ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 519.4

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ В ГРУППАХ АРТИНА С ДРЕВЕСНОЙ СТРУКТУРОЙ

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина (г. Тула)

Аннотация

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением $G =< a_1, ..., a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j >$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij} , состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, где $m_{ij} \geqslant 2, i \neq j$. Если группе G соответствует конечный связный дерево-граф Γ такой, что вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют образующие a_i и a_j, то ребру e соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i \neq j$. В этом случае мы имеем группу Артина с древесной структурой.

Группы Артина с древесной структурой введены В. Н. Безверхним, алгоритмические проблемы в них рассматривались В. Н. Безверхним и О. Ю. Платоновой (Карповой).

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i \neq j >$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическую подгруппу $< a_j >$.

В настоящей работе доказывается теорема о свободных подгруппах для групп Артина с древесной структурой: пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы $G_{ij}, i \neq j$, выполнено равенство $gHg^{-1} \cap G_{ij} = E$, то H является свободной.

В доказательстве основной теоремы использованы идеи В. Н. Безверхнего о приведении множества образующих подгруппы к специальному.

Ключевые слова: группа Артина с древесной структурой, подгруппа, свободное произведение с объединением.

ON FREE SUBGROUP IN ARTIN GROUP WITH TREE-STRUCTURE

V. N. Bezverkhnii, I. V. Dobrynina (Tula)

Abstract

Let G be finitely generated Artin group with tree-structure defined by the presentation $G =< a_1, ..., a_n; < a_i a_j >^{m_{ij}} =< a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n} >$, where m_{ij} is number that corresponds to symmetrical matrix of Coxeter, and $m_{ij} \geqslant 2, i \neq j$ a group G matches the end coherent tree-graph Γ such that if the tops of some edge e of the graph Γ match the form a_i and a_j, then the edge e corresponds to the ratio of the species $< a_i a_j >^{m_{ij}} =< a_j a_i >^{m_{ji}}$.

Artin groups with a tree-structure was introduced by V. N. Bezverkhnii, theirs algorithmic problems were considered by V. N. Bezverkhnii and O. Y. Platonova (Karpova).

The group G can be represented as the tree product 2-generated of the groups, united by a cyclic subgroups. We proceed from the graph Γ of the group G to the graph $\overline{\Gamma}$ the following follows: the tops of some edge $\overline{e}$ of the graph $\overline{\Gamma}$ put in correspondence Artin groups the two forming $G_{ij} =< a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} =< a_j a_i >^{m_{ji}} >$ and $G_{jk} =< a_j, a_k; < a_j a_k >^{m_{jk}} =< a_k a_j >^{m_{kj}} >$, and edge $\overline{e}$ will match cyclic subgroup $< a_j >$.

This paper considers the theorem on the freedom of the Artin groups with a tree-structure: let H be finitely generated subgroup of an Artin group G with a tree-structure, while for any $g \in G$ and every subgroup $G_{ij}, i \neq j$, executed equality $gHg^{-1} \cap G_{ij} = E$ then H is free.

In the proof of use of the ideas V. N. Bezverkhnii on bringing many forming of the subgroup to a special set.

Keywords: Artin group with tree-structure, the subgroup, amalgamated product.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением $G =< a_1, ..., a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j >$, где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geqslant 2, i \neq j$. Если группе G соответствует конечный связный дерево-граф Γ такой, что если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют образующие a_i и a_j, то ребру e соответствует соотношение вида $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i \neq j$. В этом случае мы имеем группу Артина с древесной структурой [1].

Группы Артина с древесной структурой введены В. Н. Безверхним, алгоритмические проблемы в них рассматривались В. Н. Безверхним и О. Ю. Платоновой (Карповой) (см.[1]).

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих

$G_{ij} =< a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i \neq j >$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическую подгруппу $< a_j >$.

Хорошо известно строение подгрупп свободных групп [2] и свободных произведений групп [3].

Для групп с одним определяющим соотношением В. Магнусом [4] получено доказательство теоремы о свободе, а Н. С. Романовским [5] — обобщенной теоремы о свободе. Результаты по данной тематике можно найти в работе С. И. Адяна, В. Г. Дурнева [6].

Строение подгрупп в группах с малой мерой налегания рассматривали В. П. Классен [7] и Б. П. Ваньков [8].

В работе [9] ставился вопрос об "общности" класса m-порожденных групп, в которых любая k-порожденная подгруппа (для любого $k < m$) свободна. Эта задача решена в Г. Н. Аржанцевой и А. Ю. Ольшанским [10]. В [11] Г. Н. Аржанцевой снято ограничение $k < m$ на число порождающих и доказано, что в определенном статистическом смысле почти в каждой группе с m порождающими и n соотношениями (m и n фиксированы) любая $\leqslant L$-порожденная подгруппа бесконечного индекса свободна (L — произвольная наперед заданная граница, возможно, $L >> m$), а все подгруппы конечных индексов несвободны. Для доказательства найдено условие на определяющие соотношения, при котором в конечно определенной группе подгруппы бесконечного индекса с заданным числом порождающих свободны. Это условие формулируется при помощи конечных размеченных графов.

Используя технику Г. Н. Аржанцевой и А. Ю. Ольшанского, для групп Кокстера экстрабольшого типа, соответствующих матрице Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, с $m_{ij} \geqslant 3k+1$ И. Каповичем и П. Шуппом доказано [12], что всякая k-порожденная подгруппа без кручения является свободной в G.

В данной работе доказывается теорема о свободных подгруппах для групп Артина с древесной структурой.

2. Основные понятия

Рассмотрим свободное произведение $\overline{G}$ двупорожденных групп Артина $G_{ij} =< a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; \langle a_j a_k \rangle^{m_{jk}} = \langle a_k a_j \rangle^{m_{kj}} >$, объединенных по циклической подгруппе $< a_j >$:

$$\overline{G} =< a_i, a_j, a_j', a_k; , \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, \langle a_j' a_k \rangle^{m_{jk}} = \langle a_k a_j' \rangle^{m_{kj}}, a_j = a_j' > .$$

Рассмотрим слово из группы $\overline{G}$ и представим его в виде:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы G_{ij} по $< a_j >$ и G_{jk} по $< a_j >$, при этом r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) являются элементами из разных сомножителей группы $\overline{G}$. Элемент K_g назовем ядром слова g. Если ядро K_g не является элементом из объединяемой подгруппы, то элементы (слоги) l_{ng} и r_{ng} лежат в одном сомножителе группы $\overline{G}$, а ядро K_g — в другом. В данном случае слоговая длина слова из (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 1. *Трансформой называется слово вида*

$$g = r_{1g} \dots r_{ng} K_g r_{ng}^{-1} \dots r_{1g}^{-1}, \tag{2}$$

то есть в (1) выполнено условие $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$.

Если ядро K_g лежит в объединяемой подгруппе $< a_j >$, то слоги в (1) лежат в разных сомножителям группы $\overline{G}$. Тогда слоговая длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{3}$$

где $h_g = K_g$, равна $L(g) = 2n$. Нетрансформой нечетной длины будем называть слово вида (1), нетрансформой четной длины — слово вида (3).

Определение 2. *Левой (правой) половиной слов (1), (3) называется подслово* $g = l_{1g} \dots l_{ng}(r_{ng} \dots r_{1g})$. *Большим начальным (конечным) отрезком называется подслово* $l_{1g} \dots l_{ng} K_g$ $(K_g r_{ng} \dots r_{1g})$.

Определение 3. *Левую (правую) половину слова*

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$$

будем называть изолированной в множестве $\{w_j\}, j \in \overline{1, N}$, *если ни у одного из слов* $w_j^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$ *множества* $(\{w_j\} \setminus w_i) \cup (\{w_j^{-1}\} \setminus w_i^{-1})$ *невозможно выделить подслово* $l_{1w_i} \dots l_{mw_i}(r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ *в качестве начального (конечного) подслова, то есть* $w_j^{\varepsilon} \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m+1w_j} w_{jn}^{\varepsilon}(w_j^{\varepsilon} \neq w_{j1}^{\varepsilon} r_{m+1w_j} r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$.

Рассмотрим аналогичное введенному в [13] специальное множество слов.

Определение 4. *Специальным назовем конечное множество слов* $W = \{w_i\}, i \in \overline{1, N}$ *из группы* $\overline{G}$, *если для него выполнены следующие условия:*

1. Левая половина нетрансформы из множества $W = \{w_i\}, i \in \overline{1, N}$ *изолирована в нем. Для нетрансформы четной длины изолирована и левая, и правая половины.*

2. Нельзя уменьшить длину нетрансформы w_j , *умножая ее слева и справа на элементы из подгруппы, порожденной множеством* $\{w_i\} \setminus w_j$. *Длину произвольного слова* w_j *нельзя уменьшить, умножая на элемент* w *длины меньше* $L(w_j)$, *принадлежащий подгруппе* $< \{w_i\}, i \in \overline{1, N} >$.

3. Если $w_i'^{\varepsilon} = l_{1w_i'} \dots l_{nw_i'} K_{w_i'} r_{nw_i'} \dots r_{s+1w_i'} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1, s < n,$ — *нетрансформа из множества* W *и* $\{w_i''^{\varepsilon} = l_{1w_i''} \dots l_{nw_i''} K_{w_i''} r_{nw_i''} \dots r_{s+1w_i''} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}$, $\varepsilon = \pm 1\}$ — *подмножество нетрансформ из* $W \setminus \{w_i'\} \cup W \setminus \{w_i'^{-1}\}$, *правые* *половины которых оканчиваются подсловом $r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}$, тогда если подгруппа $< w_i, i = \overline{1,n} > \cap r_{1w_i'}^{-1} \dots r_{sw_i'}^{-1} D r_{sw_i'} \dots r_{1w_i}' = B$, где $D \neq E$ из той же подгруппы, что и $r_{s+1w_i'}$, то для $u \in B$ выполняются неравенства $L(w_i'u) \geqslant L(w_i'), L(w_i'uw_i''^{\varepsilon}) \geqslant L(w_i')$.*

4. Пусть $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}, w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$ — слова из W, не обязательно различные, $s \leqslant m \leqslant n$, тогда не существует слова $g \neq 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы, порожденной W, такого, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1w_i} r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} r'^{-1}_{s+1w_i} \dots r'^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l^{-1}_{nw_i} \dots l^{-1}_{1w_i},$$

либо если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i^{-1} g = r^{-1}_{1w_i} \dots r^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l'^{-1}_{nw_i} \dots l'^{-1}_{s+1w_i} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

3. Базовые утверждения

Теорема 1. [14] *Пусть $G = G_1 *_U G_2$, U обладает свойством максимальности. Тогда любое конечное множество слов группы G можно преобразовать в специальное.*

SL [14] Всякое конечное множество слов $W = \{w_i\}, i \in \overline{1,N}$, группы $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j>} G_{jk}$ можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j>} G_{jk}$ с древесной структурой.

Множество образующих $W = \{w_i\}, i = \overline{1,N}$, подгруппы H приведем к специальному. Разобьем его следующим образом на подмножества: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножеству $M_i, i = \overline{1,k}$, принадлежат трансформы с одинаковыми крыльями, сопряженные G_{ij} или G_{jk}. С каждым из множеств $M_i, i = \overline{1,k}$, связана подгруппа $(M_i) = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \dots r_{2i} r_{1i}$, где C_i – подгруппы из G_{ij} или G_{jk}, порожденные ядрами трансформ из M_i. Упорядочим (M_i) по длинам крыльев трансформ. Получим ряд

$$(M_1) \leqslant (M_2) \dots \leqslant (M_k). \qquad (4)$$

Лемма 1. [15] *Ряд (4) можно преобразовать в ряд*

$$(M_1') \leqslant (M_2') \ldots \leqslant (M_{k'}'), \tag{4'}$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gp((M_0),(M_1),(M_2),\ldots,(M_k)) = gp((M_0),(M_1'),(M_2'),\ldots,(M_{k'}'))$.

2. Если подгруппе $(M_j') = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\ldots r_{2j}r_{1j}$ *принадлежит трансформа* $u = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}h_u r_{nj}\ldots r_{2j}r_{1j}$, *где* h_u *принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (4') имеется подгруппа*

$$(M_l') = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\ldots r_{n-1j}^{-1}C_l'r_{n-1j}\ldots r_{2j}r_{1j},$$

содержащая u.

3. Если $(M_j') = r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\ldots r_{1j}$, $(M_s') = r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}r_{n+1s}^{-1}\ldots r_{ms}^{-1}C_s'r_{ms}\ldots r_{n+1s}r_{nj}\ldots r_{1j}$ *подгруппы ряда (4') и подгруппа* (M_j') *содержит трансформу* $u = r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}h_u r_{nj}\ldots r_{1j}$ *либо* $u' = r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}K_u r_{nj}\ldots r_{1j}$, *где* $K_u = r_{n+1s}^{-1}h_u r_{n+1s}$, *то существует подгруппа ряда (4')* $(M_k') = r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}r_{n+1s}^{-1}C_k'r_{n+1s}r_{nj}\ldots r_{1j}$, *содержащая в первом случае трансформу* u, *во втором —* u'.

4. Если $(M_j') = r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\ldots r_{1j}$ *— подгруппа ряда (4') и* $y^\varepsilon = l_{1y}^{-1}\ldots l_{my}^{-1}$ $K_y r_{my}\ldots r_{n+1y}r_{nj}\ldots r_{1j}, \varepsilon = \pm 1$, *— элемент специального множества, причем подслово* $r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}r_{n+1y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы* $w^\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, *и, если подгруппа* (M_j') *содержит трансформу* $r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}hr_{nj}\ldots r_{1j}$ *либо трансформу* $r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}Kr_{nj}\ldots r_{1j}$, *где* $K = r_{n+1y}^{-1}hr_{n+1y}$ *то существует подгруппа ряда (4')* $(M_l') = r_{1j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}r_{n+1y}^{-1}C_l'r_{n+1y}r_{nj}\ldots r_{1j}$, *содержащая эту трансформу.*

5. Если для некоторой трансформы $u = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}K_u r_{nj}\ldots r_{2j}r_{1j}$, *принадлежащей подгруппе* $(M_j') = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\ldots r_{2j}r_{1j}$ *и нетрансформы* y *(левая половина* y *изолирована) из* M_0 *выполняется соотношение* $L(y^{-1}uy) \leqslant L(y)$, *то существует подгруппа* (M_s') *ряда (4'), содержащая трансформу* $y^{-1}r_{1u}^{-1}r_{2u}^{-1}\ldots r_{nu}^{-1}K_u r_{nu}\ldots r_{2u}r_{1u}y$, *а если* $L(yuy^{-1}) < L(y)$, *то существует подгруппа* (M_s') *из (4'), содержащая трансформу* $yr_{1u}^{-1}r_{2u}^{-1}\ldots r_{nu}^{-1}K_u r_{nu}\ldots r_{2u}r_{1u}y^{-1}$.

Подгруппу, порожденную специальным множеством $W = \{w_i\}, i = \overline{1,N}$, обозначим через $gp(M_0,S)$, где S — подгруппа, порожденная подгруппами ряда (4').

Определение 5. *Произведение* $u_1u_2\ldots u_m$, *где* $u_i \neq 1, i = \overline{1,m}$, $u_i \in W \cup W^{-1}, i = \overline{1,m}$, *из подгруппы* $gp(M_0,S)$ *назовем словом группы* $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j>} G_{jk}$, *если*

1. $u_i \neq 1$.

2. $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$ *либо* u_i *принадлежат некоторой подгруппе из ряда (4').*

3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}, i = \overline{1,m-1}$.

4. $u_i, u_{i+1}, i = \overline{1,m-1}$, *не содержатся в одной подгруппе ряда (4').*

5. В $u_1u_2\ldots u_m$ *нет произведения* $u_iu_{i+1}u_{i+2}, i = \overline{1,m-2}$, *где* $u_i \neq u_{i+2}^{-1}, u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}, u_{i+1} \in (M_j'), u_iu_{i+1}u_{i+2} \in (M_s')$, *где* $(M_j'),(M_s')$ *из ряда (4').*

Лемма 2. [14] *Всякое произведение* $w_{i1}^{\varepsilon 1} w_{i2}^{\varepsilon 2} \dots w_{in}^{\varepsilon n}, \varepsilon = \pm 1$, *где* w_{ij} *— образующие подгруппы* $< W >$, *через конечное число шагов можно привести к слову* $u_{i1} u_{i2} \dots u_{im}, m \leqslant n$, *подгруппы* $gp(M_0, S) =< W >$.

Определение 6. *Будем говорить, что между словами* v_1 *и* v_2 *имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения* $v_1 v_2$ *соответственно больше, равна или меньше максимальной из длин* $L(v_1), L(v_2)$.

Определение 7. *Слово* $u_1 u_2 \dots u_m$ *будем называть простым, если* $L(u_1 u_2 \dots u_m) = \max\{L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_m)\}$.

Лемма 3. [14] *Пусть* $u_1 u_2 \dots u_m$ *— слово из подгруппы* $gp(M_0; S)$. *Тогда* $L(u_1$
$u_2 \dots u_m) \geqslant L(u_i), i = \overline{1, m}$.

SL [14] Если в слове $u_1 u_2 \dots u_m$ выполнить сокращение в группе $\overline{G}$, то оно не затронет, по крайней мере, левую половину слова u_1.

SL [14] Всякое слово подгруппы $gp(M_0; S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.

Подгруппу $gp(M_0, S)$, порожденную специальным множеством слов $W = \{w_i\}, i = \overline{1, N}$, можно рассматривать как HNN - группу с основой S, являющуюся древесным произведением, правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы (M_0) и $(M'_j), j = \overline{1, k'}$, ряда (4') назовем порождающими подгруппами $< W >= gp(M_0, S)$.

Лемма 4. [15] *Пусть* W *— специальное множество слов группы* $\overline{G}$ *и* $H =< W >$ *— подгруппа* $\overline{G}$ *и пусть* $w_i^{\varepsilon} = l_1 \dots l_m K_{w_i} r_m \dots r_1$ *— элемент специального множества,* $v = l_1 \dots l_t, t \leqslant m$, *— начальное подслово левой половины* w_i^{ε}, *причем* v *не является изолированной левой половиной* w_i^{ε}. *Тогда если* $A_v = H \cap l_1 \dots l_t A_j l_t^{-1} \dots l_1^{-1} \neq E$, *где* $A_j = G_{ij}$, *если* $l_t \in G_{ik}$ *либо* $A_j = G_{ik}$, *если* $l_t \in G_{ij}$, *то ряд (4') содержит подгруппу* $(M'_s) = A_v$.

Лемма 5. [14] *Подгруппа* (M_0), *порожденная нетрансформами специального множества, свободна.*

Лемма 6. [15] $(M_0) \cap (S)^{gp(M_0;S)} = E$, *где* E *— единичная подгруппа.*

Лемма 7. *Пусть* $G = G_1 *_U G_2, H = gp(M_0, S)$, S *— древесное произведение подгрупп* $(M'_i), i = \overline{1, k}$. *Если пересечение* H *с любой подгруппой, сопряженной* U, *есть* E, *то* $H = (M_0) * (M'_1) * \dots * (M'_k)$.

Доказательство непосредственно следует из строения подгруппы H и леммы 4.

4. Основная теорема

Теорема 2. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина $\overline{G}$ с древесной структурой, причем для любого $g \in \overline{G}$ и любой подгруппы N, где N есть $G_{ij}, i \neq j$, либо $G_{jk}, j \neq k$, выполнено равенство $H \cap gNg^{-1} = E$, то H является свободной.*

Доказательство. Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j>} G_{jk}$ с древесной структурой, удовлетворяющая условиям теоремы. Приведем множество образующих $W = \{w_i\}, i = \overline{1, N}$, подгруппы H к специальному.

Используя лемму 7, имеем

$$H = (M_0) * (M_1') * \ldots * (M_k'), \tag{5}$$

где (M_0) — свободная часть подгруппы H. В (5) не могут быть подгруппы вида $(M_j') = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \ldots r_{nj}^{-1} C_j r_{nj} \ldots r_{2j} r_{1j}, j = \overline{1, k}$, где C_j — подгруппы из G_{ij}, либо C_j — подгруппы из G_{jk}, так как $H \cap gG_{ij}g^{-1} = E$ и $H \cap gG_{jk}g^{-1} = E$ для любого $g \in \overline{G}$. Поэтому из строения H и предыдущих лемм в (5) выполнены равенства $(M_1') = (M_2') = \ldots = (M_k') = E$, где E — единичная подгруппа, и $H = (M_0)$.

Теорема 3. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы $G_{ij}, i \neq j$, выполнено равенство $H \cap gG_{ij}g^{-1} = E$, то H является свободной.*

Доказательство. Рассмотрим конечно порожденную группу Артина с древесной структурой G, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам: $G =< \prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \ldots, relG_s, a_i = a_i' >$.

В данном случае группе Артина G соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}$ такой, что, вершинам графа $\overline{\Gamma}$ соответствуют группы Артина на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} >$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическая подгруппа $< a_j >$. Рассмотрим древесное произведение $n-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-1}, \overline{\Gamma}_{n-1} \subset \overline{\Gamma}$. Обозначим группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-1}$, через $\overline{G}_{n-1}$. Пусть n-ый сомножитель, подгруппа G_{xy}, соответствует конечной вершине дерева-графа $\overline{\Gamma}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-1}$ ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа $< a_x >$. Таким образом, группа G представлена как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-1}$ и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе $< a_x >$, то есть $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_x>} G_{xy}$.

Слово из группы G можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g} \ldots l_{ng} K_g r_{ng} \ldots r_{1g},$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы $\overline{G}_{n-1}$ по $< a_x >$ или G_{xy} по $< a_x >$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы G, K_g — ядро слова g.

Если ядро K_g не лежит в объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G, а K_g – другому.

Понятия трансформы, левой (правой) половины, изолированной половины, специального множества, слова, простого слова для группы $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_x>} G_{xy}$ определяются также, как для группы $\overline{G}$. Для группы $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_x>} G_{xy}$ справедливы теорема 1 и утверждения лемм 1-7.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа без кручения группы Артина G с древесной структурой. Тогда на основании леммы 7

$$H = (M_0) * (M_1') * \ldots * (M_k'), \tag{6}$$

где (M_0) — свободная часть подгруппы H. Отделим ее и рассмотрим подгруппы $(M_j'), j = \overline{1,k}$.

Так как $H \cap gG_{ij}g^{-1} = E$ для любого $g \in \overline{G}$, то в (6) не могут содержаться подгруппы вида $(M_j') = r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\ldots r_{nj}^{-1}C_j r_{nj}\ldots r_{2j}r_{1j}, j = \overline{1,k}$, где C_j — подгруппы из G_{xy} либо C_j из $< a_x >$. Следовательно, в (6) содержатся только подгруппы $(M_j') = g_j^{-1}C_j g_j, j = \overline{1,k}$, где C_j — подгруппы из $\overline{G}_{n-1}$.

Далее рассмотрим конечно порожденную группу Артина с древесной структурой $\overline{G}_{n-1}$, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам: $\overline{G}_{n-1} =< \prod_{s=1}^{n-1} *G_s;$ $relG_1, \ldots, relG_s, a_i = a_i' >$.

В этом случае группе Артина $\overline{G}_{n-1}$ соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}_{n-1}$ так, что, вершинам графа $\overline{\Gamma}_{n-1}$ соответствуют группы Артина на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; \langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}} >$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическая подгруппа $< a_j >$.

Рассмотрим древесное произведение $n-2$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-2}, \overline{\Gamma}_{n-2} \subset \overline{\Gamma}_{n-1}$. Группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-2}$ обозначим через $\overline{G}_{n-2}$. Пусть $(n-1)$-ый сомножитель, подгруппа G_{vz}, соответствует конечной вершине дерева - графа $\overline{\Gamma}_{n-1}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-2}$ ребром e_p. При этом ребру e_p соответствует циклическая подгруппа $< a_v >$. Таким образом, группа $\overline{G}_{n-1}$ представлена как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-2}$ и G_{vz}, объединенных по циклической подгруппе $< a_v >$, то есть $\overline{G}_{n-1} = \overline{G}_{n-2} *_{<a_v>} G_{vz}$.

Слово из группы $\overline{G}_{n-1}$ можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g}\ldots l_{ng}K_g r_{ng}\ldots r_{1g},$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы $\overline{G}_{n-2}$ по $< a_v >$ или G_{vz} по $< a_v >$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы $\overline{G}_{n-1}$, K_g — ядро слова g.

Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы $\overline{G}_{n-1}$, а K_g — другому.

Для группы $\overline{G}_{n-1} = \overline{G}_{n-2} *_{<a_v>} G_{vz}$ понятия трансформы, левой (правой) половины, изолированной половины, специального множества, слова, простого слова определяются также как для группы $\overline{G}$. А также для группы $\overline{G}_{n-1} = \overline{G}_{n-2} *_{<a_v>} G_{vz}$ справедливы теорема 1 и леммы 1-7.

Разложим ядра $C_j, j = \overline{1,k}$, в свободное произведение по лемме 7 следующим образом:

$$C_j = (M_{0j}) * (M'_{1j}) * \ldots * (M'_{lj}). \tag{7}$$

В (7) отсутствуют группы вида $(M'_{ji}) = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \ldots r_{nj}^{-1} C_{ji} r_{nj} \ldots r_{2j} r_{1j}$, где C_{ji} — подгруппы из G_{vz}, так как H не содержит элементов конечного порядка. Следовательно, все подгруппы из (7) имеют вид $(M'_{ji}) = g_{ji}^{-1} C_{ji} g_{ji}, j = \overline{1,l}$, где C_{ji} — подгруппы из $\overline{G}_{n-2}$.

Добавим к (M_0) свободные части $g_j^{-1}(M_{0j})g_j, j = \overline{1,k}$. На данном шаге получим $(M_0) * g_1^{-1}(M_{01})g_1 * \ldots * g_k^{-1}(M_{0k})g_k$.

Теперь перейдем к группе $\overline{G}_{n-3}$, разложим C_{ji}, присоединим свободные части и так далее. Через конечное число таких шагов получим ядра, являющиеся подгруппами из свободного произведения двух сомножителей вида $\overline{G}$, для которых доказано, что они свободны. Так как сопряжение свободной группы вновь есть свободная группа, то присоединяя ее на каждом шаге, получаем требуемое утверждение.

Теорема доказана.

5. Заключение

В настоящей работе нами доказана следующая теорема о свободных подгруппах для групп Артина с древесной структурой: пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы $G_{ij}, i \neq j$, выполнено равенство $gHg^{-1} \cap G_{ij} = E$, то H является свободной.

В процессе доказательства использовались приведение множества образующих к специальному множеству, представление подгруппы в виде свободного произведения групп, задание группы с помощью графа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия ТулГу. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 67 – 82.

2. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

3. Курош А. Г. Теория групп. М.: Физматлит, 2011.

4. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

5. Романовский Н. С. Теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением в многообразиях разрешимых и нильпотентных групп данных ступеней // Математический сборник. 1972. Т. 89 (131), №1 (9). С. 93–99.

6. Адян С. И., Дурнев В. Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // УМН. 2000. Т. 55, №2 (332). С. 3–94.

7. Классен В. П. Строение подгрупп с тождеством в группах с малой мерой налегания определяющих слов // Матем. Заметки. 1978. Т. 24, №3. С. 305–314.

8. Ваньков Б. П. Тождества в группах Гриндлингера // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1986. С. 66–71.

9. Губа В. С. Об условиях, при которых 2-порожденные подгруппы в группах с малым сокращением свободны // Известия вузов. Сер. Математика. 1986. № 7. С. 12–19.

10. Аржанцева Г. Н., Ольшанский А. Ю. Общность класса групп, в которых подгруппы с меньшим числом порождающих свободны // Матем. заметки. 1996. Т. 59, №4. С. 489–496.

11. Аржанцева Г. Н. О группах, в которых подгруппы с заданным числом порождающих свободны // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3, №3 . С. 675–683.

12. Kapovich I., Schup P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // Proc. London Math. Soc. 2004. Vol. 88, no 1. P. 89–113.

13. Безверхний В.Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, №1. С. 199–222.

14. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. 1983. С. 50–80.

15. Безверхний В.Н. Решение проблемы вхождения подгрупп в классе HNN-групп. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. 1981. С. 20–61.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 27.02.2014