

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-105-114

Обобщенные экстремальные задачи Юдина для многочленов¹

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Изучаются две экстремальные задачи В.А. Юдина для алгебраических многочленов в более общей постановке. В первой задаче среди многочленов с неотрицательными коэффициентами разложения по ортогональным многочленам на отрезке $[-1, 1]$, у которых несколько последовательных моментов и производных в точке -1 равны нулю, ищется многочлен с максимальным отрезком неотрицательности. Случаи решения задачи описываются в терминах свойства Крейна. Во второй задаче среди многочленов с нулевыми граничными условиями и нулевыми первыми двумя моментами на отрезке $[-1, 1]$ ищется многочлен с минимальным симметричным относительно нуля отрезком, на котором он неотрицателен, а вне него отрицателен. Для второй задачи получено полное решение.

Ключевые слова: весовая функция, ортогональные многочлены, моменты, граничные условия, экстремальные задачи.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

В. И. Иванов. Обобщенные экстремальные задачи Юдина для многочленов // Чебышевский сборник, , т. 23, вып. 4, с. 105–114.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-105-114

Generalized extremal Yudin problems for polynomials²

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

²The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Abstract

Two extremal problems of V.A. Yudin for polynomials in a more general setting are studied. In the first problem, among polynomials with nonnegative expansion coefficients in orthogonal polynomials on a segment $[-1, 1]$, for which several successive moments and derivatives at the point -1 are equal to zero, a polynomial with a maximum non-negativity segment is searched. The cases of the solving of the problem are described in terms of the Krein property. In the second problem, among polynomials with zero boundary conditions and zero first two moments on the segment $[-1, 1]$, a polynomial with a minimum segment symmetric about zero on which it is nonnegative and nonpositive outside is searched. For the second problem, a complete solution was obtained.

Keywords: weighted function, orthogonal polynomials, moments, boundary conditions, extremal problems.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

V.I. Ivanov, 2022, "Generalized extremal Yudin problems for polynomials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 105–114.

1. Введение

В 2022 году талантливому и самобытному математику В. А. Юдину исполнилось бы 75 лет. Важным направлением в его творчестве было исследование экстремального расположения точек на многообразиях в задачах дискретной математики и численного анализа. В этих исследованиях у него сложился весьма плодотворный метод постановки экстремальных задач для алгебраических многочленов, тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Ему не обязательно было решать эти задачи, для приложений важно было предложить экстремальную или близкую к ней функцию. Хотя решение этих задач имеет и самостоятельный интерес. В настоящей работе исследуются две задачи Юдина (см. [1, 2]) в более общей постановке.

Пусть $\sigma(x): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная неубывающая функция с бесконечным числом точек роста, $n, k \in \mathbb{Z}_+$, Π_n — множество алгебраических многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами, Π — множество всех алгебраических многочленов, $\mu_k(p) = \int_{-1}^1 x^k p(x) d\sigma(x)$ — k -й момент многочлена $p \in \Pi$ на $[-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1$, $\{U_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортогональных на $[-1, 1]$ относительно меры $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta d\sigma(x)$ и нормированных условием $U_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$, $\{t_{1,n}^{(\alpha, \beta)}(\sigma), \dots, t_{n,n}^{(\alpha, \beta)}(\sigma)\}$ — нули многочлена $U_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, занумерованные в порядке убывания. При $\alpha = \beta = 0$ верхние индексы опускаем. Если $\sigma(x) = x$, то получаем систему многочленов Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ (см. [3, 4]). Нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ обозначаем $\{t_{1,n}^{(\alpha, \beta)}, \dots, t_{n,n}^{(\alpha, \beta)}\}$.

Разложим многочлен $p \in \Pi$ в сумму Фурье по системе $\{U_n^{(\alpha, \beta)}\}$:

$$p(x) = \sum_{\nu} d_{\nu}^{(\alpha, \beta)} a_{\nu} U_{\nu}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad a_{\nu} = \int_{-1}^1 p(x) U_{\nu}^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} d\sigma(x), \quad (1)$$

где

$$(d_{\nu}^{(\alpha, \beta)})^{-1} = \int_{-1}^1 (U_{\nu}^{(\alpha, \beta)}(x))^2 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} d\sigma(x).$$

Пусть $\Pi_p(\{U_n^{(\alpha, \beta)}\})$ — множество многочленов, для которых в разложении (1) все коэффициенты $a_{\nu} \geq 0$. Для системы $\{U_n^{(\alpha, \beta)}\}$ выполнено свойство Крейна, если $U_k^{(\alpha, \beta)} U_l^{(\alpha, \beta)} \in \Pi_p(\{U_n^{(\alpha, \beta)}\})$

для любых $k, l \in \mathbb{N}$. Известно, что для многочленов Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ свойство Крейна выполняется, если $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ (см. [4, 1.5]).

Задача Юдина 1 [1]. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n \cap \Pi_p(\{U_n\})$, удовлетворяющих условию $\mu_0(p) = 0$, найти величину

$$B_n(\sigma) = \sup\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \geq 0, -1 \leq x \leq \lambda\}.$$

В задаче 1 В.А. Юдин [1] получил оценку $B_{2q}(\sigma) \leq t_{2,q+1}(\sigma)$ и в качестве экстремального предложил правильный многочлен (2). Для многих систем ортогональных многочленов задача 1 решена в [5].

ТЕОРЕМА А. Пусть $n = 2q$. Если для системы $\{U_n\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma) = t_{2,q+1}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{2q}^*(x) = \frac{U_{q+1}^2(x)}{(x - t_{1,q+1}(\sigma))(x - t_{2,q+1}(\sigma))}. \quad (2)$$

Пусть $n = 2q + 1$. Если для системы $\{U_n^{(0,1)}\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma) = t_{2,q+1}^{(0,1)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{2q+1}^*(x) = \frac{(1+x)(U_{q+1}^{(0,1)}(x))^2}{(x - t_{1,q+1}^{(0,1)}(\sigma))(x - t_{2,q+1}^{(0,1)}(\sigma))}.$$

Из теоремы А решение задачи 1 для многочленов Якоби $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ получается при $\alpha \geq \beta + 1$. Мы рассматриваем следующее обобщение задачи 1.

Обобщенная задача Юдина 1. Пусть $m, l \in \mathbb{Z}_+$. Среди всех многочленов

$$p \in \Pi_n \cap \Pi_p(\{U_n\}),$$

удовлетворяющих условиям

$$\mu_i(p) = 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad p^{(i)}(-1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, l-1,$$

найти величину

$$B_n(\sigma, m, l) = \sup\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \geq 0, -1 \leq x \leq \lambda\}.$$

Если $m = 0$ или $l = 0$, то соответствующих условий на многочлены в обобщенной задаче 1 нет. Так как нетривиальные многочлены из $\Pi_p(\{U_n\})$ в 1 принимают положительные значения, то в этой точке граничные условия не ставятся.

Случаи решения обобщенной задачи 1 содержатся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \leq q$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Если $n = 2q - m + 1$, для системы $\{U_n^{(0,l)}\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma, m, l) = t_{m+1,q+1}^{(0,l)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1+x)^l (U_{q+1}^{(0,l)}(x))^2}{(x - t_{1,q+1}^{(0,l)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(0,l)}(\sigma))}. \quad (3)$$

Если $n = 2q - m + 2$, для системы $\{U_n^{(0,l+1)}\}$ выполнено свойство Крейна, то

$$B_n(\sigma, m, l) = t_{m+1,q+1}^{(0,l+1)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1+x)^{l+1} (U_{q+1}^{(0,l+1)}(x))^2}{(x - t_{1,q+1}^{(0,l+1)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(0,l+1)}(\sigma))}. \quad (4)$$

Если $U_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби, то $U_n^{(0,l)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta+l)}(x)$ (см. [4, 1.5] и условие Крейна для системы $\{U_n^{(0,l)}\}$ выполнено при $\alpha \geq \beta + l$. Таким образом, для многочленов Якоби теорема 1 справедлива при $\alpha \geq \beta + l$, если $n = 2q - m + 1$, и при $\alpha \geq \beta + l + 1$, если $n = 2q - m + 2$.

Условия на системы ортогональных многочленов в теореме 1 еще далеки от окончательных. Например, при $n = 2q - m + 1$ и $m = q$,

$$p_n^*(x) = (1+x)^l U_{q+1}^{(0,l)}(x) \in \Pi_p(\{U_n\})$$

без каких-либо условий на систему, так как $(1+x)U_{q+1}^{(0,l)}(x) \in \Pi_p(\{U_n^{(0,l-1)}\})$ (см. [4, лемма 4.1]) и далее можно применить индукцию по l . Аналогичное утверждение верно и при $n = 2q - m + 2$, $m = q$.

Доказательство неотрицательности коэффициентов разложения многочленов (3), (4) основано на работе [6], в которой для любой системы ортогональных многочленов установлено включение

$$\frac{U_{q+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x - t_{1,q+1}^{(\alpha,\beta)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(\alpha,\beta)}(\sigma))} = \sum_{\nu=0}^{q-m} d_\nu a_\nu U_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \in \Pi_p(\{U_n\}). \quad (5)$$

Доказательство неотрицательности коэффициентов разложения многочленов по ортогональным многочленам или неотрицательности преобразования Фурье при интегральном представлении целых функций экспоненциального типа требует весьма тонкой техники. Наиболее развита эта техника для целых функций экспоненциального типа (см., например, работы [7, 8, 9]).

Задача Юдина 2 [2]. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-1}^1 x^j p(x) (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} dx = 0, \quad j = 0, 1, \quad d \geq 2,$$

найти величину

$$A_n(d) = \inf\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \leq 0, \lambda \leq |x| \leq 1; \quad p(x) \geq 0, 0 \leq |x| \leq \lambda\}.$$

В задаче 2 при $n = 4q - 2$ в качестве экстремального многочлена В.А. Юдин [2] предложил правильный многочлен

$$p_{4q-2}^*(x) = \frac{(P_{2q}^{(\frac{d-3}{2}, \frac{d-3}{2})}(x))^2}{(t_{q,2q}^{(\frac{d-3}{2}, \frac{d-3}{2})})^2 - x^2}.$$

Так как в задаче 2 допустимые многочлены могут иметь только одну переменную знака на $[0, 1]$, то в обобщении задачи 2 мы не можем усиливать условия ортогональности, но можем добавлять граничные условия.

Обобщенная задача Юдина 2. Пусть $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $\omega(x)$ — четная весовая функция, $d\sigma(x) = \omega(x) dx$. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \mu_0(p) = \mu_1(p) = 0, \quad p^{(i)}(-1) = p^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \\ p^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, l-1, \end{aligned} \quad (6)$$

найти величину

$$A_n(\sigma, k, l) = \inf\{\lambda \in [-1, 1]: p(x) \leq 0, \lambda \leq |x| \leq 1; \quad p(x) \geq 0, 0 \leq |x| \leq \lambda\}.$$

Пусть $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $d\sigma(x) = \omega(x) dx$, $\{R_n^{(k,l)}\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортогональных на $[-1, 1]$ относительно меры $(1-x^2)^k x^{2l} d\sigma(x)$ и нормированных условием $R_n^{(k,l)}(1) = 1$, $\{\rho_{1,n}^{(k,l)}(\sigma), \dots, \rho_{n,n}^{(k,l)}(\sigma)\}$ — нули многочлена $R_n^{(k,l)}(x)$, занумерованные в порядке убывания. При $l = 0$, $R_n^{(k,0)}(x) = U_n^{(k,k)}(x)$ и $\rho_{i,n}^{(k,0)}(\sigma) = t_{i,n}^{(k,k)}(\sigma)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 2$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^k x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

Если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2]$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] + 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^{k+1} x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $n = 4q - 2$ или $n = 4q - 1$, то

$$A_n(\sigma, 0, 0) = t_{q,2q}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{U_{2q}^2(x)}{t_{q,2q}^2(\sigma) - x^2}.$$

Если $n = 4q$ или $n = 4q + 1$, то

$$A_n(\sigma, 0, 0) = t_{q,2q}^{(1,1)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)(U_{2q}^{(1,1)}(x))^2}{(t_{q,2q}^{(1,1)}(\sigma))^2 - x^2}.$$

2. Доказательство теорем 1,2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $n = 2q - m + 1$ и для системы $\{U_n^{(0,l)}\}$ выполнено свойство Крейна. В [10] решена обобщенная экстремальная задача 1 без условия принадлежности многочленов множеству $\Pi_p(\{U_n\})$. Многочлен (3) является экстремальным в ней, поэтому в обобщенной задаче 1 справедлива оценка $B_n(\sigma, m, l) \leq t_{m+1,q+1}^{(0,l)}(\sigma)$. Остается проверить, что многочлен (3) принадлежит множеству $\Pi_p(\{U_n\})$. Согласно (5) многочлен

$$\frac{U_{q+1}^{(0,l)}(x)}{(x - t_{1,q+1}^{(0,l)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(0,l)}(\sigma))} \in \Pi_p(\{U_n^{(0,l)}\}).$$

Применяя свойство Крейна, получим, что и многочлен

$$\frac{(U_{q+1}^{(0,l)}(x))^2}{(x - t_{1,q+1}^{(0,l)}(\sigma)) \cdots (x - t_{m+1,q+1}^{(0,l)}(\sigma))} \in \Pi_p(\{U_n^{(0,l)}\}).$$

Остается заметить, что $(1+x)^l U_n^{(0,l)}(x) \in \Pi_p(\{U_n\})$.

Случай $n = 2q - m + 2$ разбирается аналогично с заменой l на $l + 1$. Теорема 1 доказана.

□

Пусть $\omega(t)$ — интегрируемая неотрицательная весовая функция на $[0, 1]$, $d\sigma(t) = \omega(t) dt$, $\{V_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортогональных на $[0, 1]$ относительно меры $(1-t)^{\alpha} t^{\beta} d\sigma(t)$ и нормированных условием $V_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$, $\{\tau_{1,n}^{(\alpha,\beta)}(\sigma), \dots, \tau_{n,n}^{(\alpha,\beta)}(\sigma)\}$ — нули многочлена $V_n^{(\alpha,\beta)}(t)$, занумерованные в порядке убывания.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Задача 3. Пусть $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Среди всех многочленов $p \in \Pi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 p(t) d\sigma(t) = 0, \quad p^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad p^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, l-1,$$

найти величину

$$C_n(\sigma, k, l) = \inf\{\mu \in [0, 1]: p(t) \leq 0, \quad \mu \leq t \leq 1; \quad p(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \mu\}.$$

Для ее решения квадратурную формулу Маркова–Эрмита на отрезке $[-1, 1]$ (см. [10]) запишем для отрезка $[0, 1]$.

ЛЕММА. Пусть $N = k + l$. Для любого многочлена $p \in \Pi_{2q+N-1}$ справедлива квадратурная формула Маркова–Эрмита

$$\int_0^1 p(t) d\sigma(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{i,1} p^{(i)}(1) + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_{i,2} p^{(i)}(0) + \sum_{i=1}^q \gamma_i p(\tau_{i,q}^{(k,l)}(\sigma)), \quad (7)$$

где $(-1)^{k-1} \gamma_{k-1,1} > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, q$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N = k + l$. Если $n = 2q + N - 1$, то

$$C_n(\sigma, k, l) = \tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(t) = \frac{(1-t)^k t^l (V_q^{(k,l)}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma) - t}. \quad (8)$$

Если $n = 2q + N$, то

$$C_n(\sigma, k, l) = \tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(t) = \frac{(1-t)^{k+1} t^l (V_q^{(k+1,l)}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma) - t}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2q + N - 1$, $p \in \Pi_n$ — допустимый в задаче многочлен. Предположим, что $C_n(\sigma, k, l) < \tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma)$. Применяя квадратурную формулу Маркова Эрмита (7), получим

$$0 = \int_0^1 p(t) d\sigma(t) = \sum_{i=1}^q \gamma_i p(\tau_{i,q}^{(k,l)}(\sigma)) \leq 0. \quad (10)$$

Отсюда $\tau_{i,q}^{(k,l)}(\sigma)$, $i = 1, \dots, q$, — двойные нули многочлена $p(t)$ и он имеет $2q + N$ нулей. Полученное противоречие доказывает неравенство $C_n(\sigma, k, l) \geq \tau_{q,q}^{(k,l)}(\sigma)$. Остается заметить, что многочлен (8) допустимый, например, ортогональность единице вытекает из (10) и он это неравенство превращает в равенство.

Пусть $n = 2q + k + l$, $p \in \Pi_n$ — допустимый в задаче многочлен. Предположим, что $C_n(\sigma, k, l) < \tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma)$. Так как

$$p(t) = \frac{p^{(k)}(1)}{k!} (t-1)^k (1+o(1)) \quad \text{при } t \rightarrow 1,$$

то из условия $p(t) \leq 0$ в левой полуокрестности 1 вытекает $(-1)^k p^{(k)}(1) \leq 0$, поэтому применяя квадратурную формулу Маркова Эрмита для $N = (k+1) + l$ и учитывая, что $\text{sign } \gamma_{k,1} = (-1)^k$, получим

$$0 = \int_0^1 p(t) d\sigma(t) = \gamma_{k,1} p^{(k)}(1) + \sum_{i=1}^q \gamma_i p(\tau_{i,q}^{(k+1,l)}(\sigma)) \leq 0.$$

Отсюда $\tau_{i,q}^{(k+1,l)}(\sigma)$, $i = 1, \dots, q$, — двойные нули многочлена $p(t)$, $p^{(k)}(1) = 0$, и он имеет $2q + N + 1$ нулей. Полученное противоречие доказывает неравенство $C_n(\sigma, k, l) \geq \tau_{q,q}^{(k+1,l)}(\sigma)$. Остается заметить, что многочлен (9) допустимый и он это неравенство превращает в равенство. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если для многочлена $p(x) \in \Pi_n$ выполнены условия (6) и $p(x) \leq 0$ при $\lambda \leq |x| \leq 1$, $p(x) \geq 0$ при $0 \leq |x| \leq \lambda$, то и для многочлена $p(-x)$ выполнены условия (6) и $p(-x) \leq 0$ при $\lambda \leq |x| \leq 1$, $p(-x) \geq 0$ при $0 \leq |x| \leq \lambda$. Аналогичные свойства выполнены и для многочлена $p_e(x) = (p(x) + p(-x))/2$. Следовательно, в обобщенной задаче 2 можно ограничиться четными многочленами $p(x) = q(x^2)$, $q \in \Pi_{[n/2]}$. Условия (6) для многочлена $q(t)$ примут вид:

$$\int_{-1}^1 p(x^2) \omega(x) dx = \int_0^1 q(t) \omega(t^{1/2}) t^{-1/2} dt = 0,$$

$$q^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad q^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, [(l+1)/2] - 1,$$

$$q(t) \leq 0 \quad \text{при } \sqrt{\lambda} \leq t \leq 1, \quad q(t) \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq \sqrt{\lambda}.$$

Таким образом,

$$A_n^2(\sigma, k, l) = C_{[n/2]}(\sigma_1, k, [(l+1)/2]),$$

где

$$d\sigma_1(t) = \omega(t^{1/2})t^{-1/2} dt.$$

Так как при $s \neq r$

$$\int_0^1 V_s^{(k,l)}(t)V_r^{(k,l)}(t)\omega(t^{1/2})t^{-1/2} dt = \int_{-1}^1 V_s^{(k,l)}(x^2)V_r^{(k,l)}(x^2)\omega(x) dx = 0,$$

то

$$R_{2s}^{(k,l)}(x) = V_s^{(k,l)}(x^2) \quad \text{и} \quad (\rho_{i,2s}^{(k,l)}(\sigma))^2 = \tau_{i,s}^{(k,l)}(\sigma_1), \quad i = 1, \dots, s.$$

Остается применить теорему 3.

Если $[n/2] = 2q + k + [(l+1)/2] - 1$, то $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 2$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 1$. По теореме 3

$$C_{[\frac{n}{2}]}(\sigma_1, k, [(l+1)/2]) = \tau_{q,q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma_1) = (\rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma))^2.$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{[\frac{n}{2}]}^*(t) = \frac{(1-t)^k t^{[(l+1)/2]} (V_q^{(k,[(l+1)/2])}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma_1) - t}.$$

Следовательно, если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 2$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] - 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^k x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

Если $[n/2] = 2q + k + [(l+1)/2]$, то $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2]$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] + 1$. По теореме 3

$$C_{[\frac{n}{2}]}(\sigma_1, k, [(l+1)/2]) = \tau_{q,q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma_1) = (\rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma))^2.$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_{[\frac{n}{2}]}^*(t) = \frac{(1-t)^{k+1} t^{[(l+1)/2]} (V_q^{(k+1,[(l+1)/2])}(t))^2}{\tau_{q,q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma_1) - t}.$$

Следовательно, если $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2]$ или $n = 4q + 2k + 2[(l+1)/2] + 1$, то

$$A_n(\sigma, k, l) = \rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma).$$

Экстремальный многочлен имеет вид

$$p_n^*(x) = \frac{(1-x^2)^{k+1} x^{2[(l+1)/2]} (R_{2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(x))^2}{(\rho_{q,2q}^{(k+1,[(l+1)/2])}(\sigma))^2 - x^2}.$$

Теорема 2 доказана.

3. Заключение

В [5] первая обобщенная задача Юдина решена также для многочленов Гегенбауэра ($\alpha = \beta$), если $l = 0$, $m = 1$. Решение основано на том, что при $m = 1$ в разложении (5) коэффициенты a_ν не только положительны, но и монотонно убывают. Было бы интересно доказать это свойство коэффициентов в разложении (5) для произвольного m .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин В. А. Код и дизайн // Дискрет. матем. 1997. Т. 9, № 2. С. 3–11.
2. Юдин В. А. Распределение точек дизайна на сфере // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 5. С. 205–224.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
4. Горбачев Д. В, Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2022. 196 с.
5. Горбачев Д. В, Иванов В. И. Одна экстремальная задача для многочленов, связанная с кодами и дизайнами // Матем. заметки. 2000. Т. 67, № 4. С. 508–513.
6. Cohn H., Kumar A. Universally optimal distribution of points on spheres // J. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 20, no. 1. P. 99–148.
7. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, no. 2. P. 249–252.
8. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, no. 2. P. 253–257.
9. Gorbachev D., Ivanov V. I., Tikhonov S. Uncertainty Principles for Eventually Constant Sign Bandlimited Functions // SIAM J. Math. Anal. 2020. Vol. 52, no. 5. P. 4751–4782.
10. Иванов В. И. Экстремальные задачи Юдина–Эрмита для многочленов // Матем. заметки. 2021. Т. 110, № 5. С. 789–795.

REFERENCES

1. Yudin V. A., 1997, "Code and design", *Discrete Math. Appl.*, vol. 7, no. 2, pp. 147–155.
2. Yudin V. A., 2005, "Distribution of the points of a design on the sphere", *Izv. Math.*, vol. 69, no. 5, pp. 1061–1079.
3. Szegő G., 1959, "Orthogonal polynomials", *New York: Amer. Math. Soc.*, 440 p.
4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2022, "Lectures on quadrature formulas and their application in extremal problems", *Tula: Tula State University*, 196 p. (In Russ.)
5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2000, "An extremum problem for polynomials related to codes and designs", *Math. Notes.*, vol. 67, no. 4, pp. 433–438.
6. Cohn H., Kumar A., 2000, "Universally optimal distribution of points on spheres", *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 20, no. 1, pp. 99–148.

7. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2, pp. 249–252.
8. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no. 2. pp. 253–257.
9. Gorbachev D., Ivanov V.I., Tikhonov S., 2020, "Uncertainty Principles for Eventually Constant Sign Bandlimited Functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 52, no. 5. pp. 4751–4782..
10. Ivanov V.I., 2021, "Yudin–Hermite Extremal Problems for Polynomials", *Math. Notes.*, vol. 110, no. 5, pp. 799–805.

Получено: 15.09.2022

Принято в печать: 8.12.2022