ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-77-91

Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей[1]

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого; Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Матвеева Елизавета Александровна — Центр творческого развития и гуманитарного образования (г. Суворов, Тульская область).
e-mail: morozova.tspu@gmail.com

Аннотация

В работе вводится новое понятие — система совместных полиномов Туэ для системы целых алгебраических иррациональностей. Проводится параллельное изложение элементов теории полиномов Туэ для одной алгебраической иррациональности и основ теории для системы совместных полиномов Туэ для системы целых алгебраических иррациональностей. Сформулирована гипотеза об аналоге теоремы М. Н. Добровольского (старшего) о том, что для каждого порядка j существуют два основных полинома Туэ j-ого порядка, через которые выражаются все остальные. Для системы двух квадратичных иррациональностей, например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, найдены системы совместных основные полиномов порядка не ниже 0-го, 1-го и 2-го. Доказана теорема об общем виде пары основных полиномов Туэ произвольного порядка n для квадратичной иррациональности $\sqrt{c}$, где c — бесквадратное натуральное число.

Ключевые слова: минимальный многочлен, приведённая алгебраическая иррациональность, остаточные дроби, цепные дроби, пара Туэ, система совместных полиномов Туэ.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. А. Матвеева. Системы совместных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 4, С. 77–91.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а. и при финансовой поддержке гранта правительства Тульской области по Договору ДС/294 от 16.11.2021 г.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-77-91

Systems of joint Thue polynomials for quadratic irrationalities[2]

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, E. A. Matveeva

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University; Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Matveeva Elizabeth Alexandrovna — Center for Creative Development and Humanitarian Education (Suvorov, Tula Region).
e-mail: morozova.tspu@gmail.com

Abstract

The paper introduces a new concept — a system of joint Thue polynomials for a system of integer algebraic irrationalities. A parallel presentation of the elements of the theory of Thue polynomials for one algebraic irrationality and the foundations of the theory for a system of joint Thue polynomials for a system of integer algebraic irrationalities is carried out. A hypothesis is formulated about an analogue of the theorem of M. N. Dobrovolsky (Sr.) that for each order of j there are two main Thue polynomials of the jth order, through which all the others are expressed. For a system of two quadratic irrationalities, for example, $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$, systems of joint basic polynomials of order no lower than 0, 1 and 2 are found. A theorem is proved on the general form of a pair of basic Thue polynomials of arbitrary order n for quadratic irrationality $\sqrt{c}$, where c is a square-free natural number.

Keywords: the minimum polynomial of the given algebraic irrationality, residual fractions, continued fractions, Tue pair, a system of joint Tue polynomials.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, E. A. Matveeva, 2022, "Systems of joint Thue polynomials for quadratic irrationalities", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 77–91.

1. Введение

Полиномы Туэ были введены в работе [6] и использовались А. Туэ для оценки снизу скорости приближения иррационального числа α рациональными дробями $\frac{p}{q}$. В работах [1] и [4] строилась систематическая теория полиномов Туэ и были построены основные полиномы Туэ для кубических и биквадратичных иррациональностей. В работе [3] был рассмотрен вопрос о нахождении основных полиномов Туэ для квадратичных иррациональностей. В данной работе для одного класса квадратичных иррациональностей этот вопрос решён полностью.

[2]The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research within the framework of a scientific project
No.19-41-710004_p_a. and with the financial support of a grant from the Government of the Tula region under the Agreement DS/294 dated 16.11.2021.

Цель настоящей работы — рассмотреть новое понятие — система совместных основных полиномов Туэ произвольного порядка для двух вещественных квадратичных иррациональностей.

Всё изложение будет вестись для случая двух целых алгебраических иррациональностей. Например, $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{3}$. Поэтому определения, которые мы рассмотрим ниже, будут отличаться от тех, что даны в работах [1] — [6].

2. Матричные разложения

В работе [4] В. Д. Подсыпанин рассмотрел одно обобщение понятия непрерывной дроби, которое он назвал матричным разложением. В этой работе он получил матричные разложения иррациональностей третьей и четвертой степени. Мы рассмотрим обобщение этого понятия на случай двух иррациональностей.

Пусть
$$\prod_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}a_k & c_k & e_k\\ b_k & d_k & f_k\\ g_k & h_k & m_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_n & C_n & E_n\\ B_n & D_n & F_n\\ G_n & H_n & M_n\end{pmatrix}.$$
Если
$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{H_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{M_n}=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{G_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{H_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{M_n}=\beta,$$
то пишут
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}=\prod_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}a_k & c_k & e_k\\ b_k & d_k & f_k\\ g_k & h_k & m_k\end{pmatrix}\tag{1}$$
и называют формулу (1) матричным совместным разложением системы чисел α и β.

Пусть далее
$$\begin{aligned}T_{n,j}(t)&=(t-\alpha)^nV_{n,j}(t)=A_{n,j}(t)-\alpha B_{n,j}(t)\quad (j=1,2,3);\\ U_{n,j}(t)&=(t-\beta)^nW_{n,j}(t)=C_{n,j}(t)-\beta B_{n,j}(t)\quad (j=1,2,3).\end{aligned}\tag{2}$$
Разделив обе части равенства (2) на $B_{n,j}(t)$, получим:
$$\begin{aligned}\frac{A_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}-\alpha&=(t-\alpha)^n\frac{V_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}\quad (j=1,2,3);\\ \frac{C_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}-\beta&=(t-\beta)^n\frac{W_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}\quad (j=1,2,3).\end{aligned}\tag{3}$$

Если при фиксированном t, отношения $\dfrac{V_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}$ и $\dfrac{W_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}$ $(j=1,2,3)$ возрастают не быстрее показательной функции от n, то при достаточно малом $|t-\alpha|$ и $|t-\beta|$ правые части (2) стремятся к нулю при возрастании n, и мы можем утверждать, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}=\alpha\quad (|t-\alpha|<\delta),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{C_{n,j}(t)}{B_{n,j}(t)}=\beta)\quad (|t-\beta|<\delta\quad (j=1,2,3).\tag{4}$$
Поэтому мы можем написать матричное разложение системы алгебраических чисел α и β в виде
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{0,1}(t) & A_{0,2}(t) & A_{0,3}(t)\\ C_{0,1}(t) & C_{0,2}(t) & C_{0,3}(t)\\ B_{0,1}(t) & B_{0,2}(t) & B_{0,3}(t)\end{pmatrix}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix}Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) & Q_{k,3}(t)\\ R_{k,1}(t) & R_{k,2}(t) & R_{k,3}(t)\\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) & P_{k,3}(t)\end{pmatrix}.\tag{5}$$

Разложение (5) существенно отличается от разложения (1) тем, что содержит рациональный параметр t и девять последовательностей многочленов, зависящих от t. При этом первое из равенств (4) выполняется в окрестности точки α, а второе — в окрестности точки β.

Такие разложения будем называть *совместными многочленными матричными разложениями.*

Если удается найти такое $a > 1$, что $\left|\dfrac{V_{n,\nu}(t)}{B_{n,\nu}(t)}\right| < a^n$ $(\nu = 1, 2, 3)$ для t, лежащих в интервал $|t - \alpha| < \frac{1}{a}$, и $\left|\dfrac{W_{n,\nu}(t)}{B_{n,\nu}(t)}\right| < a^n$ $(\nu = 1, 2, 3)$ для t, лежащих в интервал $|t - \beta| < \frac{1}{a}$, то в системе этих интервалов многочленное матричное разложение сходится к системе α, β.

3. Определения и необходимые сведения

Прежде всего напомним некоторые определения приведённые в работе [3].

Определение 1. *Полиномом Туэ n-го порядка для целого алгебраического числа α называются полиномы $T_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. *$T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, где $A_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;*
2. *$T_n(t)$ делится на $(t - \alpha)^n$, $\quad T_n(t) = V_n(t)(t - \alpha)^n$;*
3. *$T_n(t)$ не делится на $(t - \alpha)^{n+1}$, $\quad V_n(\alpha) \neq 0$.*

Ясно, что существуют полиномы Туэ любого порядка. Действительно, если целое алгебраическое число α является корнем минимального многочлена с целыми коэффициентами $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то многочлен $f(x)$ является унитарным, неприводимым, примитивным многочленом. Поэтому любой целочисленный многочлен $A_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t - \alpha)^n$, будет иметь вид $f^n(t)g(t)$ и $(f(t), g(t)) = 1$, $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Таким образом, полиномы $T_{n,1}(t) = f^n(t)$ и $T_{n,2}(t) = -\alpha f^n(t)$ — тривиальные полиномы Туэ порядка n.

Из предыдущего раздела видно, что полиномы Туэ могут использоваться для построения многочленных матричных разложений, сходящихся к α. При этом очевидно, что тривиальные полиномы Туэ для этих целей не годятся, а надо уметь строить нетривиальные полиномы Туэ любого порядка n.

В работе [1] М. Н. Добровольский доказал следующие важные свойства полиномов Туэ.

Теорема 1. *Для любого порядка n существуют два основных полинома Туэ $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ таких, что любой полином Туэ k-го порядка с $k \geqslant n$ имеет вид:*

$$T_k(t) = M_{k,n}(t)T_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)T_{n,2}(t),$$

где $M_{k,n}(t)$ и $N_{k,n}(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Теорема 2. *Если для полиномов*

$$T_{j_1,1}(t,\alpha) = P_{j_1,1}(t) - \alpha Q_{j_1,1}(t), \quad T_{j_2,2}(t,\alpha) = P_{j_2,2}(t) - \alpha Q_{j_2,2}(t)$$

порядка не ниже n имеет место

$$P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) = f^n(t)c_n,$$

где c_n — целое число не равное нулю, то полиномы $T_{j_1,1}(t,\alpha)$, $T_{j_2,2}(t,\alpha)$ являются основными для порядка n.

Пользуясь этими свойствами, В. Д. Подсыпанин в работе [4] дает следующие определения.

Определение 2. *Если $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ — основные полиномы Туэ порядка n, а $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$ — основные полиномы Туэ порядка $n+1$, то формулы*

$$\begin{cases} T_{n+1,1}(t) = & Q_{n,1}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,1}(t)T_{n,2}(t) \\ T_{n+1,2}(t) = & Q_{n,2}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,2}(t)T_{n,2}(t) \end{cases} \tag{6}$$

называются формулами перехода от полиномов n-го порядка к полиномам $n+1$-го.

Многочлены Q_{n_1}, Q_{n_2}, P_{n_1}, P_{n_2} называются многочленами перехода. Матрица

$$\begin{pmatrix} Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \\ P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \end{pmatrix}$$

— матрицей перехода, её определитель — определителем перехода.

Числа $\tilde{\alpha}_{n,1} = \dfrac{P_{n,1}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ и $\tilde{\alpha}_{n,2} = \dfrac{P_{n,2}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ — множителями перехода.

В этой же работе В. Д. Подсыпанин доказывает следующую теорему.

Теорема 3. *Если полиномы $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$, получаемые по формуле (6), являются основными, то*

$$Q_{n,1}(t)P_{n,2}(t) - P_{n,1}(t)Q_{n,2}(t) = K_n f(t),$$

где $K_n \neq 0$ и не зависит от t.

И обратно.

Как отмечал В. Д. Подсыпанин в работе [4] "Общих методов для нахождения этих последовательностей неизвестно. Сам Туэ нашёл полиномы, носящие его имя, только для $\alpha = \sqrt[m]{a}$. Путём некоторых преобразований к этому виду были приведены полиномы Туэ для иррациональностей третьей степени Зигелем [5], а для иррациональностей четвертой степени с равным нулю кубическим инвариантом Кречмером [2]."

Введем теперь следующие обозначения

$$f(t) = t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_m; \quad f(\alpha) = 0,$$
$$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_m \text{ — корни } f(t);$$
$$\omega_i = t - \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \quad \omega_1 = \omega; \quad \delta_i = \alpha - \alpha_i \quad (i = 2, 3, \ldots, m),$$

тогда

$$\begin{gathered} \omega_i = \omega + \delta_i \quad (i = 2, 3, \ldots, m), \\ f(t) = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m = \omega(\omega+\delta_2)\ldots(\omega+\delta_m) = \\ = \omega^m + A_1\omega^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\omega, \end{gathered}$$

где A_i — основные симметрические функции от δ_i.[3] Из формулы Тейлора для многочленов

$$f(t) = f(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(t-\alpha)^\nu = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(t-\alpha)^\nu$$

[3] $A_1 = \delta_2 + \ldots + \delta_m$, $A_2 = \delta_2\delta_3 + \ldots + \delta_2\delta_m + \ldots + \delta_{m-1}\delta_m = \sum\limits_{2\leqslant i<j\leqslant m} \delta_i\delta_j$, $\ldots$, $A_{m-1} = \delta_2\ldots\delta_m$.

вытекает, что

$$A_\nu = \frac{f^{(m-\nu)}(\alpha)}{(m-\nu)!} = C_m^{m-\nu}\alpha^\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu} C_{m-\mu}^{m-\nu} a_\mu \alpha^{\nu-\mu} \quad (\nu = 1, \ldots, m-1).$$

Применительно к квадратичной иррациональности $\alpha = \sqrt{c}$, $\alpha' = -\sqrt{c}$, где c — бесквадратное натуральное число, имеем

$$f(t) = t^2 - c, \quad \omega = t - \sqrt{c}, \quad \delta = 2\sqrt{c}, \quad A_1 = 2\sqrt{c}, \quad f(t) = \omega^2 + 2\sqrt{c}\cdot\omega.$$

Рассмотрим теперь полиномы со следующими свойствами

1. Они являются симметрическими многочленами относительно ω_i.

2. Их степень не превосходит $m-1$.

Такие полиномы В. Д. Подсыпанин называет *критическими.*

Нетрудно видеть, что если критические полиномы рассматривать как функции от t, то они имеют рациональные коэффициенты.

Если же их рассматривать как функции от ω, то коэффициенты будут целыми рациональными выражениями от A_i.

Основное свойство критических полиномов следующее:

Теорема 4. *Существует один и только один критический полином, имеющий в разложении по степеням ω данный свободный член*

$$Y(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}).$$

4. Система совместных полиномов Туэ для двух иррациональностей

Определение 3. *Системой совместных полиномом Туэ n-го порядка для целых алгебраических чисел α и β называется пара полиномов $T_n(t)$ и $U_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. *$T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$, где $A_n(t)$, $C_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;*

2. *$T_n(t)$ делится на $(t-\alpha)^n$, $T_n(t) = V_n(t)(t-\alpha)^n$; $U_n(t)$ делится на $(t-\beta)^n$, $U_n(t) = W_n(t)(t-\beta)^n$;*

3. *$T_n(t)$ не делится на $(t-\alpha)^{n+1}$, $V_n(\alpha) \neq 0$; $U_n(t)$ не делится на $(t-\beta)^{n+1}$, $W_n(\beta) \neq 0$.*

Ясно, что существуют системы совместных полиномов Туэ любого порядка для целых алгебраических чисел α и β. Действительно, если иррациональное число α является корнем минимального многочлена с целыми коэффициентами $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, а β — корень минимального многочлена с целыми коэффициентами $h(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то многочлены $f(x)$ и $h(x)$ являются унитарными, неприводимыми, примитивными многочленами. Поэтому любой многочлен $A_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t-\alpha)^n$, будет иметь вид $f^n(t)g(t)$ и $(f(t), g(t)) = 1$, $g(t) \in \mathbb{Z}t]$, а любой многочлен $C_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t-\beta)^n$, будет иметь вид $h^n(t)c(t)$ и $(h(t), c(t)) = 1$, $c(t) \in \mathbb{Z}t]$.

Таким образом, пары полиномов $T_{n,1}(t) = f^n(t)$, $U_{n,1}(t) = h^n(t)$; $T_{n,2}(t) = -\alpha f^n(t)h^n(t)$, $U_{n,2}(t) = -\beta f^n(t)h^n(t)$ и $T_{n,3}(t) = f^n(t) - \alpha f^n(t)h^n(t)$, $U_{n,3}(t) = h^n(t) - \beta f^n(t)h^n(t)$ — тривиальные системы совместных полиномов Туэ порядка n.

Из второго раздела видно, что системы совместных полиномы Туэ могут использоваться для построения совместных многочленных матричных разложений, сходящихся к α и β. При этом очевидно, что тривиальные системы совместных полиномов Туэ для этих целей не годятся, а надо уметь строить нетривиальные системы совместных полиномо Туэ любого порядка n.

Из условия $(t-\alpha)^n|T_n(t)$, а $(t-\alpha)^{n+1} \nmid T_n(t)$ следует, что $(t-\alpha)\left|\frac{d^\nu T_n(t)}{dt^\nu}\right.$ при $\nu = 0,\dots,n-1$ и $(t-\alpha) \nmid \frac{d^n T_n(t)}{dt^n}$.

Так как $P(t) - \alpha Q(t) = P(t) - tQ(t) + (t-\alpha)Q(t)$, то соотношение $(t-\alpha)|P(t) - \alpha Q(t)$ эквивалентно соотношению $f(t)|P(t) - tQ(t)$.

Отсюда следует, что пара полиномов $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$ и $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$ является системой совместных полиномом Туэ n-го порядка для целых алгебраических чисел α и β тогда и только тогда, когда выполняются следующие $2n+2$ условий

$$f(t)\left|\frac{d^\nu A_n(t)}{dt^\nu} - t\frac{d^\nu B_n(t)}{dt^\nu}\right., \quad h(t)\left|\frac{d^\nu C_n(t)}{dt^\nu} - t\frac{d^\nu B_n(t)}{dt^\nu}\right. \qquad (\nu = 0,\dots,n-1)$$

и

$$f(t) \nmid \frac{d^n A_n(t)}{dt^n} - t\frac{d^n B_n(t)}{dt^n}, \quad h(t) \nmid \frac{d^n C_n(t)}{dt^n} - t\frac{d^n B_n(t)}{dt^n}.$$

Дадим модификацию определения 3.

Определение 4. *Системой совместных полиномом Туэ порядка не ниже n-го для целых алгебраических чисел α и β называется пара полиномов $T_n(t)$ и $U_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, $U_n(t) = C_n(t) - \beta B_n(t)$, *где $A_n(t)$, $C_n(t)$ и $B_n(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами;*
2. $T_n(t)$ *делится на* $(t-\alpha)^k$, $\quad T_n(t) = V_n(t)(t-\alpha)^k$; $U_n(t)$ *делится на* $(t-\beta)^m$, $U_n(t) = W_n(t)(t-\beta)^m$;
3. $T_n(t)$ *не делится на* $(t-\alpha)^{k+1}$, $\quad V_n(\alpha) \neq 0$; $U_n(t)$ *не делится на* $(t-\beta)^{m+1}$, $\quad W_n(\beta) \neq 0$;
4. $\min(k,m) \geqslant n$.

Ясно, что следующие три пары полиномов Туэ являются системой совместных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого: $T_{0,1}(t) = 1$, $U_{0,1}(t) = 0$; $T_{0,2}(t) = 0$, $U_{0,2}(t) = 1$; $T_{0,3}(t) = -\alpha$, $U_{0,3}(t) = -\beta$, причём любая пара совместных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого $T_0(t)$, $U_0(t)$ имеет вид

$$T_0(t) = a(t) - \alpha b(t) = a(t)T_{0,1}(t) + c(t)T_{0,2}(t) + b(t)T_{0,3}(t),$$
$$U_0(t) = c(t) - \beta b(t) = a(t)U_{0,1}(t) + c(t)U_{0,2}(t) + b(t)U_{0,3}(t).$$

Нетрудно задать соответствие между парами совместных полиномов Туэ и тройками Туэ:

$$T(t) = a(t) - \alpha b(t), U(t) = c(t) - \beta b(t) \longleftrightarrow (a(t), c(t), b(t)) \in \mathbb{Z}^3.$$

Отсюда следует, что множество пар совместных полиномов Туэ и множества троек Туэ являются изоморфными свободными $\mathbb{Z}[t]$ модулями ранга 3.

Естественно предположить, что справедлив аналог теоремы 1.

Теорема 5. *Для любого порядка n существуют три системы совместных основных полинома Туэ $T_{n,\nu}(t)$ и $U_{n,\nu}(t)$ ($\nu = 1, 2, 3$) порядка не ниже n такие, что любая система совместных полиномов Туэ порядка не ниже k-го с $k \geqslant n$ имеет вид:*

$$T_k(t) = M_{k,n}(t)T_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)T_{n,2}(t) + K_{k,n}(t)T_{n,3}(t),$$
$$U_k(t) = M_{k,n}(t)U_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)U_{n,2}(t) + K_{k,n}(t)U_{n,3}(t),$$

где $M_{k,n}(t)$, $N_{k,n}(t)$ и $K_{k,n}(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Если $T_{n,\nu}(t) = a_{n,\nu}(t) - \alpha b_{n,\nu}(t)$, $U_{n,\nu}(t) = c_{n,\nu}(t) - \beta b_{n,\nu}(t)$, ($\nu = 1, 2, 3$) и

$$T_k(t) = a_k(t) - \alpha b_k(t), \quad U_k(t) = c_k(t) - \beta b_k(t),$$

то справедливо матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a_k(t) & c_k(t) & b_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{k,n}(t) & N_{k,n}(t) & K_{k,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,1}(t) & c_{n,1}(t) & b_{n,1}(t) \\ a_{n,2}(t) & c_{n,2}(t) & b_{n,2}(t) \\ a_{n,3}(t) & c_{n,3}(t) & b_{n,3}(t) \end{pmatrix}.$$

5. Многочлены Туэ нулевого, первого и второго порядка

Следуя работе [4] В. Д. Подсыпанина найдем основные многочлены до 2-го порядка для любого α.

Начнем с многочленов нулевого порядка.

Такими многочленами очевидно являются 1 и $-\alpha$.

Однако, В. Д. Подсыпанин предлагает пользоваться при переходах критическими многочленами, поэтому возьмём:

$$T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2}(t) = -A_1 = -a_1 - m\alpha, \tag{7}$$

здесь

$$P_{0,1}(t) = 1, \quad Q_{0,1}(t) = 0;$$
$$P_{0,2}(t) = -a_1, \quad Q_{0,2}(t) = m.$$

Первый переход осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} mT_{1,1}(t) = & (m\omega + A_1)\, T_{0,1}(t) + & T_{0,2}(t), \\ mT_{1,2}(t) = & \big((m\omega + A_1)f'(t) - m^2 f(t)\big)\, T_{0,1}(t) + f'(t) & T_{0,2}(t). \end{cases} \tag{8}$$

Определитель перехода будет равен $f(t)$, то есть полученные многочлены будут основными многочленами первого порядка.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} \omega + \frac{A_1}{m} & \frac{1}{m} \\ \left(\omega + \frac{A_1}{m}\right) f'(t) - mf(t) & \frac{f'(t)}{m} \end{vmatrix} = f(t).$$

Множители перехода равны $\tilde{\alpha}_{0,1} = 1$, $\tilde{\alpha}_{0,2} = +A_{m-1}$.

Произведя вычисления, получим $T_{1,1}(t) = \omega = t - \alpha_1$,

$$T_{1,2}(t) = -\omega \left(A_1\omega^{m-2} + 2A_2\omega^{m-3} + \ldots + (m-1)A_{m-1}\right). \tag{9}$$

Второй переход осуществляется по формулам

$$\begin{cases} mT_{2,1}(t) = (m-1)f'(t)\,T_{1,1}(t) + T_{1,2}(t), \\ mT_{2,2}(t) = (m-1)\left(m^2 f(t) - (m\omega + A_1)f'(t)\right)T_{1,1}(t) - (m\omega + A_1)\,T_{1,2}(t). \end{cases} \tag{10}$$

Определитель второго перехода будет равен $(m-1)f(t)$, то есть $T_{2,1}(t)$ и $T_{2,2}(t)$ — основные многочлены второго порядка.

Множители второго перехода равны $\tilde{\alpha}_{1,1} = 1$, $\tilde{\alpha}_{1,2} = A_1$.

Проведя вычисления получим:

$$\begin{aligned} T_{2,1}(t) &= \omega^2\left((m-1)\omega^{m-2} + (m-2)A_1\omega^{m-3} + \ldots + A_{m-2}\right), \\ T_{2,2}(t) &= \omega^2\left(A_1\omega^{m-2} + (2mA_2 - (m-2)A_1^2)\omega^{m-3} + \ldots + \right. \\ &\quad \left. + (m(m-1)A_{m-1} - A_1 A_{m-2})\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Следующий переход получить в общем виде не удаётся. Он оказывается существенно различным для разных α.

Подставив значение начальных многочленов и первых переходных многочленов в формулу (5), В. Д. Подсыпанин нашёл несколько первых множителей разложения.

Обозначим $m\omega + A_1 = Q(t)$; $Q(t)f'(t) - m^2 f(t) = S(t)$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(t) & S(t) \\ 1 & f'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) & -S(t) \\ 1 & -Q(t) \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \prod_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Перемножив две первые матрицы и добавив после четвёртой матрицы произведение

$$\begin{pmatrix} m & -a_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

и перемножив четвертую и пятую матрицы, мы получим более изящный вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} t & tf'(t) - mf(t) \\ 1 & f'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) & tf'(t) - mf(t) \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \prod_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} Q_{k,1}(t) & Q_{k,2}(t) \\ P_{k,1}(t) & P_{k,2}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

Формулы (12) и (13) были основой в работе В. Д. Подсыпанина для получения разложений для $m = 3$ и 4.

6. Многочлены Туэ нулевого, первого и второго порядка для квадратичных иррациональностей

Пусть $m = 2$, $f(t) = t^2 - c$, $c \in \mathbb{N}$, $d = 4c > 0$ и $\alpha = \frac{\sqrt{d}}{2} = \sqrt{c}$, $\alpha' = -\sqrt{c}$ — сопряженные квадратические вещественные иррациональности, корни неприводимого многочлена $f(t)$.

Для числа α последовательно находим основные многочлены Туэ:

нулевого порядка

$$T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2}(t) = \alpha,$$
$$P_{0,1}(t) = 1, \quad Q_{0,1}(t) = 0,$$
$$P_{0,2}(t) = 0, \quad Q_{0,2}(t) = 1;$$

первого порядка

$$T_{1,1}(t) = \omega = t - \alpha, \quad T_{1,2}(t) = c - \alpha t,$$
$$P_{1,1}(t) = t, \quad Q_{1,1}(t) = 1,$$
$$P_{1,2}(t) = c, \quad Q_{1,2}(t) = t;$$

второго порядка

$$T_{2,1}(t) = \omega^2 = t^2 + c - 2\alpha t,$$
$$P_{2,1}(t) = t^2 + c, \quad Q_{2,1}(t) = 2t,$$
$$T_{2,2}(t) = \omega^2 \cdot (-\alpha) = 2ct - \alpha(t^2 + c),$$
$$P_{2,2}(t) = 2ct, \quad Q_{2,2}(t) = t^2 + c.$$

Нетрудно видеть, что справедливы матричные равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix}.$$

Естественно предположить, что общий вид основных многочленов Туэ порядка n для квадратичной иррациональности α можно задать матричным равенством

$$\begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}^n.$$

Последовательно получаем:

$$\begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2} = -\sqrt{c};$$
$$\begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) \end{vmatrix} = t^2 - c,$$
$$T_{1,1}(t) = t - \sqrt{c}, \quad T_{1,2} = c - t\sqrt{c};$$
$$\begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) \end{vmatrix} = (t^2 - c)^2,$$
$$T_{2,1}(t) = t^2 + c - 2t\sqrt{c} = (t - \sqrt{c})^2, \quad T_{2,2}(t) = 2ct - (t^2 + c)\sqrt{c} = -\sqrt{c}(t - \sqrt{c})^2;$$
$$\begin{pmatrix} P_{3,1}(t) & P_{3,2}(t) \\ Q_{3,1}(t) & Q_{3,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + c & 2ct \\ 2t & t^2 + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 + 3ct & c(3t^2 + c) \\ 3t^2 + c & t^3 + 3ct \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} P_{3,1}(t) & P_{3,2}(t) \\ Q_{3,1}(t) & Q_{3,2}(t) \end{vmatrix} = (t^2 - c)^3,$$
$$T_{3,1}(t) = t^3 + 3ct - (3t^2 + c)\sqrt{c} = (t - \sqrt{c})^3, \quad T_{3,2}(t) = c(3t^2 + c) - (t^3 + 3ct)\sqrt{c} = -\sqrt{c}(t - \sqrt{c})^3.$$

Теорема 6. *Пусть c — безквадратное натуральное число и квадратичная иррациональность $\alpha = \sqrt{c}$ — корень унитарного, неприводимого примитивного многочлена $f(x) = x^2 - c$, тогда для основных многочленов Туэ порядка n справедливо равенство*

$$T_{n,1}(t) = t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j - \sqrt{c} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j = \left(t - \sqrt{c}\right)^n,$$

$$T_{n,2}(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} - \sqrt{c}\left(t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j\right) = -\sqrt{c}\left(t - \sqrt{c}\right)^n;$$

$$P_{n,1}(t) = t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j, \quad P_{n,2}(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1},$$

$$Q_{n,1}(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j, \quad Q_{n,2}(t) = t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j,$$

$$P_{n,1}(t) Q_{n,2}(t) - P_{n,2}(t) Q_{n,1}(t) = (t^2 - c)^n.$$

Доказательство. Доказательство проведём по индукции.

При $n = 0$ имеем:

$$P_{0,1}(t) = 1, \quad P_{0,2}(t) = 0, \quad Q_{0,1}(t) = 0, \quad Q_{0,2}(t) = 1, \quad T_{0,1}(t) = 1, \quad T_{0,2}(t) = -\sqrt{c}$$

и

$$P_{0,1}(t) Q_{0,2}(t) - P_{0,2}(t) Q_{0,1}(t) = 1,$$

поэтому утверждение теоремы справедливо.

Пусть $n \geqslant 0$ и утверждение теоремы справедливо, то есть

$$\begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j & \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} \\ \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j & t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим многочленную матрицу

$$\begin{pmatrix} P_{n+1,1}(t) & P_{n+1,2}(t) \\ Q_{n+1,1}(t) & Q_{n+1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & c \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Последовательно получим

$$P_{n+1,1}(t) = t \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j\right) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1} =$$

$$= t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} t^{n+1-2j} c^j + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2j-1} t^{n+1-2j} c^j = t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n+1}^{2j} t^{n+1-2j} c^j,$$

$$P_{n+1,2}(t) = c \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} t^{n-2j} c^j\right) + t \cdot \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2j+1} t^{n-2j-1} c^{j+1}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} t^{n-2j} t^{n-2j} c^{j+1} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2j+1} t^{n-2j} c^{j+1} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n+1}^{2j+1} t^{n+1-2j-1} c^{j+1},$$

$$Q_{n+1,1}(t) = t \cdot \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) + t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j} c^j + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n+1-1}{2}\right]} C_{n+1}^{n+1-2j-1} t^{n+1-2j-1} c^j,$$

$$Q_{n+1,2}(t) = c \cdot \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^j \right) + t \cdot \left(t^n + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{n-2j} t^{n-2j} c^j \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{n-2j-1} t^{n-2j-1} c^{j+1} + t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{n-2j} t^{n+1-2j} c^j = t^{n+1} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n+1}^{n+1-2j} t^{n+1-2j} c^j,$$

$$P_{n+1,1}(t)Q_{n+1,2}(t) - P_{n+1,2}(t)Q_{n+1,1}(t) = \begin{vmatrix} P_{n+1,1}(t) & P_{n+1,2}(t) \\ Q_{n+1,1}(t) & Q_{n+1,2}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & c \\ 1 & t \end{vmatrix} = (t^2 - c)^n (t^2 - c) = (t^2 - c)^{n+1}$$

и теорема полностью доказана. □

7. Системы совместных полиномов Туэ нулевого, первого и второго порядка для квадратичных иррациональностей

Пусть $1 < a < b$ — два бесквадратных натуральных числа, например $a = 2$, $b = 3$, и $\alpha = \sqrt{a}$, $\beta = \sqrt{b}$.

Система совместных основных полиномов Туэ порядка не ниже 0-ого задается матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{0,1}(t) & P_{0,2}(t) & P_{0,3}(t) \\ R_{0,1}(t) & R_{0,2}(t) & R_{0,3}(t) \\ Q_{0,1}(t) & Q_{0,2}(t) & Q_{0,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система совместных основных полиномов Туэ порядка не ниже 1-ого задается матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{1,1}(t) & P_{1,2}(t) & P_{1,3}(t) \\ R_{1,1}(t) & R_{1,2}(t) & R_{1,3}(t) \\ Q_{1,1}(t) & Q_{1,2}(t) & Q_{1,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = (t^2 - a)(t^2 - b).$$

Мы получаем пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 1-ого:

$$T_{1,1}(t) = t - \alpha, \quad U_{1,1}(t) = t - \beta;$$

$$T_{1,2}(t) = a - \alpha t = -\alpha(t - \alpha), \quad U_{1,2}(t) = t^2 - \beta t = t(t - \beta);$$

$$T_{1,3}(t) = t^2 - \alpha t = t(t - \alpha), \quad U_{1,3}(t) = b - \beta t = -\beta(t - \beta).$$

Перейдём, теперь, к получению пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 2-ого. Если $T_2(t) = P_2(t) - \alpha Q_2(t)$, $U_2(t) = R_2(t) - \alpha Q_2(t)$ — пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже 2-ого, то справедливы следующие четыре соотношения:

$$t^2 - a | P_2(t) - tQ_2(t), \quad t^2 - b | R_2(t) - tQ_2(t), \tag{14}$$

$$t^2 - a \left| P_2'(t) - tQ_2'(t) \right., \quad t^2 - b | R_2'(t) - tQ_2'(t). \tag{15}$$

Из соотношений (14) следует, что

$$P_2(t) = tQ_2(t) + (t^2 - a)g(t), \quad R_2(t) = tQ_2(t) + (t^2 - b)g_1(t), \quad g(t), g_1(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Отсюда следует, что

$$P_2'(t) = Q_2(t) + tQ_2'(t) + 2tg(t) + (t^2 - a)g'(t), \quad R_2'(t) = Q_2(t) + tQ_2'(t) + 2tg_1(t) + (t^2 - b)g_1'(t).$$

Отсюда и из (15) следует, что

$$t^2 - a | Q_2(t) + 2tg(t), \quad t^2 - b | Q_2(t) + 2tg_1(t).$$

Таким образом, имеем:

$$Q_2(t) = (t^2 - a)p(t) - 2tg(t) = (t^2 - b)q(t) - 2tg_1(t), \quad p(t), q(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Располагая по степеням t, получим уравнение

$$t^2(p(t) - q(t)) + 2t(g_1(t) - g(t)) = ap(t) - bq(t)$$

в целых многочленах $p(t)$, $q(t)$, $g(t)$ и $g_1(t)$.

Положим $p(t) = tp_1(t) + c$, $q(t) = tq_1(t) + d$, $g_2(t) = g_1(t) - g(t)$, получим

$$t^3(p_1(t) - q_1(t)) + t^2(c - d) + t(2g_2(t) - ap_1(t) + bq_1(t)) = ac - bd.$$

Отсюда следует, что $c = \frac{b}{(a,d)} f$, $d = \frac{a}{(a,b)} f$ и f — любое целое число. Далее получим:

$$t^2(p_1(t) - q_1(t)) + t\frac{b - a}{(a, d)} f = ap_1(t) - bq_1(t) - 2g_2(t).$$

Используя матрицу перехода от системы совместных основных полинома Туэ порядка не ниже 1-ого к системе совместных основных полинома Туэ порядка не ниже 2-ого, получим:

$$\begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & a & t^2 \\ t & t^2 & b \\ 1 & t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1}(t) & m_{1,2}(t) & m_{1,3}(t) \\ n_{1,1}(t) & n_{1,2}(t) & n_{1,3}(t) \\ k_{1,1}(t) & k_{1,2}(t) & k_{1,3}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} tm_{1,1}(t) + an_{1,1}(t) + t^2k_{1,1}(t) & tm_{1,2}(t) + an_{1,2}(t) + t^2k_{1,2}(t) & tm_{1,3}(t) + an_{1,3}(t) + t^2k_{1,3}(t) \\ tm_{1,1}(t) + t^2n_{1,1}(t) + bk_{1,1}(t) & tm_{1,2}(t) + t^2n_{1,2}(t) + bk_{1,2}(t) & tm_{1,3}(t) + t^2n_{1,3}(t) + bk_{1,3}(t) \\ m_{1,1}(t) + tn_{1,1}(t) + tk_{1,1}(t) & m_{1,2}(t) + tn_{1,2}(t) + tk_{1,2}(t) & m_{1,3}(t) + tn_{1,3}(t) + tk_{1,3}(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем:

$$P_{2,\nu}(t) = tm_{1,\nu}(t) + an_{1,\nu}(t) + t^2k_{1,\nu}(t), \quad R_{2,\nu}(t) = tm_{1,\nu}(t) + t^2n_{1,\nu}(t) + bk_{1,\nu}(t),$$
$$Q_{2,\nu}(t) = m_{1,\nu}(t) + tn_{1,\nu}(t) + tk_{1,\nu}(t), \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Условия на полиномы Туэ порядка не ниже второго запишутся следующим образом:

$$(t - \alpha)^2 | P_{2,\nu}(t) - \alpha Q_{2,\nu}(t) = \frac{1}{2t}(t - \alpha)^2 Q_{2,\nu}(t) + P_{2,\nu}(t) - \frac{t^2 + a}{2t} Q_{2,\nu}(t),$$

$$(t - \beta)^2 | R_{2,\nu}(t) - \beta Q_{2,\nu}(t) = \frac{1}{2t}(t - \beta)^2 Q_{2,\nu}(t) + R_{2,\nu}(t) - \frac{t^2 + b}{2t} Q_{2,\nu}(t), \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Это даёт общий вид для пары совместных полиномов Туэ порядка не ниже второго:

$$T(t) = Q(t)\frac{t^2+a}{2} + (t^2-a)^2P(t) - \alpha tQ(t) = (t-\alpha)^2\left(\frac{Q(t)}{2} + (t+\alpha)^2P(t)\right),$$
$$U(t) = Q(t)\frac{t^2+b}{2} + (t^2-b)^2R(t) - \beta tQ(t) = (t-\beta)^2\left(\frac{Q(t)}{2} + (t+\beta)^2R(t)\right).$$

Поэтому матрицу системы основных полиномов Туэ порядка не ниже второго можно задать так:

$$\begin{pmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+a & t^2+a+(t^2-a)^2 & t^2+a \\ t^2+b & t^2+b & t^2+b+(t^2-b)^2 \\ 2t & 2t & 2t \end{pmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} P_{2,1}(t) & P_{2,2}(t) & P_{2,3}(t) \\ R_{2,1}(t) & R_{2,2}(t) & R_{2,3}(t) \\ Q_{2,1}(t) & Q_{2,2}(t) & Q_{2,3}(t) \end{vmatrix} = 2t(t^2-a)^2(t^2-b)^2.$$

После вычислений находим матрицу перехода от системы основных полиномов Туэ порядка не ниже первого к системе основных полиномов Туэ порядка не ниже второго:

$$\begin{pmatrix} 0 & t(t^2-a) & t(t^2-b) \\ 1 & 1+a-t^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b-t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & t(t^2-a) & t(t^2-b) \\ 1 & 1+a-t^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b-t^2 \end{vmatrix} = 2t(t^2-a)(t^2-b).$$

8. Заключение

Сравнивая формулы для основных полиномов Туэ для одной квадратичной иррациональности и для основных полиномов системы совместных полиномов Туэ двух квадратичных иррациональностей, мы видим, что переход к системе совместных полиномов Туэ гораздо сложнее. В частности, на сегодняшний момент трудно сформулировать гипотезу о виде матриц перехода. Ясно, что вид этих матриц может зависеть от порядка системы совместных полиномов Туэ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский М. Н. О разложении иррациональностей третьей степени в непрерывные дроби // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 4 — 24.

2. В. А. Кречмар О верхнем пределе числа представлений целого числа некоторыми бинарными формами четвертой степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1939. Т. 3, вып. 3. С. 289–302.

3. Е. А. Морозова Многочлены Туэ для квадратичных иррациональностей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : Материалы XIII Международной конференции, Тула, 15–17 апреля 2015 года / Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2015. – С. 161-168.

4. Подсыпанин В. Д. О многочленах Туэ и разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 25 — 69.

5. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., 1929, Phys.-Math. Klasse. PP. 1–70.

6. Thue A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen // J. reine ang. Math. 1910. Vol. 135. PP. 284–305.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii M. N. 2010 "On the decomposition of irrationalities of the third degree into continuous fractions" *Chebyshevsky Sb.* vol. XI, №. 4 (36). pp. 4–24.

2. V. A. Kretschmar 1939, "On the upper limit of the number of representations of an integer by some binary forms of the fourth degree", *Izv. AN USSR. Ser. matem.* Vol. 3, issue 3. pp. 289–302.

3. E. A. Morozova 2015, "Tue polynomials for quadratic irrationalities", *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications : Proceedings of the XIII International Conference, Tula, April 15-17, 2015 / Tolstoy Tula State Pedagogical University. – Tula: Tula State Pedagogical University named after L.N. Tolstoy*, – pp. 161-168.

4. Podsypanin V. D. 2010 "On Thue polynomials and the expansion of irrationalities of the fourth degree into a continued fraction" *Chebyshevskii sbornik.* T. XI, vol. 4 (36). pp. 25–69.

5. Siegel C. L. 1929, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen", *Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., Phys.-Math. Klasse.* PP. 1–70.

6. Thue A. 1910. "Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen", *J. reine ang. Math.* Vol. 135. PP. 284–305.

Получено: 17.06.2022
Принято в печать: 8.12.2022