ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-92-104

Лебегова ограниченность потенциала Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье с радиальными кусочно-степенными весами[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом $|x|^{-1}v_k(x)$, где $v_k(x)$ — вес Данкля, действует $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье. Гармонический анализ в этих пространствах важен, в частности, в задачах квантовой механики. Недавно для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье был определен потенциал Рисса и для него доказано (L^p, L^q)-неравенство с радиальными степенными весами, являющееся аналогом известного неравенства Стейна — Вейса для классического потенциала Рисса. В работе этот результат обобщается на случай радиальных кусочно-степенных весов. Ранее аналогичное неравенство было доказано для потенциала Данкля — Рисса.

Ключевые слова: $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье, потенциал Рисса.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Лебегова ограниченность потенциала Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье с радиальными кусочно-степенными весами // Чебышевский сборник, , т. 23, вып. 4, с. 92–104.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-92-104

Lebesgue boundedness of Riesz potential for $(k,1)$-generalized Fourier transform with radial piecewise power weights[2]

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, `https://rscf.ru/project/18-11-00199/`.

[2]The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 18-11-00199, `https://rscf.ru/project/18-11-00199/`.

Abstract

In spaces with weight $|x|^{-1}v_k(x)$, where $v_k(x)$ is the Dunkl weight, there is the $(k,1)$-generalized Fourier transform. Harmonic analysis in these spaces is important, in particular, in problems of quantum mechanics. Recently, for the $(k,1)$-generalized Fourier transform, the Riesz potential was defined and the (L^p, L^q)-inequality with radial power weights was proved for it, which is an analogue of the well-known Stein–Weiss inequality for the classical Riesz potential and the Dunkl–Riesz potential. In the paper, this result is generalized to the case of radial piecewise power weights. Previously, a similar inequality was proved for the Dunkl–Riesz potential.

Keywords: $(k,1)$-generalized Fourier transform, Riesz potential.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. I. Ivanov, 2022, “Lebesgue boundedness of Riesz potential for $(k,1)$-generalized Fourier transform with radial piecewise power weights”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 92–104.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\mathbb{S}^{d-1}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^d$, Δ — оператор Лапласа, $d\mu(x)=(2\pi)^{-d/2}\,dx$ — нормированная мера Лебега, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1\le p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца,

$$\mathcal{F}(y)=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dx$$

— преобразование Фурье.

Введем обозначение $A\lesssim B$, если $A\le CB$ с константой $C>0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A\asymp B$, если $A\lesssim B$ и $B\lesssim A$. Как обычно, для $p>1$, $p'=\frac{p}{p-1}$ — сопряженный гельдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E.

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x)=(\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|x-y|^{\alpha-d}\,d\mu(y)=(\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d}\,d\mu(y), \tag{1}$$

где $0<\alpha<d$, $\gamma_\alpha=2^{\alpha-d/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d-\alpha)/2)$, и $\tau^yf(x)=f(x+y)$ — оператор сдвига.

Формулы для преобразований Фурье

$$\mathcal{F}(I_\alpha f)=|\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}(f),\quad \mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2}f)=|\cdot|^{\alpha}\mathcal{F}(f),$$

указывают, что потенциал Рисса (1) является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

(L^p,L^q)-ограниченность потенциала Рисса с радиальными степенными весами записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha f(x)\big\|_q\le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}f(x)\big\|_p,\quad 1<p\leqslant q<\infty.$$

Необходимые и достаточные условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ известны.

Теорема A. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $0<\alpha<d$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *конечна тогда и только тогда, когда* $\gamma<\frac{d}{q}$, $\beta<\frac{d}{p'}$, $\alpha\geqslant d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$ *и* $\alpha-\gamma-\beta=d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

Достаточность условий в теореме A была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвудом [1] для $d=1$, С.Л. Соболевым [2] для $d>1$ и $\gamma=\beta=0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом [3] в общем случае. Необходимость условий в теореме A установлена в [4].

Одним из важных обобщений преобразования Фурье является преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ (см. [5, 6]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля определили С. Тангавелу и Ю. Шу [7].

Пусть $R\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R, $G(R)\subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a\colon a\in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $(a,x)=0$, $k\colon R\to\mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G.

Пусть

$$v_k(x)=\prod_{a\in R_+}|(a,x)|^{2k(a)},\quad d\mu_k(x)=c_kv_k(x)dx$$

— вес и мера Данкля, где $c_k^{-1}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $\langle k\rangle=\sum_{a\in R_+}k(a)$, $\lambda_k=d/2-1+\langle k\rangle$, $d_k=2\lambda_k+2$ — обобщенная размерность пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $v_k(x)$, $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\le p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\mu_k}=\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu_k\Bigr)^{1/p}<\infty$,

$$T_jf(x)=D_jf(x)+\sum_{a\in R_+}k(a)(a,e_j)\,\frac{f(x)-f(\sigma_ax)}{(a,x)},\quad j=1,\dots,d,$$

—дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k=\sum_{j=1}^dT_j^2$ — лапласиан Данкля.

Обобщенная экспонента или ядро Данкля $e_k(x,y)$ является единственным решением системы

$$T_jf(x)=iy_jf(x),\quad j=1,\dots,d,\qquad f(0)=1.$$

Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i(x,y)}$.

Для $f\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathcal{F}_k(f)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x).$$

Если $k\equiv0$, то $\mathcal{F}_0$ совпадает с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$.

М. Реслер (см. [6]) определила оператор обобщенного сдвига τ^y, $y\in\mathbb{R}^d$, для преобразования Данкля равенством

$$\mathcal{F}_k(\tau^yf)(z)=e_k(y,z)\mathcal{F}_k(f)(z),\quad f\in L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k),$$

или

$$\tau^yf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e_k(y,z)e_k(x,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z).$$

Если $k\equiv0$, то $\tau^yf(x)=f(x+y)$ совпадает с обычным сдвигом.

С. Тангавелу и Ю. Шу [7] определили потенциал Данкля–Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор

$$I_\alpha^kf(x)=(\gamma_\alpha^k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d_k}\,d\mu_k(y),\tag{2}$$

где $0<\alpha<d_k$ и $\gamma_\alpha^k=2^{\alpha-d_k/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d_k-\alpha)/2)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I_\alpha^kf)=|\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)$.

Неравенство Стейна–Вейса для потенциала Данкля–Рисса и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ примет вид

$$\big\||x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)\big\||x|^{\beta} f(x)\big\|_{p,d\mu_k}.$$

Аналог теоремы А для потенциала (2) установлен в [8, 9]. Там же можно найти предшествующие результаты.

Теорема B. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$ *и* $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

Вопрос о необходимости условия $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ при $p<q$ и функции кратности $k \not\equiv 0$ остается открытым.

Как видим, в теореме B размерность d заменяется на обобщенную размерность d_k.

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \leqslant 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2}\chi_{B_1^c}(x), \quad u_\beta(x) = |x|^{\beta_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2}\chi_{B_1^c}(x)$$

— кусочно-степенные весовые функции. Рассмотрим для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ неравенство

$$\big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x) I_\alpha^k f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \le \mathbf{c}(\alpha,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},p,q,d,k)\big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x) f(x)\big\|_{p,d\mu_k} \tag{3}$$

с константой $\mathbf{c}(\alpha,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},p,q,d,k)$ и $1 < p \le q < \infty$.

В [4] доказано следующее утверждение.

Теорема C. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},p,q,d,k)$ *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p},$$
$$\gamma_1 + \beta_1 \leqslant \alpha - d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2.$$

Дальнейшее обобщение преобразования Фурье и Данкля получено в [10]. Бен Саид, Кобаяши и Орстед [10] определили a-деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a} = |x|^{2-a}\Delta_k - |x|^a, \quad a > 0,$$

и двупараметрическое семейство унитарных операторов $\mathcal{F}_{k,a}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\, d\mu_{k,a}\bigg)^{1/p}, \quad p = 2,$$

названное (k,a)-обобщенным преобразованием Фурье. В спектральной форме

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,(2\lambda_k + a)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,\Delta_{k,a}\Big), \tag{4}$$

где

$$d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a} v_{k,a}(x)\,dx, \quad v_{k,a}(x) = |x|^{a-2} v_k(x), \quad c_{k,a}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^a/a} v_{k,a}(x)\,dx.$$

Число $d_{k,a} = 2\lambda_k + a = d + 2\langle k\rangle + a - 2$ называют обобщенной размерностью пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $v_{k,a}(x)$.

Если $a = 2$, то (4) — преобразование Данкля. Если $a = 2$ и $k \equiv 0$, то (4) — преобразование Фурье. Если $a \neq 2$, то (4) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье.

Важный случай обобщенного преобразования Фурье получается при $a = 1$. Оно может быть записано как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y)f(y)\,d\mu_{k,1}(y)$$

с непрерывным симметричным ядром $B_k(x,y)$.

Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$ и $f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ определен Бен Саидом и Делеавалом [11] (см. также [12]) равенством:

$$\mathcal{F}_{k,1}(\tau^y f)(z) = B_k(y,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z).$$

Но он также как и оператор сдвига для преобразования Данкля не является положительным оператором и его L^p-ограниченность известна только при $p = 2$.

В [13, 14] в качестве оператора сдвига предложен оператор среднего значения τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\,d\sigma_{k,1}(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

где $d\sigma_{k,1}(y') = a_{k,1}v_{k,1}(y')\,dy'$ — вероятностная мера на сфере. В [13] доказано, что оператор (5) положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Здесь под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ понимается пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup|f(x)|$.

Потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ определен в [15] как интегральный оператор

$$I_\alpha^{k,1} f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x)|y|^{\alpha - d_{k,1}}\,d\mu_{k,1}(y), \tag{6}$$

где $0 < \alpha < d_{k,1}$ и $\gamma_\alpha^{k,1} = \Gamma(\alpha)/\Gamma(d_{k,1} - \alpha)$.

Как для потенциалов Рисса и Данкля–Рисса для него справедливо соотношение

$$\mathcal{F}_{k,1}(I_\alpha^{k,1} f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f).$$

Потенциал (6) может быть записан с помощью оператора сдвига (5)

$$I_\alpha^{k,1} f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} \int_0^\infty T^t f(x) t^{\alpha - d_{k,1}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t), \tag{7}$$

где

$$d\nu_{\lambda_k,1}(r) = b_{\lambda_k,1} r^{2\lambda_k}\,dr, \quad b_{\lambda_k,1}^{-1} = \int_0^\infty e^{-r} r^{2\lambda_k}\,dr = \Gamma(2\lambda_k + 1).$$

Из (7) следует положительность потенциала (6).

Неравенство Стейна–Вейса для потенциала (6) и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ имеет вид

$$\big\||x|^{-\gamma} I_\alpha^{k,1} f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \leq \mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)\big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{8}$$

В [15] доказано утверждение, аналогичное теореме B, только обобщенная размерность d_k в нем заменяется на обобщенную размерность $d_{k,1}$.

Теорема D. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $d_{k,1} > 1$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_{k,1}$. *Константа* $\mathbf{c_1}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d, k)$ *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$, $\alpha \geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma < \frac{d_{k,1}}{q}$, $\beta < \frac{d_{k,1}}{p'}$, *и* $\alpha - \gamma - \beta = d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$.

Наша цель — доказать аналог теоремы D для кусочно-степенных весов. Запишем аналог неравенства (8) для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x) I_\alpha^{k,1} f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \leq \mathbf{c}_1(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, p, q, d, k)\big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x) f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $d_{k,1} > 1$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_{k,1}$. *Константа* $\mathbf{c}_1(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, p, q, d, k)$ *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$, $\alpha \geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \gamma_1 < \frac{d_{k,1}}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_{k,1}}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_{k,1}}{p}, \\ \gamma_1 + \beta_1 \leqslant \alpha - d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2. \end{gathered} \tag{10}$$

Замечание. Теоремы D и 1 справедливы и при $d_{k,1} = 1$, то есть в этих теоремах можно предполагать $d_{k,1} \geqslant 1$.

2. Представление потенциала Рисса для $(k, 1)$-обобщенного преобразования Фурье

Потенциал Рисса (6) для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ можно записать в виде

$$I_\alpha^{k,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \Phi_\alpha(x, y)\, d\mu_{k,1}(y), \tag{11}$$

где

$$\Phi_\alpha(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{d_{k,1} - \alpha - 1} \tau^x(e^{-s|\cdot|})(y)\, ds \tag{12}$$

(см. [15]).

Лемма 1 [15]. *Для ядра* $\Phi_\alpha(x, y)$ *выполняются следующие свойства:*

1. $\Phi_\alpha(x, y) = \Phi_\alpha(y, x)$;

2. $\Phi_\alpha(rx', ty') = r^{\alpha - d_{k,1}} \Phi_\alpha(x', (t/r)y')$;

3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_\alpha(rx', ty')\, d\sigma_{k,1}(x') = (\Phi_\alpha)_0(r, t)$, *где*

$$(\Phi_\alpha)_0(r, t) := (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} c_{2\lambda_k} \int_0^\pi (r + t - 2\sqrt{rt}\cos\varphi)^{\alpha - d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1} - 2}\varphi\, d\varphi;$$

4. $\Phi_\alpha(x, y) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \tau^y(|\cdot|^{\alpha - d_{k,1}})(x)$ *или, эквивалентно,*

$$\gamma_\alpha^{k,1} \Phi_\alpha(x, y) = V_k\Big(\int_{-1}^1 \Big(|x| + |y| - \sqrt{2|x||y|(1 + \langle x', \cdot\rangle)}\,u\Big)^{\alpha - d_{k,1}} d\psi_{\lambda_k - 1/2}(u)\Big)(y'),$$

где
$$c_\lambda=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)},\quad d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)=c_{\lambda_k-1/2}(1-u^2)^{\lambda_k-1}\,du,$$
V_k — положительный оператор сплетения в гармоническом анализе Данкля, имеющий представление
$$V_kf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\xi)\,d\mu_x^k(\xi)$$
с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты
$$O^x=\{gx\colon g\in G\}$$
(см. [6]).

3. Лебегова ограниченность операторов Харди и Беллмана с радиальными кусочно-степенными весами

Изучим (L^p,L^q)-ограниченность с радиальными кусочно-степенными весами вспомогательных операторов Харди и Беллмана:
$$Hf(x)=\int_{|y|\leqslant|x|}f(y)\,d\mu_{k,1}(y),\quad Bf(x)=\int_{|y|\geqslant|x|}f(y)\,d\mu_{k,1}(y).$$

Нас интересуют неравенства для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
$$\big\|u_{-\mathbf{a}}(x)Hf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}}\le\mathbf{c}_H(\mathbf{a},\mathbf{b},p,q,d,k)\big\|u_{\mathbf{b}}(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}},$$
$$\big\|u_{-\mathbf{a}}(x)Bf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}}\le\mathbf{c}_B(\mathbf{a},\mathbf{b},p,q,d,k)\big\|u_{\mathbf{b}}(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}$$
с конечными константами $\mathbf{c}_H(\mathbf{a},\mathbf{b},p,q,d,k)$, $\mathbf{c}_B(\mathbf{a},\mathbf{b},p,q,d,k)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Теорема 2. *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Константа $\mathbf{c}_H(\mathbf{a},\mathbf{b},p,q,d,k)$ конечна тогда и только тогда, когда*
$$b_1<\frac{d_{k,1}}{p'},\quad a_2>\frac{d_{k,1}}{q},\quad a_1+b_1\leqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)\leqslant a_2+b_2. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $r=|x|$. Радиальную функцию $u_{-\mathbf{a}}(x)$ можно записать так
$$u_{-\mathbf{a}}(x)=|x|^{-a_1}\chi_{B_1}(x)+|x|^{-a_2}\chi_{B_1^c}(x)=r^{-a_1}\chi_{[0,1]}(r)+r^{-a_2}\chi_{[1,\infty)}(r)=(u_{-\mathbf{a}})_0(r).$$

В [4] установлено, что при доказательстве неравенств для оператора Харди с радиальными весами достаточно ограничиться радиальными функциями. На радиальных функциях мы приходим к эквивалентному неравенству
$$\Big(\int_0^\infty\Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}}(u_{-\mathbf{a}})_0(r)\int_0^r f_0(t)\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q}$$
$$\lesssim\mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)\Big(\int_0^\infty\Big(r^{-\frac{2\lambda_k}{p'}}(u_{\mathbf{b}})_0(r)f_0(r)\Big)^p dr\Big)^{1/p}.$$
Необходимое и достаточное условие конечности константы в последнем неравенстве известно (см., например, [16], [17, Section 1], [18, Introduction]):
$$\sup_{0<r<\infty}A(r)=\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_r^\infty\Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}}(u_{-\mathbf{a}})_0(r)\Big)^q dr\Big)^{\frac1q}\Big(\int_0^r\Big(r^{-\frac{2\lambda_k}{p'}}(u_{\mathbf{b}})_0(r)\Big)^{-p'}dr\Big)^{\frac{1}{p'}}<\infty.$$

Если $0<r\leqslant 1$, то

$$A(r)\asymp\Big(\int_r^1 t^{-a_1q+2\lambda_k}\,dt+\int_1^\infty t^{-a_2q+2\lambda_k}\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_0^r t^{-b_1p'+2\lambda_k}\,dt\Big)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-a_2q+2\lambda_k}\,dt<\infty,\quad \int_0^1 t^{-b_1p'+2\lambda_k}\,dt<\infty,$$

или $a_2>\frac{d_{k,1}}{q}$, $b_1<\frac{d_{k,1}}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r)\asymp r^{-b_1+d_{k,1}/p'}\Big(1+r^{-a_1+d_{k,1}/q}\Big)=r^{-b_1+d_{k,1}/p'}+r^{-a_1-b_1+d_{k,1}(1/p'+1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0<r\leqslant 1}A(r)$ вытекает условие $a_1+b_1\leqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)$.

Если $r\geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}A(r)&\asymp\Big(\int_r^\infty t^{-a_2q+2\lambda_{k,1}}\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_0^1 t^{-b_1p'+2\lambda_{k,1}}\,dt+\int_1^r t^{-b_2p'+2\lambda_{k,1}}\,dt\Big)^{1/p'}\\&\asymp r^{-a_2+d_{k,1}/q}\Big(1+r^{-b_2+d_{k,1}/p'}\Big)=r^{-\gamma_2+d_{k,1}/q}+r^{-a_2-b_2+d_{k,1}(1/p'+1/q)}.\end{aligned}$$

Из конечности $\sup_{r\geqslant 1}A(r)$ вытекает условие $a_2+b_2\geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)$.

Простой анализ полученных условий приводит к (13). $\square$

Теорема 3. *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Константа $\mathbf{c}_B(\mathbf{a},\mathbf{b},p,q,d,k)$ конечна тогда и только тогда, когда*

$$b_2>\frac{d_{k,1}}{p'},\quad a_1<\frac{d_{k,1}}{q},\quad a_1+b_1\leqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)\leqslant a_2+b_2. \tag{14}$$

Доказательство. Проводится аналогично. Необходимое и достаточное условие конечности константы в неравенстве для оператора Беллмана (см., например, [16], [17, Section 1], [18, Introduction]) будет выглядеть так

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_0^r\Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}}(u_{-\mathbf{a}})_0(r)\Big)^q\,dr\Big)^{1/q}\Big(\int_r^\infty\Big(r^{-\frac{2\lambda_k}{p'}}(u_{\mathbf{b}})_0(r)\Big)^{-p'}\,dr\Big)^{1/p'}<\infty.$$

Если $0<r\leqslant 1$, то

$$A(r)\asymp\Big(\int_0^r t^{-a_1q+2\lambda_k}\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_r^1 t^{-b_1p'+2\lambda_k}\,dt+\int_1^\infty t^{-b_2p'+2\lambda_k}\,dt\Big)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-b_2p'+2\lambda_k}\,dt<\infty,\quad \int_0^1 t^{-a_1q+2\lambda_k}\,dt<\infty,$$

или $a_1<\frac{d_{k,1}}{q}$, $b_2>\frac{d_{k,1}}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r)\asymp r^{-a_1+d_{k,1}/q}\Big(1+r^{-b_1+d_{k,1}/p'}\Big)=r^{-a_1+d_{k,1}/p'}+r^{-a_1-b_1+d_{k,1}(1/p'+1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0<r\leqslant 1}A(r)$ вытекает условие $a_1+b_1\leqslant d_k\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)$.

Если $r \geqslant 1$, то

$$A(r) \asymp \Big(\int_0^1 t^{-a_1q+2\lambda_{k,1}}\,dt + \int_1^r t^{-a_1q+2\lambda_{k,1}}\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_r^\infty t^{-b_2p'+2\lambda_{k,1}}\,dt\Big)^{1/p'}$$
$$\asymp r^{-b_2+d_{k,1}/p'}\Big(1+r^{-a_2+d_{k,1}/q}\Big) = r^{-b_2+d_{k,1}/q} + r^{-a_2-b_2+d_{k,1}(1/p'+1/q)}.$$

Из конечности $\sup_{r\geqslant 1} A(r)$ вытекает условие $a_2+b_2 \geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big)$.

Простой анализ полученных условий приводит к (14). $\square$

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \geqslant 0$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_{k,1}$ и выполнены условия (10) теоремы 1.

Разобъем оператор (11) с ядром (12) на сумму трех линейных операторов

$$I_\alpha^k f(x) = J_1f(x) + J_2f(x) + J_3f(x),$$

где

$$J_1f(x) = \int_{|y|\leqslant|x|/2} f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_{k,1}(y), \quad J_2f(x) = \int_{|y|\geqslant 2|x|} f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_{k,1}(y),$$

$$J_3f(x) = \int_{|x|/2\leqslant|y|\leqslant 2|x|} f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_{k,1}(y).$$

Оценка J_1f. Так как

$$(\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|})^2 \leqslant |x|^2+|y|^2-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u \leqslant (\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^2,$$

то при $|y| \leqslant |x|/2$ из свойства 4 леммы1 $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |x|^{\alpha-d_{k,1}}$. Следовательно,

$$J_1f(x) \asymp |x|^{\alpha-d_{k,1}} \int_{|y|\leqslant|x|/2} f(y)\,d\mu_{k,1}(y) = |x|^{\alpha-d_{k,1}} Hf(x/2).$$

Кусочно-степенной вес обладает слабой однородностью

$$c_1(\lambda)u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x) \leqslant u_{-\boldsymbol{\gamma}}(\lambda x) \leqslant c_2(\lambda)u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x), \quad \lambda > 0,$$

поэтому по теореме 2

$$\big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)J_1f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \asymp \big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)|x|^{\alpha-d_{k,1}}Hf(x/2)\big\|_{q,d\mu_{k,1}}$$
$$\asymp \big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)|x|^{\alpha-d_{k,1}}Hf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}$$

тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad \alpha-\gamma_2 < \frac{d_{k,1}}{q'}, \quad \gamma_1+\beta_1 \leqslant \alpha - d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2+\beta_2.$$

Оценка J_2f. Аналогично, при $|y| \geqslant 2|x|$, $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |y|^{\alpha-d_{k,1}}$. Следовательно,

$$J_2f(x) \asymp \int_{|y|\geqslant 2|x|} f(y)|y|^{\alpha-d_{k,1}}\,d\mu_{k,1}(y) = \int_{|y|\geqslant 2|x|} g(y)\,d\mu_{k,1}(y) = Bg(2x),$$

где $g(y) = f(y)|y|^{\alpha - d_{k,1}}$. Необходимо найти условия, когда имеет место неравенство

$$\big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)Bg(2x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x)|x|^{d_{k,1}-\alpha}g(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

По теореме 3

$$\begin{aligned}\big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)Bg(2x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} &\asymp \big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)Bg(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}}\\ &\lesssim \big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x)|x|^{d_{k,1}-\alpha}g(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha - \beta_2 < \frac{d_{k,1}}{p}, \quad \gamma_1 < \frac{d_{k,1}}{q}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leqslant \alpha - d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2.$$

Оценка $J_3 f$. Остается показать, что при выполнении условий (10) и при $p < q$ условия $\alpha \geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ справедливо неравенство

$$\big\|u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)J_3 f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{15}$$

Вначале докажем неравенство

$$\big\|\chi_{B_1}(x)u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)J_3 f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{16}$$

Неравенство (16) эквивалентно неравенству

$$\big\|\chi_{B_1}(x)u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)J_3(u_{-\boldsymbol{\beta}}f)(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Учитывая, что при $|x| \leqslant 1$, $u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x) \asymp |x|^{-\gamma_1}$, $u_{-\boldsymbol{\beta}}(x) \asymp |x|^{-\beta_1}$, запишем последнее неравенство в виде

$$A := \big\|\chi_{B_1}(x)|x|^{-\gamma_1-\beta_1}J_3 f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Так как

$$d_{k,1}\Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{p'}\Big) > \alpha - d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \ \text{ или } \ d_{k,1} > \alpha,$$

то существует пара (γ_0, β_0) такая, что

$$\gamma_0 < \frac{d_{k,1}}{q}, \quad \beta_0 < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad \gamma_0 + \beta_0 = \alpha - d_{k,1}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \geqslant \gamma_1 + \beta_1.$$

Поэтому, применяя теорему D для пары (γ_0, β_0), получим

$$\begin{aligned}A &\leqslant \Big(\int_{|x|\leqslant 1}\Big(|x|^{-\gamma_0-\beta_0}\int_{|x|/2\leqslant|y|\leqslant 2|x|} f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_{k,1}(y)\Big)^q d\mu_{k,1}(x)\Big)^{1/q}\\ &\lesssim \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(|x|^{-\gamma_0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)|y|^{-\beta_0}\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_{k,1}(y)\Big)^q d\mu_{k,1}(x)\Big)^{1/q}\\ &\lesssim \big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что неравенство (8) может быть записано в эквивалентной форме

$$\big\||x|^{-\boldsymbol{\gamma}}I_\alpha^{k,1}(|\cdot|^{-\boldsymbol{\beta}}f)(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \leqslant \mathbf{c}_1(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)\big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Неравенство (16) доказано.

Докажем неравенство

$$\big\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)J_3f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|u_{\boldsymbol{\beta}}(x)f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{17}$$

Оно эквивалентно неравенству

$$\big\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)J_3(u_{-\boldsymbol{\beta}}f)(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Из условия $|x|\geqslant 1$ вытекает $u_{-\boldsymbol{\gamma}}(x)\asymp|x|^{-\gamma_2}$, $u_{-\boldsymbol{\beta}}(x)\asymp|x|^{-\beta_2}$, поэтому последнее неравенство можно записать так

$$A:=\big\|\chi_{B_1^c}(x)|x|^{-\gamma_2-\beta_2}J_3f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Так как

$$\alpha-\frac{d_{k,1}}{q'}+\alpha-\frac{d_{k,1}}{p}<\alpha-d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\ \text{или}\ \alpha<d_{k,1},$$

то существует пара (γ_0,β_0) такая, что

$$\alpha-\gamma_0<\frac{d_{k,1}}{q'},\quad \alpha-\beta_0<\frac{d_{k,1}}{p},\quad \gamma_0+\beta_0=\alpha-d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\leqslant\gamma_2+\beta_2.$$

Для нее также $\gamma_0<\frac{d_{k,1}}{q}$, $\beta_0<\frac{d_{k,1}}{p'}$ и по теореме D для пары (γ_0,β_0)

$$\begin{aligned}
A&\leqslant\Big(\int_{|x|\geqslant1}\Big(|x|^{-\gamma_0-\beta_0}\int_{|x|/2\leqslant|y|\leqslant2|x|}f(y)\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_{k,1}(y)\Big)^q d\mu_{k,1}(x)\Big)^{1/q}\\
&\lesssim\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(|x|^{-\gamma_0}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|y|^{-\beta_0}\Phi_\alpha(x,y)\,d\mu_{k,1}(y)\Big)^q d\mu_{k,1}(x)\Big)^{1/q}\\
&\lesssim\big\|f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}.
\end{aligned}$$

Неравенство (17) также доказано. Из (16), (17) вытекает неравенство (15). Теорема 1 полностью доказана. □

5. Заключение

Для потенциалов Рисса в случаях $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье и преобразования Данкля доказаны (L^p,L^q)-неравенства типа Стейна–Вейса с радиальными кусочно-степенными весами. Следующий шаг будет состоять в доказательстве неравенств Стейна–Вейса для произвольных радиальных и не радиальных весов, удовлетворяющих условиям Макенхаута. В случае $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье остается также открытым вопрос о необходимости в неравенстве Стейна–Вейса условия $\alpha\geqslant d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ при $p<q$. Этот вопрос открыт и для потенциала Данкля–Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littelwood J. E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol.27. P. 565–606.

2. Soboleff S. On a theorem in functional analysis // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1938. Vol. 4(46), no.3. P. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7, no. 4. P. 503–514.

4. Горбачев Д.В, Иванов В.И. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, Вып. 1. С. 131–147.

5. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

6. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

7. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

8. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S.Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Analysis. 2021. Vol. 55, no. 5. P. 555–605.

10. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

11. Ben Saïd S., Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // International Mathematics Research Notices. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.

13. Иванов В. И. Ограниченный оператор сдвига для $(k, 1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 4, с. 85–96.

14. Иванов В. И. Свойства и применение положительного оператора сдвига для $(k, 1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, № 4. С. 136–152.

15. Иванов В. И. Потенциал Рисса для $(k, 1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4, С. 114–135.

16. Sinnamon G, Stepanov V. D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. Vol. 54, no 2. P. 89–101.

17. Kufner A., Opic B. Xardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990. 333 p.

18. Kufner A., Persson L. E. Weighted inequalities of Xardy type. Singopure-London: World Scientific hrblishing Co. Pte. Ltd., 2003. 358 p.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littelwood J. E., 1928, "Some properties of fractional integrals, I", *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.

2. Soboleff S., 1938, "On a theorem in functional analysis", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 4(46), no. 3, pp. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G., 1958, "Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space" , *J. Math. Mech.*, vol. 7, no. 4, pp. 503–514.

4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147.

5. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups" , *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.

6. Rösler M., 2003, "Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

7. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform" , *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.

8. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2018, "Riesz potential and maximal function for Dunkl transform" , *Preprint CRM, Barcelona*, no. 1238, pp. 1–28.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 21, "Riesz potential and maximal function for Dunkl transform" , *Potential Analysis*, vol. 55, no. 5, pp. 555–605.

10. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265—1336.

11. Ben Saïd S., Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform" , *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.

13. Ivanov V. I., 2020, "Bounded translation operator for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96. (In Russ.)

14. Ivanov V. I., 2021, "Properties and application of a positive translation operator for $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 136–152. (In Russ.)

15. Ivanov V. I., 2021, "Riesz potential for $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 114–135. (In Russ.)

16. Sinnamon G, Stepanov V. D., 1996, “The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$” , *J. London Math. Soc.*, vol. 54, no. 2, pp 89–101.

17. Kufner A., Opic B., 1990, “Xardy-type inequalities" , Pitman Research Notes in Mathematics Series, *Harlow: Longman Scientific and Technical*, 333 p.

18. Kufner A., Persson L. E., 2003, “Weighted inequalities of Xardy type" , *Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 358 p.

Получено: 15.09.2022
Принято в печать: 8.12.2022