^{\sigma_i}$, следовательно $\tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{N}}) = \tilde{\chi}(\tilde{\mathcal{T}}')$. Осталось заметить, что если $\tilde{\sigma}_i \neq \tilde{\sigma}_j$, то $x^{\sigma_i} \neq x^{\sigma_j}$, то есть ограничение отображения $\tilde{\chi}$ на $\tilde{\mathcal{T}}'$ сюръективно, следовательно $\tilde{\chi} : \tilde{\mathcal{T}}' \rightarrow \mathcal{V}$ — биекция.

□

Количество вершин многогранника $\mathbf{X}$, используя теорему 2, может быть оценено сверху числом $C_{C_m^2}^{2m-3}$, получаем:

СЛЕДСТВИЕ 4. Множество неприводимых мультиобходов $\mathcal{T}(G)$ конечно. $|\tilde{\mathcal{T}}'| \leq C_{C_m^2}^{2m-3}$.

Результат совпадает со следствием 3.25 из [4].

4. О формуле веса минимального параметрического заполнения

Рассмотрим линейный функционал $\rho_M \in U^*$, построенный по псевдометрическому пространству M :

$$\rho_M(x) := \sum_{i < j} \rho_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

Согласно замечанию 3.2 из [4] или леммы 2.5 из [3] значение функционала ρ_M на точке многогранника x^σ равна его мультипериметру:

$$p(M, \sigma) = \rho_M(x^\sigma)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Обратно, по функционалу $\rho = (\rho_{12}, \dots, \rho_{(m-1)m}) \in U^*$ координаты которого неотрицательны и удовлетворяют неравенству треугольника можно построить псевдометрическое пространство, если к тому же все его координаты положительны, то пространство будет метрическим.*

Формула веса минимального параметрического заполнения псевдометрического пространства M получена в работе [4] в терминах мультиобходов. Обозначив вес минимального параметрического заполнения типа G пространства M через $\text{mpf}(M, G)$, запишем его формулу:

$$\text{mpf}(M, G) = \max_{\sigma \in \tilde{\mathcal{T}}'(G)} p(M, \sigma)$$

Естественно возникает вопрос: на любом ли неприводимом мультиобходе может достигаться максимум? Можно ли из формулы удалить какие-либо мультиобходы? Как показывает следующая теорема — нельзя.

ТЕОРЕМА 5. Для любого неприводимого мультиобхода σ существует метрическое пространство M , такое, что для любого τ , такого, что $\tau \not\sim \sigma \quad \forall n$ выполнено строгое неравенство $p(M, \sigma) > p(M, \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4 x^σ – вершина многогранника $\mathbf{X}$. Далее $\tau \not\sim \sigma \implies x^\tau \neq x^\sigma$.

Рассмотрим аффинную оболочку многогранника $\Pi = \text{Aff}(X)$, ясно, что $\Pi \parallel \ker \mathcal{A}$. Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n$ – все гиперграницы (границы коразмерности 1 в Π) многогранника примыкающие к вершине x^σ . Для каждой гиперграницы F_i определен ортогональный ей вектор $f_i \in \ker \mathcal{A}$ такой, что $x^\sigma + \alpha f_i \notin \mathbf{X}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ (Неформально говоря, вектор направлен вне многогранника).

Рассмотрим строго внутренний единичный⁴ вектор конуса $f \in \text{Cone}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, то есть $f := \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ и $\alpha_i > 0$. Аффинная гиперплоскость $x^\sigma + f^\perp$ проходит только через вершину многогранника x^σ .

Найдем $\eta = (\eta_{12}, \dots, \eta_{(m-1)m}) := e_1 + \dots + e_m$. Поскольку все $e_i \perp \Pi$, то $\eta \perp \Pi$. Вычислим произвольную координату η_{ij} :

$$\eta_{ij} = \sum_{k=1}^m a_k^{ij} = \sum_{k=1}^m (\delta_k^i + \delta_k^j) = 2$$

Получаем $\eta = 2\mathbb{J}$, где $\mathbb{J} := (1, 1, \dots, 1) \in U^*$, следовательно $\mathbb{J} \perp \Pi$.

Рассмотрим функционал $\xi = (\xi_{12}, \dots, \xi_{(m-1)m}) := \mathbb{J} + \varepsilon f$. Заметим, что $f \in \ker \mathcal{A}$, откуда $\mathbb{J} \perp f$. Покажем, что аффинная гиперплоскость $x^\sigma + \xi^\perp$ проходит только через вершину многогранника x^σ . Предположим противное, тогда найдется ненулевой вектор $v \in \xi^\perp$, такой, что $x^\sigma + v = x_0 \in \mathbf{X}$. Получаем, что:

$$0 = \langle \xi, v \rangle = \langle \mathbb{J} + \varepsilon f, v \rangle = \underbrace{\langle \mathbb{J}, v \rangle}_0 + \langle \varepsilon f, v \rangle \implies v \in f^\perp$$

Откуда $x^\sigma + v = x_0 \in x^\sigma + f^\perp$, но $x^\sigma + f^\perp \cap \mathbf{X} = x^\sigma$ – противоречие.

Поскольку f – единичный вектор, то $f_{ij} \leq 1$. заметим, что при $\varepsilon < \frac{1}{3}$ для любых координат вектора ξ выполнено строгое неравенство: $\xi_{ik} < \xi_{ij} + \xi_{jk}$ и все координаты строго положительны. Согласно замечанию после формулы (6) построим искомое метрическое пространство.

□

Заметим, что функционалу $\mathbb{J}$ соответствует метрическое пространство (M, ρ) с дискретной метрикой $\rho_{ij} = 1 - \delta_{ij}$.

5. Теорема о строении многогранника для дерева “змеи”

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Змея – бинарное дерево ровно с двумя усами.

Обозначим внутренние вершины змеи $w_1, w_2, \dots, w_{m-2}$. Вершина w_1 инцидентна первой паре усов (v_1, v_2) , вершина w_{m-2} инцидентна второй паре усов (v_{m-1}, v_m) .

ТЕОРЕМА 6. Все неприводимые мультиобходы змеи (с точностью до выбора направления) исчерпываются 1-обходами вида:

$$(12i_1i_2 \dots i_p(m-1) m j_q j_{q-1} \dots j_1) \quad \text{или} \quad (12i_1i_2 \dots i_p m(m-1) j_q j_{q-1} \dots j_1) \quad (7)$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, $j_1 < j_2 < \dots < j_q$ и $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\} = \{3, 4, \dots, m-2\}$, $p + q = m - 4$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

⁴Относительно стандартной нормы в U

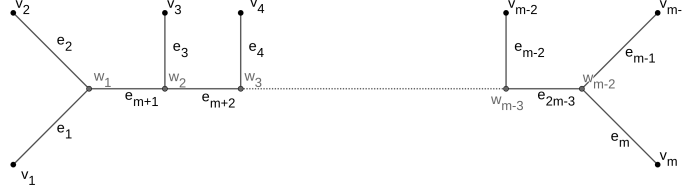


Рис. 1: Обязательно нужна подпись к рисунку

Иными словами, множество $\{3, 4, \dots, (m-2)\}$ разбивается на два (возможно пустых) подмножества $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ и $J = \{j_1, \dots, j_q\}$ и каждому такому разбиению соответствуют обходы $(12I(m-1)mJ)$ и $(12Im(m-1)J)$.

Доказательство теоремы разобьём на две леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\Gamma_{ij} \in \Gamma^\sigma$, то $\sigma = (\dots ij \dots)$ или $\sigma = (\dots ji \dots)$.

Конструктивно восстановим 1-обход, по последовательности граничных путей, каждая вершина v_j имеет степень 2 в графе обхода G^σ , следовательно существуют ровно две различные вершины v_i и v_k , отличные от v_j , такие что $\Gamma_{ij}, \Gamma_{jk} \in \sigma$, и нет других путей в v_j .

$\Gamma_{ij}, \Gamma_{jk} \in \sigma \implies \sigma = (\dots ijk \dots)$ или $\sigma = (\dots kji \dots)$.

Обход будем восстанавливать последовательно, присоединяя по одной вершине, первый и последний известный номер вершины в цикле и саму вершину будем называть *крайними* восстанавливаемой части. Например, в предыдущем случае номера i и k крайние.

ЛЕММА 6. С точностью до выбора направления 1-обходы змеи имеют вид (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный 1-обход σ .

Из леммы 4 $x_{12} = \frac{1}{2}$, то есть путь $\Gamma_{12} \in \Gamma^\sigma$ и $\omega_{12} = 1$.

$\Gamma_{12} \in \Gamma^\sigma$, значит $\sigma = (12 \dots)$ или $\sigma = (21 \dots)$, выберем первый случай, т.к. второй получается из него изменением направления обхода.

Рассмотрим разбиение $M_{m+1}^{(1)} \sqcup M_{m+1}^{(2)}$ соответствующие ребру e_{m+1} , где выберем $M_{m+1}^{(1)} = \{v_1, v_2\}$.

Согласно лемме 1 ровно 1 путь из путей Γ^σ проходит через пару рёбер (e_3, e_{m+1}) инцидентных вершине w_2 , следовательно существует ровно один путь из v_3 в $M_{m+1}^{(1)}$, это или Γ_{13} или Γ_{23} .

Получаем альтернативу, возможен один из двух вариантов:

$$\sigma = (12 \dots 3) \quad \text{или} \quad \sigma = (123 \dots) \quad (1)$$

Рассмотрим разбиение порожденное удалением ребра e_{m+k} : $M = M_{m+k}^{(1)} \sqcup M_{m+k}^{(2)}$, где $M_{m+k}^{(1)} = \{v_1, v_2 \dots v_{k+1}\}$. Применяя лемму 1 получаем, что существует ровно один путь из v_{k+2} в $M_{m+k}^{(1)}$. Очевидно, что он ведёт в один из концов восстанавливаемой части.

Так, на следующем шаге, из v_4 существует 1 путь в $M_{m+2}^{(1)}$, учитывая (1), получаем 4 возможных варианта:

- $\sigma = (124 \dots 3)$;
- $\sigma = (12 \dots 43)$;
- $\sigma = (1234 \dots)$;
- $\sigma = (123 \dots 4)$.

Рассматривая далее $v_5, v_6 \dots v_{m-2}$ – вершины, не принадлежащие усам, число возможных обходов каждый раз удваивается.

Построение завершается рассмотрением пары (v_{m-1}, v_m) и ребра e_{2m-3} , поскольку в силу леммы 4 $x_{(m-1)m} = \frac{1}{2}$, то есть $\Gamma_{(m-1)m} \in \sigma$, возможны 2 варианта или пара $(m-1, m)$ или пара $(m, m-1)$ замыкает обход. $\square$

Заметим, что каждая вершина змеи от v_3 до v_{m-2} могла добавляться к восстанавливаемому обходу двумя способами, а так же в обходе был выбор части $(m-1, m)$ или $(m, m-1)$, получаем количество обходов.

СЛЕДСТВИЕ 5. Обходов (1-обходов) змеи с m граничными вершинами 2^{m-3} .

ЛЕММА 7. У змеи нет неприводимых мультиобходов кратности $l \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим произвольный мультиобход σ кратности $l \geq 2$, докажем что он имеет эквивалентный обход τ , представимый в виде суммы 1-обходов. Для этого изучим вспомогательный граф G^σ .

Из леммы 4 получаем $x_{12} = \frac{1}{2}$, следовательно вершины v_1, v_2 соединены ребром кратности l : $\omega_{12} = l$.

Начнем строить мультиобход τ с $\Gamma_{12} \in \Gamma^\sigma$, пара (12) должна встречается l раз в σ :

$$\tau = (\underbrace{\dots 12 \dots \dots 12 \dots}_{l} \dots \dots \dots \dots 12 \dots)$$

Рассмотрим разбиение $M_{m+1}^{(1)} \sqcup M_{m+1}^{(2)}$ соответствующие ребру e_{m+1} , где выберем $M_{m+1}^{(1)} = \{v_1, v_2\}$.

Согласно лемме 1 ровно l путей в σ проходит через пару рёбер (e_3, e_{m+1}) инцидентных вершине w_2 , следовательно существует ровно l путей из v_3 в $M_{m+1}^{(1)}$, это пути вида Γ_{13} кратности ω_{13} или Γ_{23} кратности ω_{23} .

В качестве обхода возьмем:

$$\tau = (\underbrace{\dots 123 \dots 123 \dots}_{\omega_{23}} \dots \dots \dots \dots 123 \dots \dots \underbrace{\dots 312 \dots 312 \dots}_{\omega_{13}} \dots \dots \dots \dots 312 \dots)$$

Рассмотрим разбиение порожденное удалением ребра e_{m+k} : $M = M_{m+k}^{(1)} \sqcup M_{m+k}^{(2)}$ ($M_{m+k}^{(1)} = \{v_1, v_2 \dots v_{k+1}\}$). Применяя лемму 1 получаем, что в τ существует l путей из v_{k+2} в $M_{m+k}^{(1)}$.

Продолжаем процедуру восстановления, добавляя к каждой известной части мультиобхода τ по вершине, слева или справа, в зависимости от соответствующего количества путей в σ .

Построение завершается рассмотрением ребра e_{2m-3} и пары (v_{m-1}, v_m) .

Вновь применяя лемму 4 получим $x_{(m-1)m} = \frac{1}{2}$, следовательно вершины v_{m-1}, v_m соединены ребром кратности $\omega_{(m-1)m} = l$ в G^σ . Получаем, что $\Gamma_{(m-1)m}$ входит в мультиобход σ ровно l раз. К каждой известной части вида $(j_q \dots j_2 j_1 12 i_1 i_2 \dots i_p)$ добавляется соответствующая пара $(m-1, m)$ или $(m, m-1)$ слева или справа.

Осталось заметить, что построенный обход τ есть сумма обходов из леммы 6.

$\square$

СЛЕДСТВИЕ 6. Многогранник змеи с t граничными вершинами имеет ровно 2^{t-3} вершин.

Пример. Обходу $\sigma = (123 \dots t)$ соответствует вершина

$$x = \frac{1}{2}(\underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_{m-1}, \underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_{m-2}, \dots, \underbrace{1, 0, 0}_{m-2}, \underbrace{1, 0}_{m-1}, \underbrace{1}_{m-1})$$

Данной вершине соответствует мультипериметр мультиобхода

$$P(M, \sigma) = \rho_{12} + \rho_{23} + \dots + \rho_{(m-1)m} + \rho_{1m}$$

Для произвольного построенного обхода из теоремы 5 имеем:

$$P((12i_1i_2 \dots j_1)) = \rho_{12} + \rho_{2i_1} + \dots + \rho_{j_11}$$

Из теоремы 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. Формула веса минимального параметрического заполнения для графа типа змея:

$$\frac{1}{2} \max_{I \sqcup J} \{ \rho_{12} + \rho_{2i_1} + \dots + \rho_{i_p(m-1)} + \rho_{(m-1)m} + \rho_{mj_q} + \dots + \rho_{j_11}; \rho_{12} + \rho_{2i_1} + \dots + \rho_{i_p m} + \rho_{m(m-1)} + \rho_{mj_q} + \dots + \rho_{j_11} \} \quad (8)$$

Здесь индексы $i_1 < \dots < i_p \in I$ и $j_1 < \dots < j_q \in J$ представляют собой дизъюнктное разбиение множества $\{3, \dots, (t-2)\} = I \sqcup J$, а максимум берется по всевозможным таким разбиениям.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.О., Тужилин А.А. Теория экстремальных сетей // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 5. С. 65-118.
3. Ivanov A., Tuzhilin A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2022. pp. 165-182.
4. Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства. Матем. сб., 2013. Т.204, №9. С.51-72.
5. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: МЦНМО, 2020.
6. Иванов А.О., Тужилин А.А. Еремин А.Ю. и др. Минимальные заполнения псевдометрических пространств // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике, 2011. Т.27. С.83-105.
7. Иванов А. О., Овсянников З. Н., Стрелкова Н. П., Тужилин А. А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // Вестн. Моск. унив., Матем. Мех. 2012. №5. С.3-8.
8. Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. Отношение Штейнера для многообразий // Матем. заметки, 2003. Т.74, №3. С.387-395.

9. Овсянников З.Н. Открытое семейство множеств, для которых минимальное заполнение не единственно // Фунд. и прикл. матем. 2013. Т.18, № 2. С.153-156.
10. Беднов Б. Б. Длина минимального заполнения пятиточечного метрического пространства // Вестн. Моск. унив., Матем. Мех. 2017. №6. С.3-8.
11. Беднов Б. Б. О множестве точек Штейнера четырех элементов в пространстве Линденштраусса // Вестн. Моск. унив., Матем. мех. 2019. №6. С.3-8.
12. Беднов Б. Б. Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб. 2016. Т.207, №8. С.31-46.
13. Беднов Б. Б., Бородин П. А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб., 2014. Т.205, №4. С.3-20.
14. Пахомова А. С. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа // Матем. заметки, 2014. Т.96, №1. С.126-137.
15. Рублева О.В. Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения// Вестн. Моск. унив., Матем. Мех. 2012. №2.С.8-11.

REFERENCES

1. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Extreme Networks Theory // Moscow, Izhevsk: IKI, 2003.
2. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. One-dimensional Gromov minimal filling problem // Sbornik: Mathematics 2012. vol. 203, № 5.pp. 65-118.
3. Ivanov A., Tuzhilin A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2022. pp. 165-182.
4. Eremin A.Yu. A formula for the weight of a minimal filling of a finite metric space.Sbornik: Mathematics 2013. vol. 204, №9. pp.51-72.
5. Vasilyev F.P., Ivanitskiy A.Y. In-Depth Analysis of Linear Programming // Dordrecht: Springer, 2001.
6. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., Eremin A.Yu. Minimal filling of a pseudometric space // Seminar on tensor and vector analysis with applications in geometry, mechanics and physics, 2011. Vol.27. pp.83-105
7. Ivanov A.O., Ovsyannikov Z.N., Strelkova N.P., Tuzhilin A.A. One-dimensional minimal fillings with negative edge weights // Moscow University Mathematics Bulletin, 2012. vol.67. pp.189-194.
8. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., Cieslik D. Steiner Ratio for Manifolds // Math. Notes 2003. vol.74, №3. pp.387-395.
9. Ovsyannikov Z.N. An open family of sets that have several minimal fillings // Fundamental and Applied Mathematics, 2013. Vol.18. №2, pp.153-156.
10. The length of minimal filling for a five-point metric space // Moscow University Mathematics Bulletin, 2017. vol.72. pp.221-225.

-
11. Bednov B. B. The set of geometric medians for four-element subsets in Lindenstrauss spaces // Moscow University Mathematics Bulletin 2019. №6. С.215-220.
 12. Bednov B. B. The length of a minimal filling of star type // Sb. Math., 2016. T.207, №8. С.1064-1078.
 13. Bednov B. B., Borodin P. A. Banach spaces that realize minimal fillings // Sb. Math., 2014. vol.205, №4. С.459-475.
 14. Pakhomova A.S. A Continuity Criterion for Steiner-Type Ratios in the Gromov-Hausdorff Space // Math. Notes, 2014. vol.96, №1. pp.130-139.
 15. Rubleva O.V. The additivity criterion for finite metric spaces and minimal fillings // Moscow University Mathematics Bulletin, 2012. vol.67. pp.52-54.

Получено: 13.05.2022

Принято в печать: 8.12.2022