ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

# Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем[1]

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

**Козко Артем Иванович** — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
*e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk*
**Лужина Любовь Михайловна** — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
*e-mail: lluzhina@gmail.com*
**Попов Антон Юрьевич** — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
*e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk*
**Чирский Владимир Григорьевич** — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Аннотация**

В статье исследуется модель Рамсея — Касса — Купманса. Мы рассматриваем вспомогательную систему дифференциальных уравнений, которая аналогична системе, возникающей в случае постоянства стационарной нормы сбережениую. Нами обнаружено, что системы этого класса решаются в квадратура. Это позволяет найти приближенные решения системы, описывающую исходную модель.

*Ключевые слова:* математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, стационарная нормы сбережения.

*Библиография:* 16 названий.

**Для цитирования:**
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 115–125.

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 4.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

## The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey–Kass–Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

**Kozko Artem Ivanovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
*e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk*
**Luzhina Lyubov Mihailovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
*e-mail: lluzhina@gmail.com*
**Popov Anton Yurievich** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
*e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk*
**Chirskii Vladimir Grirorevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Abstract**

The article is devoted to the Ramsey–Kass–Koopmans model. We consider an auxiliary system of differential equations, which is analogous to the system that arises in the case of constancy of the stationary rate of savings. We found that systems of this class are solved in quadrature. This allows us to find approximate solutions to the system describing the original model.

*Keywords:* mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, stationary savings rate.

*Bibliography:* 16 titles.

**For citation:**
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2022, “The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey–Kass–Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 115–125.

## 1. Введение и основной результат

В модели Рамсея — Касса — Купманса (см. [1] –[13]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени $t$ и $C(t)$ — потребление в момент времени $t$:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2 C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

Система уравнений (1) является автономной, то есть при записи её в более кратком виде

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - C - x_1 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C. \end{cases} \tag{2}$$

временная переменная $t$ в правые части системы (2) не входит. Это даёт возможность, отправляясь от начальных условий

$$C(0) = C_0, \quad K(0) = K_0, \tag{3}$$

и решая систему по соответствующим приближённым формулам, достигнув при некотором значении времени $t_1$ состояния

$$C(t_1) = C_1, \quad K(t_1) = K_1, \tag{4}$$

решать далее систему, осуществив сдвиг по времени, по тем же приближённым формулам, но с новыми начальными условиями (4).

Нами обнаружено, что системы более общего вида

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - b\,C - x_1 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C. \end{cases} \tag{5}$$

где $b \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр, но при наличии специальной связи между "экономическими" константами $x_1$, $x_2$, $\alpha$, состоящей в выполнении равенства

$$x_2 = \alpha x_1, \tag{6}$$

допускают решение в квадратурах. Более того (это особенно важно!), полученные нами интегральные формулы, выражающие решения задачи Коши (3), (5) при условии (6), не очень сложны.

Равенство $x_2 = \alpha x_1$ рассматривалось в ряде публикаций (см. [9], [14], [16] и ссылки там), поскольку, при его выполнении функция нормы сбережения является тождественной постоянной. Отметим, что нам не встретились в работах по этой тематике какие-либо решения системы (1) в квадратурах даже при выполнении связи $x_2 = \alpha x_1$ между входящими в систему экономическими параметрами. Обычно находят приближённое решение данной системы уравнений (без теоретической оценки погрешности), либо решают её численно. Также, из этой системы приближённо выражают зависимость $C(K)$, показывающую, каким образом функция потребления зависит от величины капитала.

Существенным обстоятельством, которое, по нашему мнению, поможет получать приближенные аналитические выражения для решения задачи Коши (2), (3) в общем случае значений констант $x_1$, $x_2$ (при отсутствии связи $x_2 = \alpha x_1$), является то, что мы нашли решение в квадратурах именно системы (5) с произвольным значением параметра $b$, но, правда, при наличии связи (6). Мы предлагаем следующий метод приближённого решения задачи Коши (2), (3) в аналитической форме.

Положим

$$x_3 = \frac{x_2}{\alpha}, \quad \xi = \alpha x_1 - x_2, \quad b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}. \tag{7}$$

Если мы имеем общий случай ($\delta \neq 0$ и, значит $x_3 \neq x_1$), то от системы (2) переходим к системе

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - b\,C - x_3 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C. \end{cases} \tag{8}$$

после чего решаем в квадратурах задачу Коши (3), (8). Полному решению данной задачи посвящается п. 2 из нашей работы. Тем самым, мы трансформируем первое уравнение системы (2), изменив константу $x_1$ на $x_3$ и введя параметр $b$ согласно (7) таким образом, что во-первых, полученная система допускает аналитическое и не слишком сложное по своей форме решение, а во-вторых, начальные значения правой части первого уравнения исходной системы (2) и правой части первого уравнения системы (8), несмотря на трансформацию самого уравнения, совпадают. Последнее обстоятельство влечёт за собой "малое"отличие решения задач Коши (2), (3) и (3), (8). Это подтверждают численные эксперименты.

В соответствующий момент времени $t_1$ (о задаче его определения мы скажем ниже), когда различие между решениями упомянутых задач подойдёт к допустимому ограничению, мы скорректируем систему (8), заменив её новой. Для этого найдём значения (4) и определим новое значение параметра $b$ по аналогии с (7):

$$b = b_1 = 1 + \frac{\xi K_1}{\alpha C_1}.$$

Затем решим задачу Коши для систем уравнений (8) со значением $b_1$ и начальными условиями $K(0) = K_1$, $C(0) = C_1$. Сдвиг по времени осуществляется без труда ввиду отмеченной выше автономности рассматриваемых систем. Далее продолжаем указанный процесс, в соответствующий момент времени $t_2$ находя значения $K(t_2)$, $C(t_2)$, $b_2$ и т.д.

Что же касается определения моментов времени, когда становится пора переходить к новой системе, меняя значение параметра $b$, то мы приходим к важной теоретической задаче оценки разности между решениями задач Коши (2), (3) и (3), (8) в какой-либо метрике. Эта проблема требует отдельного исследования, которому мы собираемся посвятить отдельные публикации.

Завершая введение, изложим план решения в квадратурах задачи Коши (3), (8), реализованный ниже в п.2,3. Прежде всего мы от функций $K$, $C$ переходим к функциям

$$v(t) = K(t)e^{x_3 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}. \tag{9}$$

Благодаря равенству $x_3 = x_2/\alpha$ система уравнений (8) переходит в значительно более простую систему уравнений на функции (9), из которой выводится обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$, явно решаемое в элементарных функциях. Далее мы находим множество значений $w$ — оно определяется значением параметра $\theta$ и начальными условиями (3). В итоге выписывается интегральная формула для функции $w(t)$, из которой явно определяется обратная к $w$ функция — зависимость $t$ от $w$. Она имеет достаточно простой вид:

$$\int_{C_0}^{w} \varphi(u)\, du = \lambda(e^{\varkappa t} - 1), \quad \text{где } \varkappa = x_3 - x_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) x_2, \tag{10}$$

$\varphi$ — явно указанная элементарная функция, $\lambda$ — постоянная, выражающаяся через $\alpha$, $a$, $\theta$, $\varkappa$. Соотношение (10) даёт возможность также определить максимальный временной отрезок, на котором существует решение исследуемой системы.

## 2. Нахождение зависимости $v(w)$ после перехода к функциям (9). Область значений функции $w$

Согласно (9) имеем (для краткости не пишем аргумент $t$ у функций $K$, $C$, $v$, $w$)

$$\dot{K} = \frac{d}{dt}\big(ve^{-x_3 t}\big) = \dot{v}e^{-x_3 t} - x_3 v e^{-x_3 t} = \dot{v}e^{-x_3 t} - x_3 K,$$

$$\dot{C} = \frac{d}{dt}\big(we^{-x_2 t}\big) = \dot{w}e^{-x_2 t} - x_2 w e^{-x_2 t} = \dot{w}e^{-x_2 t} - x_2 C.$$

Отсюда находим

$$\dot K + x_3K = \dot v e^{-x_3 t}, \quad \dot C + x_2C = \dot w e^{-x_2 t}. \tag{11}$$

Ввиду (11) система (8) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot v e^{-x_3 t} = aK^\alpha - b\,C = av^\alpha e^{-\alpha x_3 t} - bwe^{-x_2 t}, \\ \dot w e^{-x_2 t} = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}C = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1}we^{(-(\alpha-1)x_3-x_2)t}. \end{cases} \tag{12}$$

После умножения первого уравнения системы (12) на $e^{x_3 t}$, а второго — на $e^{x_2 t}$, учитывая обозначение (10), получим следующую систему уравнений на функции $v$ и $w$:

$$\begin{cases} \dot v = (av^\alpha - bw)e^{\varkappa t}, \\ \dot w = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1}we^{\varkappa t}. \end{cases} \tag{13}$$

Разделим первое уравнение системы (13) а второе, учитывая равенство

$$\frac{\dot v}{\dot w} = \frac{dv}{dt} : \frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dw}.$$

Получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$:

$$\frac{dv}{dw} = \theta\frac{av^\alpha - bw}{\alpha aw}v^{1-\alpha} = \frac{\theta}{\alpha}\frac{v}{w} - \frac{\theta b}{\alpha a}v^{1-\alpha}. \tag{14}$$

Добавим, что начальные условия (3) вместе с формулами перехода (9) от функций $K$, $C$ к функциям $v$, $w$ дают задачу Коши для уравнения (14) с начальным условием $v(C_0) = K_0$.

Уравнение (14) входит в класс уравнений Бернулли. Такое уравнение решается стандартными известными методами. Сначала уравнение (14) сводится к линейному неоднородному уравнению введением функции $y(w) = v^\alpha(w)$. Тогда

$$v = y^{1/\alpha}, \quad \frac{dv}{dw} = \frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{dy}{dw}, \quad y(C_0) = K_0^\alpha. \tag{15}$$

Подставив выражения (15) в уравнение (14), получим задачу Коши

$$y'(w) = \frac{\theta y}{w} - \frac{\theta b}{a}, \quad y(C_0) = K_0^\alpha. \tag{16}$$

Наконец, введя функцию $z(w) = y(w)w^{-\theta}$, придём к задаче Коши

$$z'(w) = -\frac{\theta b}{a}w^{-\theta}, \quad z(C_0) = K_0^\alpha C_0^{-\theta}, \tag{17}$$

которая решается непосредственно интегрированием:

$$z(w) = \frac{K_0^\alpha}{C_0^\theta} + \frac{\theta b}{a}\cdot\frac{C_0^{1-\theta} - w^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta \neq 1,$$

$$z(w) = \frac{K_0^\alpha}{C_0} + \frac{\theta b}{a}\cdot\ln\frac{C_0}{w}, \quad \theta = 1.$$

Заметим, что $z(w)$ единообразно можно выразить через функцию полезности

$$U(C) = U_\theta(C) = \begin{cases} \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \quad C > 0, \quad \theta \in (0,1)\cup(1,+\infty), \\ \ln C, \quad \theta = 1, \end{cases} \tag{18}$$

применяемую в различных экономических моделях (см. [9], [13], [16]):

$$z(w) = K_0^\alpha C_0^{-\theta} + \frac{\theta b}{a}\big(U_\theta(C_0) - U_\theta(w)\big). \tag{19}$$

Из (19), (17), (15) получаем зависимость

$$v(w) = \Big(K_0^\alpha\Big(\frac{w}{C_0}\Big)^\theta + \frac{\theta b w^\theta}{a}\big(U_\theta(C_0) - U_\theta(w)\big)\Big)^{1/\alpha}. \tag{20}$$

По смыслу задачи $K(t)$ и $C(t)$ должны быть положительными, а вместе с ними, ввиду (9), положительными являются $v(t)$ и $w(t)$. Из второго уравнения системы (13) следует, что положительность $v$ и $w$ влечёт за собой возрастание функции $w(t)$. Из начального условия $w(0) = C(0) = C_0$ и возрастания $w(t)$ заключаем, что в зависимости (20) $w$ заведомо лежит на луче $[C_0, +\infty)$, а есть ли для $w$ ограничение сверху — предстоит выяснить.

Несложный анализ показывает, что при $\theta \in (0,1]$ функция $w(t)$ должна быть ограниченной. Действительно, перепишем зависимость (20) в следующей форме:

$$av^\alpha(w) = aK_0^\alpha\Big(\frac{w}{C_0}\Big)^\theta + \theta b w^\theta\big(U_\theta(C_0) - U_\theta(w)\big). \tag{21}$$

Поскольку функция $av^\alpha$ должна быть положительной, то положительной должна быть правая часть равенства (21), а это равносильно неравенству (здесь, как и ранее, мы используем производственную функцию Кобба-Дугласа $f(K) = aK^\alpha$)

$$U_\theta(w) - U_\theta(C_0) < \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta}. \tag{22}$$

В случае $\theta \in (0,1)$ из (22) и (18) находим

$$\frac{w^{1-\theta} - C_0^{1-\theta}}{1-\theta} < \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta} \quad\Longleftrightarrow\quad w^{1-\theta} < C_0^{1-\theta} + \frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{f(K_0)}{bC_0^\theta} = C_0^{1-\theta}\Big(1 + \frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{f(K_0)}{C_0}\Big).$$

Отсюда окончательно получаем следующую границу сверху для значений функции $w(t)$, в случае, когда параметр $\theta$ лежит на интервале $(0;1)$:

$$w < C_0\Big(1 + \frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{f(K_0)}{C_0}\Big)^{\frac{1}{1-\theta}}. \tag{23}$$

В случае $\theta = 1$ из (18) и (22) находим

$$\ln\Big(\frac{w}{C_0}\Big) < \frac{f(K_0)}{bC_0} \Longleftrightarrow w < C_0\exp\Big(\frac{f(K_0)}{bC_0}\Big). \tag{24}$$

Если же $\theta > 1$, то наличие (или отсутствие) ограничения сверху для функции $w(t)$ зависит от начальных условий (3). Действительно, неравенство (22) с учётом (18) можно переписать в следующей равносильной форме:

$$\frac{C_0^{1-\theta} - w^{1-\theta}}{\theta - 1} < \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta}. \tag{25}$$

Нетрудно убедиться в том, что левая часть (25) возрастает по переменной $w$, а предел её при $w \to +\infty$ равен $C_0^{1-\theta}/(1-\theta)$. Поэтому при условии

$$\frac{C_0^{1-\theta}}{\theta - 1} \leqslant \frac{f(K_0)}{\theta b C_0^\theta} \Longleftrightarrow bC_0 \leqslant \frac{\theta - 1}{\theta} f(K_0) \tag{26}$$

неравенство (25) заведомо выполняется при любом $w \in [C_0, +\infty)$. Если же

$$bC_0 > \frac{\theta - 1}{\theta} f(K_0) \tag{27}$$

то из (25) выводим следующую верхнюю границу для $w$:

$$w < C_0 \left( \frac{1}{1 - \frac{\theta-1}{\theta} \cdot \frac{f(K_0)}{bC_0}} \right)^{\frac{1}{\theta-1}}. \tag{28}$$

Итогом рассмотрений параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. *Между функциями $v(t)$ и $w(t)$, выражающимися через решение $(K(t), C(t))$ задачи Коши* (3), (8) *(значение параметра $b$ является произвольным положительным числом) по формулам* (9), *имеется зависимость* (20). *Функция $w(t)$ превосходит $C_0$ во всех точках, кроме $t = 0$, а верхняя граница для значений $w(t)$ задана неравенствами* (23) *и* (24) *в случае $\theta \in (0, 1)$ и $\theta = 1$ соответственно. В случае $\theta > 1$ при условии*

$$bC_0 \leqslant \frac{\theta - 1}{\theta} f(K_0)$$

*функция $w(t)$ может неограниченно возрастать, а если $bC_0 > (1 - 1/\theta) f(K_0)$, то верхняя граница для $w(t)$ задается неравенством* (28).

Завершая параграф, уместно упомянуть ограничения на начальные условия (3), а также на функции $C(t)$ и $K(t)$, принятые в этой тематике. Функция $f(K) = aK^\alpha$ называется производственной функцией Кобба-Дугласа, а $s(t) = 1 - C(t)/f(K(t))$ нормой валового сбережения [9]. Величина $s(t)$ должна быть положительной, а это равносильно выполнению неравенства

$$C(t) < f(K(t)) = aK^\alpha(t). \tag{29}$$

Поэтому рассматриваются задачи Коши (1), (3) с дополнительным ограничением на начальные условия

$$C_0 < f(K_0). \tag{30}$$

В случае, когда $\alpha x_1 = x_2$ (функция нормы сбережения постоянна, и, значит, в формулах (9) $x_3 = x_1$, а в системе (8) параметр $b = 1$) условие (29) равносильно условию

$$w(t) < f(v(t)). \tag{31}$$

В нашей работе [7] мы изучили вопрос, какому ограничению сверху (естественно, более сильному, чем указанному в теореме 1) должна удовлетворять функция $w(t)$, чтобы выполнялось неравенство (31). Заметим, что требование (31) означает (при $b = 1$), что не только вторая компонента решения $(v(t), w(t))$ системы (13), но и первая должна быть возрастающей функцией. По аналогии с этим для общего случая ($b$ произвольно) мы будем рассматривать ограничение

$$b\, w(t) < f(v(t)), \tag{32}$$

которое согласно первому уравнения системы (13) влечёт за собой возрастание функции $v$. В частности, мы требуем, чтобы начальные условия удовлетворяли неравенству

$$bC_0 < f(K_0). \tag{33}$$

## 3. Решение системы в квадратурах. Выражение функции, обратной к $w$ через разность значений специальной функции. Максимальный временной промежуток существования решения

Полученная в предыдущем параграфе зависимость $v(w)$ (20), будучи подставлена во 2-е уравнение системы (13), позволяет явно найти в интегральной форме обратную функцию к $w(t)$, то есть выразить $t$ как функцию $w$. Действительно, разделив переменные во 2-м уравнении (напомним, что постоянная выражается через параметры исходной системы (8) по формуле $\varkappa = (1/\alpha - 1)x_2$ )

$$\dot{w} = \theta^{-1}\alpha a v^{\alpha-1} w e^{\varkappa t}$$

системы (13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{w}(v(w))^{1-\alpha} = \frac{\alpha a}{\theta} e^{\varkappa t}\, dt$$

Это уравнение интегрируется с учётом начального условия $w(0) = C_0$ и тождества (20) следующим образом:

$$\int_{C_0}^{w} \left( K_0^{\alpha} \left( \frac{u}{C_0} \right)^{\theta} + \frac{\theta b u^{\theta}}{a} \left( U_\theta(C_0) - U_\theta(u) \right) \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{du}{u} = \frac{\alpha a}{\theta \varkappa}(e^{\varkappa t} - 1). \tag{34}$$

Умножив обе части соотношения (34) на $a^{1/\alpha - 1}$ и сделав в интеграле замену переменной $u = C_0 z$, получим более удобную форму записи решения:

$$\int_{1}^{w/C_0} \left( f(K_0) z^{\theta} - \theta b z^{\theta} C_0^{\theta} \left( U_\theta(zC_0) - U_\theta(C_0) \right) \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{dz}{z} = \frac{\alpha a^{1/\alpha}}{\theta \varkappa}(e^{\varkappa t} - 1). \tag{35}$$

Согласно (18) имеем

$$C_0^{\theta - 1} \left( U_\theta(zC_0) - U_\theta(C_0) \right) = U_\theta(z), \quad \theta,\ C_0,\ z \in (0; +\infty). \tag{36}$$

Тождество (36) после несложных преобразований соотношения (35) помогает в итоге выразить $t$ через $w$:

$$t = \frac{1}{\varkappa} \ln \left( 1 + \frac{\theta \varkappa}{\alpha a^{1/\alpha}} J_\theta \left( \frac{w}{C_0}; \alpha \right) \right), \tag{37}$$

где

$$J_\theta\,(Z; \alpha) = \int_{1}^{Z} \left( f(K_0) z^{\theta} - \theta b z^{\theta} C_0 U_\theta(z) \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{dz}{z}. \tag{38}$$

Формулы (37), (38), (20) дают решение системы дифференциальных уравнений (13) с начальными условиями $v(0) = K_0$, $w(0) = C_0$ в интегральной форме. Перейдя от функций $v(t)$, $w(t)$ к функциям $K(t)$, $C(t)$ (см. (9)), мы получим решение задачи Коши (3), (8). Трудности возникают при попытке найти более простое аналитическое выражение $t(w)$ чем (37), поскольку интеграл $J_\theta\,(Z; \alpha)$ при $\alpha \in (0; 1) \setminus \cup_{n=2}^{+\infty} \{1/n\}$ не является элементарной функцией верхнего предела интегрирования $z$ (кроме некоторых случаев, когда $f(K_0)$ и $C_0$ связаны специальными соотношениями). Интегралы $J_\theta\left(Z; \frac{1}{2}\right)$, $J_\theta\left(Z; \frac{1}{3}\right)$ и т.д. несложно вычисляются, но, как известно из теории экономического моделирования (см. [15] и [9]), производственная функция $f(K) = aK^{\alpha}$ при $\alpha \leqslant 2/3$ даёт экономически неэффективную модель, и такие значения показателя $\alpha$ не рассматриваются. Всё же, по мнению авторов, значения $\alpha \in [1/2; 2/3]$ могут представлять теоретический интерес. Поэтому приведём значение $J_\theta(Z; \frac{1}{2})$.

При $\theta \neq 1$ имеем

$$J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)=\int_1^Z\left(f(K_0)z^\theta-\theta b\,C_0\,z^\theta\cdot\frac{z^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)\frac{dz}{z}=$$
$$=\int_1^Z\left(\left(f(K_0)+\frac{\theta}{1-\theta}b\,C_0\right)z^{\theta-1}-\frac{\theta b\,C_0}{1-\theta}\right)dz=$$
$$=\left(f(K_0)+\frac{\theta}{1-\theta}b\,C_0\right)\frac{Z^\theta-1}{\theta}-\frac{\theta b\,C_0}{1-\theta}(Z-1),\quad(39)$$

а интегрирование возможно при любом значении $Z \geqslant 1$, если $\theta > 1$ и $f(K_0) > \frac{\theta}{\theta-1}b\,C_0$, а в других случаях имеются ограничения (см. теорему 1)

$$\begin{aligned}1\leqslant Z\leqslant\left(1-\frac{\theta-1}{\theta}\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)^{\frac{1}{1-\theta}},\ \text{если } \theta>1,\ \frac{f(K_0)}{b\,C_0}<\frac{\theta}{\theta-1},\\ 1\leqslant Z\leqslant\left(1+\frac{1-\theta}{\theta}\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)^{\frac{1}{1-\theta}},\ \text{если } \theta\in(0;1).\end{aligned}\quad(40)$$

В частности, выражение (39), если в него подставить верхние границы для переменной $z$ из (40) даёт максимально возможное (при $\theta \in (0;1)$ или при $\theta \in (1;+\infty)$, если $f(K_0)/(b\,C_0) < \frac{\theta}{\theta-1}$) значение интеграла $J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)$. Если его подставить в (37), то получится максимальное значение временного промежутка, на котором существует решение при рассматриваемых значениях параметров.

При $\theta = 1$ имеем

$$J_1\left(Z;\frac{1}{2}\right)=\int_1^Z\left(f(K_0)-b\,C_0\,\ln z\right)dz=(Z-1)(f(K_0)+b\,C_0)-b\,C_0 Z\ln Z,$$

а длина максимального временного промежутка, на котором существует решение, равна (если $\alpha = 1/2$, то $\varkappa = x_2$)

$$T=\frac{1}{\varkappa}\ln\left(1+\frac{2\varkappa}{a^2}J_1\left(\exp\left(\frac{f(K_0)}{bC_0}\right);\frac{1}{2}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{x_2}\ln\left(1+\frac{2x_2}{a^2}\left(bC_0\exp\left(\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)-f(K_0)-bC_0\right)\right).$$

В дальнейших работах мы собираемся более детально исследовать экономические модели со значениями параметров $\alpha$ и $\theta$, востребованные в различных приложениях.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея — Касса — Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. `https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207`.

4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Vol 20(4), С. 188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Vol 23(1), С. 118-129. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129.

8. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey–Cass–Koopmans Model. http://ciep.itam.mx/\~{}rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.

9. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

10. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

11. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2, 2010.

12. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture\%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.

13. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

14. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.

15. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.

16. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey–Cass–Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/\~{}webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ram\-sey_Cass_Koop\-mans_pog.pdf

## REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth“, *Princeton: Princeton University Press.* pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory“, *New York: Oxford University Press.* pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey–Kass–Koopmans problem with logarithmic utility function“, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

4. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey–Kass–Koopmans problem for consumer choice“, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.

5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey–Kass–Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

6. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey–Kass–Koopmans problem“, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

7. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2022, “The consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function“, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 23(1), September, pp. 118-129. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

8. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey–Cass–Koopmans Model“, 2018, http://ciep.itam.mx/\~{}rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.

9. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, “When Economic Growth is Less than Exponential“, *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.

12. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, *Available at:* http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture\%20notes/Ch7-2010-1.pdf.

13. Romer, D. 2006, “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.

14. Robert J. Barro. 1999, “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model“, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.

15. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

16. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey–Cass–Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/\~{}webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ram\-sey_Cass_Koop\-mans_pog.pdf.

Получено: 22.09.2022
Принято в печать: 8.12.2022