

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 51

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-20-38

Целочисленная аппроксимация отрезка

М. М. Галламов

Галламов Мансур Муллагаянович — кандидат физико-математических наук, участник семинара Никольского (МИАН) (г. Москва).

e-mail: gallamov@gmail.com

Аннотация

Пусть OXY — декартова система координат с целочисленной решёткой, единичные квадраты которой раскрашены в шахматном порядке. Целочисленная аппроксимация отрезка AB задается с помощью клетчатой области S_{AB} из (раскрашенных) клеток, внутренность каждого из которых имеет непустое пересечение с AB . Если $P_{AB}^{\pm}$ — правая и левая замкнутые полуплоскости, определяемые прямой l_{AB} посредством точки A и B , то $S_{AB}^{\pm} = S_{AB} \cap P_{AB}^{\pm}$ — его правая и левая области. (Внутри S_{AB} нет целых точек.) Ломанные $L^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ из $S_{AB}^{\pm}$ с концами $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$ и целыми вершинами — правая и левая (целочисленными) аппроксимациями отрезка AB — концы выбираются из вершин крайних клеток. Если l_{AB} параллельна одной из осей координат, то полагаем $S_{AB} = \emptyset$ и тогда аппроксимация отрезка AB есть минимальный отрезок с целыми концами, содержащий AB . Такие аппроксимации строятся с помощью алгоритма “вытягивания носов”, который представляет собой геометрическую интерпретацию цепной дроби углового коэффициента прямой l_{AB} . На основании этого метода построения получена точная формула для вычисления числа целых точек внутри произвольного треугольника, а также частично решена задача С. В. Конягина о шахматной раскраске: Если $U(t)$ множество всех раскрашенных клеток из треугольника, отсекаемого прямой $f_t: y = -\alpha x + t$, $\alpha, t > 0$, то разность $u(t)$ между белыми и черными клетками из $U(t)$ для каждого положительного иррационального α не ограничена ни снизу, ни сверху, когда $t \rightarrow \infty$.

Решение получено для чисел вида: $e^{\pm 1}$, $\text{tg}^{\pm 1}$, $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]^{\pm 1}$, $[a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]^{\pm 1}$, $[a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]^{\pm 1}$, где верхний индекс плюс (минус) указывает на четность (нечетность) элемента цепной дроби, определяемой α .

Метод построения аппроксимации отрезка был применен при решении задачи о шахматной раскраске для чисел $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $[a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]$, a_{2n+1}^- и $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]$, если ограничено

$$2^{k-1}b_3b_9 \dots b_{6(k-1)+3} + \dots + 2^2 \sum_{i_1 > i_2 > i_3 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} b_{6(k-i_3)+3} + 2 \sum_{i_1 > i_2 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} + \sum_{i=1}^k b_{6(k-i)+3} + 1,$$

для некоторых $b_n = \left\lfloor \frac{a_n^- - 1}{2} \right\rfloor$, представляющих целую часть $\frac{a_n^- - 1}{2}$. Так при $b_n = 0$ цепная дробь $[a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ключевые слова: Задача С. В. Конягина о шахматной раскраске, прямая с иррациональным угловым коэффициентом и шахматная раскраска, цепная дробь, геометрическая интерпретация цепной дроби, алгоритм “вытягивания носов”, целочисленная решётка, аппроксимация отрезка количество целых точек внутри треугольника.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

М. М. Галламов. Целочисленная аппроксимация отрезка // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 20–38.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 51

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-20-38

Integer approximation of a segment

M. M. Gallamov

Gallamov Mansur Mullagayanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Participant of the Nikolsky Seminar (MIAN) (Moscow).

e-mail: gallamov@gmail.com

Abstract

Let OXY be a Cartesian coordinate system with an integer lattice whose unit squares are staggered. The integer approximation of the segment AB is given using the cellular domain $\mathbb{S}_{AB}$ of (colored) cells, the interior of each of which has a non-empty intersection with AB . If $P_{AB}^{\pm}$ — right and left closed half-planes defined by the line l_{AB} by the point A and B , then $\mathbb{S}_{AB}^{\pm} = \mathbb{S}_{AB} \cap P_{AB}^{\pm}$ — its right and left areas. (There are no integer points inside $\mathbb{S}_{AB}$.) Polyline $L^{\pm}(A^{\pm}, B^{\pm})$ from $\mathbb{S}_{AB}^{\pm}$ with ends $A^{\pm}$ and $B^{\pm}$ and whole vertices — right and left by (integer) approximations of the segment AB — the ends are selected from the vertices of the extreme cells. If l_{AB} is parallel to one of the coordinate axes, then we assume $\mathbb{S}_{AB} = \emptyset$ and then approximation of the segment AB is minimum segment with integer ends containing AB . Such approximations are constructed using the algorithm ‘pulling noses’, which is a geometric interpretation of the chain fraction of the angular coefficient of the straight line l_{AB} . Based on this construction method, an exact formula for calculating the number of integer points inside an arbitrary triangle is obtained, and the problem of S.V. Konyagin is partially solved. about chess coloring: If $U(t)$ is the set of all colored cells from a triangle cut off by a straight line $f_t: y = -\alpha x + t$, $\alpha, t > 0$, then the difference $u(t)$ between white and black cells from $U(t)$ for every positive irrational α is bounded neither from below nor from above when $t \rightarrow \infty$. The solution is obtained for numbers of the form: $e^{\pm 1}, \operatorname{tg}^{\pm 1}, [a_0^{-}; a_1^{-}, a_2^{-}, \dots]^{\pm 1}, [a_0^{+}; a_1^{+}, a_2^{+}, \dots]^{\pm 1}, [a_0^{+}; a_1^{-}, a_2^{+}, \dots]^{\pm 1}$, where the superscript plus (minus) indicates on the parity (odd) of the element of the continued fraction defined by α .

The method of constructing an approximation of the segment was used to solve the problem of chess coloring for the numbers $\frac{\sqrt{5}+1}{2}, [a_0^{+}; a_1^{+}, a_2^{+}, \dots], a_{2n+1}^{-}$ and $[a_0^{-}; a_1^{-}, a_2^{-}, \dots]$, if limited

$$2^{k-1}b_3b_9 \cdots b_{6(k-1)+3} + \cdots + 2^2 \sum_{i_1 > i_2 > i_3 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} b_{6(k-i_3)+3} + 2 \sum_{i_1 > i_2 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} + \sum_{i=1}^k b_{6(k-i)+3} + 1,$$

for some $b_n = \left\lfloor \frac{a_n^{-}-1}{2} \right\rfloor$ representing the whole part of $\frac{a_n^{-}-1}{2}$. So for $b_n = 0$ the chain fraction is $[a_0^{-}; a_1^{-}, a_2^{-}, \dots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Keywords: S.V.Konyagin’s problem about chess coloring, a straight line with an irrational angular coefficient and chess coloring, a chain fraction, a geometric interpretation of a chain fraction, an algorithm for ‘pulling noses an integer lattice, an approximation of a segment the number of integer points inside a triangle..

Bibliography: 17 titles.

For citation:

M. M. Gallamov, 2022, “Integer approximation of a segment”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 20–38.

OXY — правоориентированная прямоугольной системе координат, I_{OXY} — её первый квадрант, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $[x]$ — целая часть числа x , $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число не меньшее x . Объект, у которого координаты целые числа, назовем *целым объектом*.

1. Немного о геометрии цепных дробей

Рассмотрим вещественное число α и разложение его модуля $|\alpha|$ в цепную дробь $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, $a_0 \in \mathbb{N}_0$ и $a_n \in \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}_0$, тогда $\alpha = \text{sgn } \alpha [a_0; a_1, a_2, \dots]$, где $\text{sgn } \alpha$ — его знак. Цепная дробь числа α при рациональном α конечна (что будем оговаривать отдельно) и иррациональным бесконечна. Подходящую дробь порядка n цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ запишем в виде

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \frac{p_N}{q_N} = \alpha, \quad N \in \widehat{\mathbb{N}}_0, \quad (1)$$

где второе равенство — подходящая дробь максимального порядка для рационального $|\alpha|$. Согласно [1] — [6] имеем

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \\ p_0 &= a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_0 = 1, q_1 = a_1, \quad n \in \widehat{\mathbb{N}}_{0,0}; \\ p_{-2} &= 0, \quad q_{-2} = 1, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-1} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

причем p_n и q_n взаимно простые числа и

$$p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} = (-1)^{n-1}, \quad n \in \widehat{\mathbb{N}}_{0,0}, \quad (3)$$

которое с геометрической точки зрения говорит о том, что если на векторах $\bar{e}_{n+2} = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}$ и $\bar{e}_{n+3} = \overline{(q_n; p_n)}$, приложенных к произвольной целой точке, построить параллелограмм, то он содержит целые точки только в виде своих вершин. Это следует из указанной выше взаимной простоты и формулы Пика из [8] — [7]. Числитель p_{n-1} и знаменатель q_{n-1} подходящей дроби $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ порядка $n-1$ цепной дроби числа α задают соответственно ординату и абсциссу вектора, определяемого алгоритмом “вытягивания носов”:

$$\bar{e}_{n+2}(0; 0) = \bar{e}_n(0; 0) + a_{n-1} \bar{e}_{n+1}(0; 0) = q_{n-1} \bar{e}_1(0; 0) + p_{n-1} \bar{e}_2(0; 0) = \overline{(q_{n-1}; p_{n-1})}_{(0;0)}, \quad \bar{e}_1 = \overline{(1; 0)}, \quad \bar{e}_2 = \overline{(0; 1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

приложенного к точке $O = (0; 0)$, см. [10]. Здесь $(p_{n-1}; q_{n-1})$ — координаты вектора $\bar{e}_{n+2}$, точка $(0; 0)$ у каждого из векторов, а также нижний индекс указывают на точку их приложения. Второе равенство из (4) имеет место в силу (2). В дальнейшем, если у вектора не указана точка его приложения, то считается, что он приложен к точке $(0; 0)$.

Пусть прямая $l_\alpha : y = \alpha x$, $\alpha > 0$, тогда с увеличением порядка $n-1$ подходящей дроби (1) вектор $\bar{e}_{n+2}$ становятся длиннее и его конец ближе к прямой l_α по сравнению с предыдущим, а прямая l_α всегда лежит между двумя соседними векторами последовательности $\{\bar{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, члены которой определяются (4). Вектор $\bar{e}_{N+3} = \overline{(q_N; p_N)} \in l_\alpha$, а остальные $\bar{e}_{2m-1} = \overline{(q_{2m-4}; p_{2m-4})}$ находится под l_α и принадлежит прямоугольному треугольнику $\Delta_{q_{2m-4}} = OB_{q_{2m-4}} B_{X, q_{2m-4}}$, $B_{X, q_{2m-4}} = (q_{2m-4}; 0)$, $B_{q_{2m-4}} = (q_{2m-4}; \alpha q_{2m-4})$, а его конец $B_{q_{2m-4}}^+ = (q_{2m-4}; p_{2m-4}) \in B_{q_{2m-4}} B_{X, q_{2m-4}}$ и $\lfloor \alpha q_{2m-4} \rfloor = p_{2m-4}$ для всех допустимых m . Вектор $\bar{e}_{2m} = \overline{(q_{2m-3}; p_{2m-3})} \notin \Delta_{q_{2m-3}}$ и лежит над l_α .

Если $k \bar{e}_{2m}$ приложить к концу $B_{q_{2m-4}}^+$ вектора $\bar{e}_{2m-1}$, то ломанная $L(O, M_k^+) = \bar{e}_{2m-1} \cup k \bar{e}_{2m}$ $(q_{2m-4}; p_{2m-4}) \in \Delta_{q_{2m-4} + k q_{2m-3}}$ для $k = 1, 2, \dots, a_{2m-2}$. Из (3) и $p_{2m-3} > 0$ следует, что $\lfloor \alpha(q_{2m-4} + k q_{2m-3}) \rfloor = p_{2m-4} + k p_{2m-3}$, $L(O, M_k^+)$ лежит под прямой $l_{OM_k^+}$, проходящей через O и M_k^+ , и внутри многоугольника $OM_k M_k^+ L(O, M_k^+)$ нет целых точек, где $M_k = l_\alpha \cap \{x = q_{2m-4} + k q_{2m-3}\}$. Отметим, что $L(O, M_k^+)$ состоит из двух звеньев и на ней находятся $k+2$ целых точек. С ростом k конец вектора $k \bar{e}_{2m} q_{2m-4}; p_{2m-4}$ приближается к l_α . Минимум достигается при $k = a_{2m-2}$ и при этом этот вектор остается в $\Delta_{q_{2m-4} + a_{2m-2} q_{2m-3}}$.

В случае отрицательного углового коэффициента α прямой l_α меняем направление оси OX на противоположное, получаем положительный углового коэффициента. Если же $\alpha = 0$, то

нет необходимости проводить какие-нибудь преобразования, ибо $l_\alpha = OX$. Прделав необходимые построение в преобразованной системе координат, а затем перейдя к исходной получим построения аналогичные для случая $\alpha > 0$.

Цепная дробь, определяемая числом α из интервала $(0, 1)$, обладает свойством $[0; a_0, a_1, \dots]^{-1} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Вследствие чего после перемены осей координат между собой получим систему координат, в которой угловой коэффициент, определяемый этой цепной дробью, будет больше единицы.

2. Аппроксимации отрезка. Количество целых точек внутри треугольнике

Пусть Pr_X, Pr_Y — ортогональные проекции соответственно на OX и OY , AB — отрезок такой, что $Pr_X AB, Pr_Y AB$ — нецелые точки, l_{AB} — прямая, определяемая A и B , а $P_{AB}^\mp$ — замкнутые полуплоскости, лежащие соответственно слева и справа от l_{AB} при движении от A к B . *Клетчатая область* есть множество единичных квадратов из OXY с целыми вершинами. Если $\mathfrak{M}$ — множество в OXY с непустой внутренностью, то его *клетчатой областью* назовем максимальную клетчатую область $\mathbb{M} \subset \mathfrak{M}$. *Клетчатой областью отрезка AB* — минимальную клетчатую область $\mathbb{S}_{AB} \supset AB, \mathbb{S}_{AB}^\pm = \mathbb{S}_{AB} \cap P_{AB}^\pm$ — его *правой и левой (клетчатой) областью отрезка AB* . Целые точки области $\mathbb{S}_{AB}$ лежат только на её границе $\mathbb{S}_{AB}$. Обозначим через $\mathbb{S}_{AB}^\pm(A^\pm, B^\pm)$ ломанную, полученную из ломанной $\mathbb{S}_{AB} \cap P_{AB}^\pm$ удалением крайних звеньев в случае, если они содержат нецелые вершины, где $A^\pm$ и $B^\pm$ — концы ломанной $\mathbb{S}_{AB}^\pm(A^\pm, B^\pm)$. $\mathbb{S}_{AB}^\pm(A^\pm, B^\pm)$ назовем соответственно *правой и левой ступенчатой (целочисленной) аппроксимацией отрезка AB* . Ломанные $\mathbb{L}^\pm(A^\pm, B^\pm)$ из $\mathbb{S}_{AB}^\pm$ с концами $A^\pm$ и $B^\pm$ и целыми вершинами называются — *правой и левой (целочисленной) аппроксимацией отрезка AB* . Если $Pr_X AB$ ($Pr_Y AB$) — целая точка, то полагаем $\mathbb{S}_{AB} = \emptyset$ и тогда *аппроксимация отрезка AB* будет *минимальный отрезок с целыми концами, содержащий AB* . $\mathbb{L}^\mp(B^\mp, A^\mp)$ ($= \mathbb{L}^\pm(A^\pm, B^\pm)$) будут соответственно *Левой и правой аппроксимацией отрезка BA* — здесь правое (левое) определяется также через движение от B к A .

Пусть $Pr_X \mathbb{S}_{AB} = [q^b, q^e]$ и $Pr_Y \mathbb{S}_{AB} = [p^b, p^e]$, тогда $\mathbb{R}_{AB} = Pr_X^{-1}([q^b, q^e]) \cap Pr_Y^{-1}([p^b, p^e])$ назовем *клетчатым прямоугольником отрезка AB* . Многоугольники $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ ($\supset P_{AB}^\pm$), отсекаемый от $\mathbb{R}_{AB}$ аппроксимацией $\mathbb{L}^\pm(A^\pm, B^\pm)$ — соответственно *правым и левым клетчатым треугольником отрезка AB* . Если $\mathbb{L}^\pm$ аппроксимация отрезка AB без вертикальных звеньев и $L_i^\pm = (q_i^\pm; p_i^\pm)$, $i = 0, 1, \dots, k^\pm + 1$, — её вершины, то число внутренних целых точек $I_{L^\pm}$ из $\mathbb{R}_{L^\pm}$ определяется соответствующим уравнением

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k^+} \left| \frac{p_i^+ + p_{i+1}^+}{2} - p^b \right| |q_{i+1}^+ - q_i^+| &= I_{L^+} + \frac{k^+ + |p_0^+ - p_{k^++1}^+| + |q_0^+ - q_{k^++1}^+| - 1}{2}, \\ \sum_{i=0}^{k^-} \left| p^e - \frac{p_i^- + p_{i+1}^-}{2} \right| |q_{i+1}^- - q_i^-| &= I_{L^-} + \frac{k^- + |p_0^- - p_{k^-+1}^-| + |q_0^- - q_{k^-+1}^-| - 1}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где левая и правая части есть площади соответственно $\mathbb{R}_{L^+}$ и $\mathbb{R}_{L^-}$ — каждая левая равна сумме площадей трапеций, образующих соответствующий из них, а правая вычислена согласно формуле Пика. Из построений $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если AB — такой отрезок, что $Pr_X AB, Pr_Y AB$ — нецелые точки, а AC^+BC^- , прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами и диагональю AB , то количество целых внутренних точек $I_{ABC^\pm}$ треугольников $ABC^\pm$ равно числу $I_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ таких же точек клетчатого треугольника $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$, определяемый произвольной аппроксимации $\mathbb{L}^\pm(A^\pm, B^\pm)$ отрезка AB без вертикальных звеньев.

Расположение произвольно фиксированного треугольника ABC в минимальном прямоугольнике $\mathbb{V}_{ABC}$ с вертикальными и горизонтальными сторонами, содержащем ABC , возможно следующее: 1) Две стороны ABC есть сторона $\mathbb{V}_{ABC}$. 2) Одна сторона ABC — сторона

$\mathbb{V}_{ABC}$ или — диагональ $\mathbb{V}_{ABC}$, а оставшееся вершина принадлежит внутренности одной из сторон $\mathbb{V}_{ABC}$. 3) Одна из вершин ABC совпадает с вершиной $\mathbb{V}_{ABC}$, а оставшиеся вершины лежат внутри смежных сторон $\mathbb{V}_{ABC}$. 4) Сторона ABC есть диагональ $\mathbb{V}_{ABC}$, а оставшееся вершина лежит внутри $\mathbb{V}_{ABC}$. Характерное расположение здесь заключается в том, что в каждом из случаев 1) — 3) дополнение $(ABC)_i^c$ к внутренности из ABC в $\mathbb{V}_{ABC}$ состоит из одного, двух и трех прямоугольных треугольников соответственно. В случае 4) вначале из вершины, лежащей внутри $\mathbb{V}_{ABC}$, опустим перпендикуляры на стороны $\mathbb{V}_{ABC}$ таким образом, что они не пересекали ABC . Вследствие чего $(ABC)_4^c$ будет состоять из трех прямоугольных треугольника и одного прямоугольника. Количество внутренних точек прямоугольных треугольников с вертикальными и горизонтальными катетами вычисляется с помощью предложения 1. Вследствие чего справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть ABC — треугольник в OXY , V_{ABC} — минимальный прямоугольник с вертикальными и горизонтальными сторонами, содержащий ABC , ∂V_{ABC} — граница V_{ABC} , $(ABC)^c$ — дополнение к ABC в V_{ABC} , $I_{V_{ABC}}$ и $I_{(ABC)^c}$ — количества внешних целых точек соответственно из V_{ABC} и $(ABC)^c$, а $I_{\partial ABC}$ — число целых точек на границе ∂V_{ABC} треугольника ABC без учета его целых вершин, принадлежащих ∂V_{ABC} . Тогда количество I_{ABC} целых внутренних точек из ABC определяется равенством: $I_{ABC} = I_{V_{ABC}} - I_{(ABC)^c} - I_{\partial ABC}$

Для нахождения внутренних целых точек $I_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ клетчатого треугольника $\mathbb{R}_{L^\pm(A^\pm, B^\pm)}$ отрезка AB , определяемого $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ достаточно уметь строить $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ без вертикальных звеньев. Такое построение основано на геометрической интерпретации цепных дробей из [11] — [12] и алгоритме (4).

3. Построение аппроксимации отрезка без вертикальных звеньев

Введем следующее обозначение: $(l_1 + f(q_{i_1}, \dots, q_{i_k}); l_2 + f(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})) = (l_1 + f(q_{i_1}, \dots, q_{i_k}); l_2 + p \rightarrow q)$, $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0$ и $\sigma_n = \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$.

3.1. Лемма об аппроксимации отрезка

Из (4) при $n = 2m - 1$ и $n = 2m'$ а также сложения векторов по правилу треугольника получаем

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2) &= \bar{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + a_{2m-2}\bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}) = \\ &= \bar{e}_{2m-1}(l_1; l_2) + \sum_{k=0}^{a_{2m-2}-1} \bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + kq_{2m-3}; l_2 + p \rightarrow q), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m'+2}(l'_1; l'_2) &= a_{2m'-1}\bar{e}_{2m'+1}(l'_1; l'_2) + \bar{e}_{2m'}(l'_1 + a_{2m'-1}q_{2m'-2}; l'_2 + \\ &+ a_{2m'-1}p_{2m'-2}) = \sum_{k'=0}^{a_{2m'-1}-1} \bar{e}_{2m'+1}(l'_1 + k'q_{2m'-2}; l'_2 + k'p_{2m'-2}) + \\ &+ \bar{e}_{2m'}(l'_1 + a_{2m'-1}q_{2m'-2}; l'_2 + a_{2m'-1}p_{2m'-2}). \end{aligned} \quad (7)$$

Дальнейшее разложение осуществим следующим образом. В крайних частях (6) и (7) заменим m на $m - 1$, m' на $m - 1$ и $(l'_1; l'_2)$ на $(l_1 + q_{2m-4} + kq_{2m-3}; l_2 + p \rightarrow q)$, $k \in \sigma_{2m-2}$. Правые части вновь полученных равенств подставим в правую часть второго равенства (6), тогда получим новое представление $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ через векторы с меньшими индексами: $2m - 3$, $2m - 2$ и $2m - 1$, в котором нет слагаемых в виде произведения элемента цепной дроби на вектор с одним из указанных индексов, что является результатом второго шага процесса представления $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ через векторы с меньшими индексами, чем на первом шаге. Результатом первого шага является равенство, образованное крайними частями в (6). Отсутствие указанных произведений важно, ибо оно дает отсутствие целых точек внутри любого многоугольника $\mathbb{M}_k^+$, образованного вектором $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ и каждой из ломанных $L_k^+((l_1; l_2), (l_1 + q_{2m-2}; l_2 + p_{2m-2}))$,

составленной из векторов-слагаемых с точками их приложения, взятых в естественном порядке из правой крайней части любого вновь полученного представления вектора $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ на k -ом шаге, в силу (3), взаимной простоты p_n и q_n при произвольном допустимом n и теоремы Пика. После любого шага каждый вектор-слагаемое из предыдущего представления разлагается в сумму векторов с индексами на одну и две единицы меньше, чем разлагаемый вектор, посредством (6) и (7) при соответствующей замене точек приложения. Этот процесс завершится на K -ом шаге, в результате которого получается представление $\bar{e}_{2m+1}(l_1; l_2)$ в виде суммы векторов с индексами 1 и 2, приложенных к соответствующим точкам. Вершины многоугольника $\mathbb{M}_k^+$ при любом $k = 1, 2, \dots, K$ целые и $\mathbb{M}_{k-1}^+ \subset \mathbb{M}_k^+$, $\mathbb{M}_0^+ = \emptyset$. Ломанная $L_K^+((l_1; l_2), (l_1 + q_{2m-2}; l_2 + p_{2m-2}))$ состоит только из вертикальных и горизонтальных звеньев, любая её пара соседних звеньев образует угол, 90° или 270° , определяемый внутренностью $\mathbb{M}_K^+$.

Аналогично построим процесс представления $\bar{e}_{2m+2}(l'_1; l'_2)$ через векторы с меньшими индексами и без слагаемых в виде произведения элемента цепной дроби на вектор с помощью (6) и (7) при подходящем выборе точек приложения соответствующих векторов. В итоге получим множество многоугольников $\mathbb{M}_k^-$ и ломанных $L_k^-((l'_1; l'_2), (l'_1 + q_{2m-1}; l'_2 + p_{2m-1}))$, $k = 1, 2, \dots, K$, с такими же свойствами, что при построении первого процесса.

Пусть $(l_1; l_2) = (l'_1; l'_2) = (0; 0)$ и $m = m'$, тогда первые равенства из (6) и (7) представляют собой алгоритм “вытягивания носов”. Ломанная $L_K^+(O, B_{2m-2}^+)$ принадлежит $\Delta_{q_{2m-2}}$ и лежит под l_α , а $L_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ — над l_α , предполагается, что $\bar{e}_{2m+1}(0; 0), \bar{e}_{2m+2}(0; 0) \notin l_\alpha$. Внутри многоугольника $OL_K^+(O, B_{2m-2}^+)B_{2m-2}^+B_{2m-1}^-L_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ нет целых точек по тем же причинам, что и выше. На последнем K -ом шаге многоугольник $\mathbb{S}_{OB} = OL_K^+(O, B_{2m-2}^+)B_{2m-2}^+B_{2m-1}^-L_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ является окружением отрезка OB , где $B_{2m-2}^- = (q_{2m-2}; p_{2m-2} + 1)$ и $B = l_\alpha \cap B_{2m+2}^+B_{2m-2}^-$, а $L_K^+(O, B_{2m-2}^+)$ и $L_K^-(O, B_{2m-1}^-)$ — правая и левая ступенчатые аппроксимации отрезка OB .

ЛЕММА 1. Пусть $B = (x; y)$ — произвольно фиксированная точка прямой $l_\alpha : y = \alpha x$ такая, что $x \geq q_2$, а $B^+ = (\lceil x \rceil; \lfloor y \rfloor)$ и $B^- = (\lceil x \rceil; \lfloor y \rfloor + 1)$. Тогда найдутся правая $L^+(O, B^+)$ и левая $L^-(O, B^-)$ аппроксимации отрезка OB без вертикальных звеньев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем для иррационального α . Пусть индекс у $\bar{e}_{2m+1}(0; 0) = (q_{2m-2}; p_{2m-2})$ такой, что $q_{2m-2} \geq \lceil x \rceil > q_{2m-4}$, причем $m \geq 2$. При $q_{2m-2} = \lceil x \rceil$ имеем $L^+(O, B^+) = L_{2m+1}^2 = \bar{e}_{2m+1}(0; 0)$. Для $q_{2m-2} > \lceil x \rceil > q_{2m-4}$ воспользуемся представлением $\bar{e}_{2m+1}(0; 0)$ посредством (6), которое дает последовательность из векторов-слагаемых

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m-1}(0; 0), \bar{e}_{2m}(q_{2m-4}; p_{2m-4}), \bar{e}_{2m}(q_{2m-4} + q_{2m-3}; p \rightarrow q), \dots, \\ \bar{e}_{2m}(q_{2m-4} + (a_{2m-3} - 1)q_{2m-3}; p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (8)$$

Любые i_1 её первых членов образуют ломанную $\hat{L}_{2m-1, 2m}^{i_1+1}$ с не более, чем двумя звеньями и ровно $i_1 + 1$ целыми точками на ней, а точка $(q_{2m-3}; p_{2m-3})$ есть средняя вершина, либо крайняя. Последовательность (8) является результатом, завершающим первый этап процесса построения в общем случае ломанной $L^+(O, B^+)$. Обозначим через $\overleftarrow{I}_{1; 2m+1}$ замкнутый справа интервал $(q_{2m-4}, q_{2m-2}]$, содержащий $\lceil x \rceil$.

Второй этап этого процесса начинается с поиска $\overleftarrow{I}_{2; 2m} (\subset \overleftarrow{I}_{1; 2m+1})$ с помощью векторов с индексом $2m$ из (8). Из $\lceil x \rceil \in \overleftarrow{I}_{1; 2m+1}$ следует, что найдется такой $(k_{2m} + 2)$ -ый член $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$ из (8) для некоторого $k_{2m} (\in \sigma_{2m-2})$, что его абсциссы крайних точек дают $(q_{2m-4} + (1 + k_{2m})q_{2m-3}, q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}) = \overleftarrow{I}_{2; 2m} (\ni \lceil x \rceil)$, а следовательно

$$q_{2m-3} \geq \lceil x \rceil - q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0. \quad (9)$$

Из $q_{2m-3} = \lceil x \rceil$ получаем $L^+(O, B^+) = L_{2m+1, 2m}^{2, k_{2m}+1} = \hat{L}_{2m-1, 2m}^{k_{2m}+3}$ с тремя вершинами и $k_{2m} + 3$ целыми точками. При $k_{2m} = a_{2m-2}$ аппроксимацию $L_{2m+1, 2m}^{2, a_{2m-2}}$ вполне заменяется L_{2m+1}^2 , без

всякого ущерба, так как сумма звеньев первой дает вторую согласно (6) — в итоге мы пришли к результату полученному на предыдущем этапе. Первый нижний индекс у $L_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}+1}$ указывает на то, что при разложении $\bar{e}_{2m+1}(0;0)$ посредством (6) получается последовательность (8), из которой выбирается описанным выше способом $(k_{2m}+2)$ -ой член $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$ — о чем говорят индексы $2m$, верхние индексы 2 и $k_{2m}+1$ говорят о количестве целых точек приобретенных соответственно на первом и втором этапах.

Рассмотрим случай, когда $m = 2$ и первое неравенство в (9) строгое. Из (7) следует, что $\bar{e}_4(q_0; p_0) = a_1 \bar{e}_3(q_0; p_0) + \bar{e}_2((a_1+1)q_0; p \rightarrow q)$, а поэтому концевая точка $B^+ = ([x]; [y])$ искомой аппроксимации совпадает с одной из внутренних целых точек вектора-слагаемого $a_1 \bar{e}_3(q_0; p_0)$ или концевой точкой другого вектора-слагаемого. Следовательно, у этой аппроксимации последнее звено состоит либо не менее, чем одного вектора с индексом три, либо вектора-звена $\bar{e}_2(a_1+1)q_0; p \rightarrow q)$. Так как мы строим аппроксимацию без вертикальных звеньев, то в последнем случае заменив два последних звена вектором $\bar{e}_4(q_0; p_0)$, вследствие чего получим нужную аппроксимацию $L_{5,4}^{2,a_1+1} = L^+(O, B^+)$. Впредь, если при построении $L^+(O, B^+)$ требуется разложение $\bar{e}_4(\cdot; \cdot)$, приложенного к $(\cdot; \cdot)$, то с помощью (7) будем поступать аналогично.

Пусть система (9) состоит из строгих неравенств. Тогда вектор $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$ разложим посредством (7) при $m' = m - 1$ и $(l'_1; l'_2) = (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$, вследствие чего получаем последовательность из векторов-слагаемых:

$$\begin{aligned} &\bar{e}_{2m-1}(q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-1}(q_{2m-4} + q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; \\ &p \rightarrow q), \dots, \bar{e}_{2m-1}((a_{2m-3} - 1)q_{2m-4} + q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \\ &\bar{e}_{2m-2}(a_{2m-3} + 1)q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (10)$$

Любые i_2 её первых членов дают ломанную $\hat{L}_{2m-1,2m-2}^{i_2+1}$, что есть завершение второго этапа процесса $L^+(O, B^+)$ в общем случае.

Третий этап начинается с поиска непересекающихся подмножеств $\overleftarrow{I}_{3;2m-1}, I_{3;2m-2}$ ($\subset \overleftarrow{I}_{2;2m}$) с помощью векторов с индексами $2m-1$ и $2m-2$ из (10), где отсутствие стрелки указывает на то, что правый конец интервала не включен. Каждое из этих подмножеств может содержать $[x]$. Среди векторов из (10) найдется такой вектор, что абсциссы его крайних точек такие, что

$$\begin{aligned} q_{2m-4} &\geq [x] - k_{2m-1}q_{2m-4} - (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}) > 0 \text{ или} \\ q_{2m-5} &> [x] - a_{2m-3}q_{2m-4} - (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}) > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

при некотором $k_{2m-1} = k' (\in \sigma_{2m-3})$. Посредством (10) определяются $\overleftarrow{I}_{3;2m-1}$ и $I_{3;2m-2}$. Векторами из (10), дающими (11), являются соответственно

$$\begin{aligned} &\bar{e}_{2m-1}(k_{2m-1}q_{2m-4} + (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}); p \rightarrow q), \\ &\bar{e}_{2m-2}(a_{2m-3}q_{2m-4} + (q_{2m-4} + k_{2m}q_{2m-3}); p \rightarrow q) \end{aligned} \quad (12)$$

При равенстве в (11) конец первого вектора из (12) совпадает с B^+ и поэтому

$$L^+(O, B^+) = L_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}+1} = \tilde{L}_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}} \cup \hat{L}_{2m-1,2m-2}^{k_{2m-1}+1}$$

с $k_{2m} + k_{2m-1} + 3$ целыми точками, где $\tilde{L}_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}}$ ломанная, полученная из аппроксимации $L_{2m+1,2m}^{2,k_{2m}+1}$ удалением разлагаемого вектора $\bar{e}_{2m}(q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q)$ на предыдущем этапе и заключен между её последними двумя целыми точками. Тильда впредь будет нести подобную нагрузку.

При строгом неравенстве в (11) имеем ломанные $\tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}}$ и $\tilde{L}_{2m+1,2m,2m-2}^{2,k_{2m},a_{2m-3}}$, каждая из которых может привести к $L^+(O, B^+)$ — все зависит какому из двух непересекающихся открытых интервалов $I_{3;2m-1}, I_{3;2m-2}$ принадлежит $[x]$. Разложение векторы из (12) по

формулам (6) и (7) дает две последовательности из векторов-слагаемых:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m-3}((k_{2m-1}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6}+(k_{2m-1}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6}+q_{2m-5}+(k_{2m-1}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \dots, \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6}+(a_{2m-4}-1)q_{2m-5}+(k_{2m-1}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m-3}((a_{2m-3}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-3}(q_{2m-6}+(a_{2m-3}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \dots, \bar{e}_{2m-3}(a_{2m-5}-1)q_{2m-6}+(a_{2m-3}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \bar{e}_{2m-4}(a_{2m-5}q_{2m-6}+(a_{2m-3}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q). \end{aligned} \quad (14)$$

Любые $i_{3,1}$ и $i_{3,2}$ их первые члены образуют соответственно ломанные $\hat{L}_{2m-3,2m-2}^{i_{3,1}}$ и $\hat{L}_{2m-3,2m-4}^{i_{3,2}}$, чем завершается третий этап.

Четвертый этап начинается с поиска непересекающихся подмножеств $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-3}$, $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-2} (\subset \overleftarrow{I}_{3,2m-1})$ и $\overleftarrow{I}_{3,2;2m-2}$, $I_{3,2;2m-4} (\subset I_{3,2m-2})$, содержащих $[x]$. Последовательности (13) и (14) дают соответственно по паре систем:

$$\begin{aligned} q_{2m-6} &\geq [x] - (1+k_{2m-1})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0, \quad q_{2m-5} \geq \\ [x] - q_{2m-6} - k_{2m-2}q_{2m-5} - (1+k_{2m-1})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} &> 0, \\ q_{2m-6} &\geq [x] - k_{2m-3}q_{2m-6} - (1+a_{2m-3})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0, \\ q_{2m-7} &> [x] - a_{2m-5}q_{2m-6} - (1+a_{2m-3})q_{2m-4} - k_{2m}q_{2m-3} > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

для некоторых $k_{2m-2} (\in \sigma_{2m-4})$ и $k_{2m-3} (\in \sigma_{2m-5})$. Эти системы определяют $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-3}$, $\overleftarrow{I}_{3,1;2m-2}$ и $\overleftarrow{I}_{3,2;2m-3}$, $I_{3,2;2m-4}$. Каждое двойное неравенство из (15) задаются соответственно 1-ым, $(k_{2m-2}+2)$ -ым членами из (13) и $(k_{2m-3}+1)$ -ым, $(a_{2m-5}+1)$ -ым членами из (14), а именно

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m-3}(k_{2m-1}q_{2m-4}+q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \\ \bar{e}_{2m-2}(q_{2m-6}+k_{2m-2}q_{2m-5}+(k_{2m-1}+1)q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q), \\ \bar{e}_{2m-3}(k_{2m-3}q_{2m-6}+a_{2m-3}q_{2m-4}+q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q) \\ \bar{e}_{2m-4}(a_{2m-5}q_{2m-6}+a_{2m-3}q_{2m-4}+q_{2m-4}+k_{2m}q_{2m-3}; p \rightarrow q) \end{aligned} \quad (16)$$

При равенстве в каждом неравенств из (15) имеем соответственно

$$\begin{aligned} L^+(O, B^+) &= L_{2m+1,2m,2m-1,2m-3}^{2,k_{2m},k_{2m-1},1} = \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}} \cup \hat{L}_{2m-3,2m-2}^1, \\ L^+(O, B^+) &= L_{2m+1,2m,2m-1,2m-2}^{2,k_{2m},k_{2m-1},k_{2m-2}+2} = \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1}^{2,k_{2m},k_{2m-1}} \cup \hat{L}_{2m-3,2m-2}^{k_{2m-2}+2}, \\ L^+(O, B^+) &= L_{2m+1,2m,2m-2,2m-3}^{2,k_{2m},a_{2m-3},k_{2m-3}+1} = \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-2}^{2,k_{2m},a_{2m-3}} \cup \hat{L}_{2m-3,2m-4}^{k_{2m-3}+1}. \end{aligned}$$

Число целых точек каждой из возможных аппроксимаций равно сумме её верхних индексов.

При строгих неравенствах каждый из векторов в (16) представляем через (6) и (7) описанным выше методом. Вследствие чего получаем четыре последовательности из векторов-слагаемых подобно (13) и (14), что завершает четвертый этап. В этом случае мы имеем четыре возможных ломанные

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1,2m-3}^{2,k_{2m},k_{2m-1},0}, \quad \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-1,2m-2}^{2,k_{2m},k_{2m-1},k_{2m-2}+1} \\ \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-2,2m-3}^{2,k_{2m},a_{2m-3},k_{2m-3}}, \quad \tilde{L}_{2m+1,2m,2m-2,2m-4}^{2,k_{2m},a_{2m-3},a_{2m-5}} \end{aligned}$$

Любая из них может быть достроена до аппроксимаций $L^+(O, B^+)$ описанным выше методом. Выбор такой ломанной зависит от принадлежности $[x]$ к одному из открытых непересекающихся интервалов $I_{3,1;2m-3}$, $I_{3,1;2m-2}$, $I_{3,2;2m-3}$, $I_{3,2;2m-4}$. Далее, каждый раз, переходя от предыдущего этапа к последующему, как и раньше, с небольшими вариациями после некоторого m -го этапа, приходим к совокупности последовательностей, завершающим очередной

этап. Любая из них состоит из векторов с индексами 3 и 4, причем каждая из этих векторов непосредственно может привести только к одной единственной аппроксимации $L^+(O, B^+)$ без вертикальных звеньев. Что является индуктивным заключением первой части леммы 1, к установлению которого и перейдем.

Произвольная из завершающих последовательностей на каждом этапе состоит из векторов с индексами: $2s - 1$ и $2s$ или $2t - 1$ и $2t - 2$. В первом случае векторы $\bar{e}_{2s-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2s}(\cdot; \cdot)$ входят в такую последовательность соответственно один раз и a_{2s-2} раза. Во втором $\bar{e}_{2t-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2t-2}(\cdot; \cdot) - a_{2t-3}$ раза и один раз. Абсцисса $[x]$ последней вершины B^+ искомой аппроксимации согласно нашему методу принадлежит интервалу, замкнутому справа, и определяемому одним из указанных выше векторов. Вследствие чего имеем одну из пар опорных векторов: $\bar{e}_{2s-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2s}(k_{2s}q_{2s-3} + \cdot; p \rightarrow q)$ или $\bar{e}_{2t-1}(k_{2t-1}q_{2t-4} + \cdot; p \rightarrow q)$ и $\bar{e}_{2t-2}(a_{2t-1}q_{2t-4} + \cdot; p \rightarrow q)$ при подходящем выборе $k_{2s} \in \sigma_{2s-2}$ и $k_{2t-1} \in \sigma_{2t-3}$. Каждый из таких опорных векторов разлагается по формуле (6) или (7) — как это делали прежде, что дает совокупность последовательности, завершающих этап. Поэтому на последующем этапе число опорных векторов вдвое больше векторов такого же сорта, чем на предыдущем. Это будет происходить до тех пор, пока один из опорных векторов не будет равен $\bar{e}_4(\cdot; \cdot)$. что случится на m -ом этапе, при этом минимальный и максимальные индексы у векторов такого типа на этом этапе равны 4 и $m+2$. Теперь с $\bar{e}_4(\cdot; \cdot)$ поступаем также, как с $\bar{e}_4(q_0; p_0)$ в первом абзаце после (9), чтобы не появились вертикальные звенья и после чего он не участвует в построении последовательностей, завершающих этап. Таким образом поступаем на каждом очередном этапе, а при появлении векторов в таких последовательностях с индексом три переходим к строению $L^+(O, B^+)$ с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям в первом абзаце после (9), конечно при условии, что $[x]$ принадлежит соответствующему интервалу, замкнутому справа. Вследствие чего они также не участвуют в образовании последовательностей завершающих этап. В итоге на $2(m+1)$ -ом этапе придем к индуктивному заключению, а затем с векторами, имеющими индексы 3 и 4, поступаем, как и выше, чем завершается доказательство существования правой аппроксимативно отрезка OB без вертикальных звеньев.

Построение левой аппроксимации $L^-(O, B^-)$ отрезка OB без вертикальных звеньев при иррациональном α проводится аналогично, как и $L^+(O, B^+)$, только для этого необходимо преобразовать формулы (6) и (7) через замену $2m$ на $2m+1$. Вследствие чего звенья ломанной $L^-(O, B^-)$ будут лежать над l_α , а поэтому $B^- = ([x]; [y] + 1)$.

Доказательство данной леммы для рационального α . В этом случае на l_α лежит бесконечно много целых точек, а поэтому OB может принадлежать некоторые из них. Если целых точек внутри OB нет, то построение требуемых аппроксимаций осуществляем, как при иррациональном α . В противном случае выберем ближайшую целую точку O^* к B и возьмем её за начало новой системы координат с базисными векторами $\bar{e}_1(O^*)$ и $\bar{e}_2(O^*)$. Затем построим правую и левую аппроксимации $L^\pm(O^*, B^\pm)$ отрезка O^*B без вертикальных звеньев, как при иррациональном α . Требуемые аппроксимации $L^\mp(O, B^\pm) = OO^* \cup L^\mp(O^*, B^\pm)$, чем завершается доказательство леммы. $\square$

Метод построения правой и левой аппроксимаций отрезка AB без вертикальных звеньев в лемме 1 дает координаты всех их целых вершин, а поэтому мы можем вычислить количество целых внутренних точек посредством (5) правого и левого клетчатых треугольников отрезка OB .

3.2. Аппроксимации отрезка

ТЕОРЕМА 2. Если AB — отрезок в OXY такой, что $Pr_X AB$ и $Pr_Y AB$ не являются целыми точками, то существует правая и левая аппроксимации отрезка AB без вертикальных звеньев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из множества ближайших целых точек от правой (левой) ступенчатой

аппроксимации $S^+(A^+, B^+)$ ($S^-(A^-, B^-)$) отрезка AB до L_{AB} выберем любую из них, например, O^+ (O^-). Если O^+ принадлежит l_{AB} , то положим $O^* = O^+ = O^-$. Точку O^* возьмем в качестве начала новой системы координат $O^*X^*Y^*$, оси которой параллельны OX и OY вплоть до возможного совпадения, с таким ортонормированным базисом $\bar{e}_1^*(O^*)$ и $\bar{e}_2^*(O^*)$, что сам отрезок AB или его часть O^*A лежат в первой четверти I_A^* системы $O^*X^*Y^*$. Далее на основании леммы 1 строим правую и левую аппроксимации отрезка, лежащего в I_A^* , которая будут полными или частичными аппроксимациями отрезка AB — все зависит от $AB \cap I_A^*$. При $AB \cap I_A^* = AB$ построенные аппроксимации будут удовлетворять данной теореме, а при $AB \cap I_A^* = O^*A$ правая и левая аппроксимации $L^\pm(O^*, A^\pm)$ отрезка O^*A будут частичными. Для построения полных аппроксимаций отрезка AB без вертикальных звеньев поступим следующим образом. Изменим направление $\bar{e}_1^*(O^*)$ и $\bar{e}_2^*(O^*)$ на противоположное, тогда O^*B принадлежал первой четверти, которая в $O^*X^*Y^*$ является третьей четвертью. Тогда в силу леммы 1 правая и левая аппроксимации $L^\pm(O^*, B^\pm)$ отрезка O^*B дают требуемые аппроксимации $L^\pm(A^\pm, B^\pm) = L^\pm(O^*, A^\pm) \cup L^\pm(O^*, B^\pm)$.

В случае, когда $O^+, O^- \notin l_{AB}$ поступаем так — проводим через $O^\pm$ соответственно прямые $l_{AB}^\pm$ параллельные l_{AB} . Параллелограмм, высекаемый l_{AB}^+ и l_{AB}^- из клетчатой области $\mathbb{S}_{AB}$ отрезка AB может содержать целые точки в виде вершин ступенчатой аппроксимации только на своих сторонах $A'^+B'^+$ и $A'^-B'^-$, определяемых соответственно l_{AB}^+ и l_{AB}^- . Аналогично, как и выше строим правую и левую аппроксимации $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ соответственно отрезков $A'^\pm B'^\pm$ без вертикальных звеньев. Согласно методу построению аппроксимаций целые точки на стороне $A'^\pm B'^\pm$, если таковы есть, будут вершинами $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$, а поэтому внутри многоугольника $L^+(A^+, B^+)B^+B^-L^-(A^-, B^-)A^-A^+$, которому принадлежит AB , нет целых точек. Вследствие чего получаем требуемые аппроксимации $L^\pm(A^\pm, B^\pm)$ отрезка AB , что доказывает данную теорему.

□

Ломанные из леммы 1 с учетом теоремы 2 вполне могут быть взяты для доказательства предложения 1.

4. Вычисления разности между белыми и черными клетками прямоугольного треугольника $OA(t)B(t)$

Разделы 4–6 составляют вторую часть статьи, в которой рассматриваются клетчатые области с раскрашенными единичными квадратами в шахматном порядке и $\alpha (> 0)$ считается фиксированным иррациональным числом.

Пусть единичные квадраты целочисленной решетки из первого квадранта I_{OXU} в OXU раскрашены в шахматном порядке, $f_{t,OXU} : y = -\alpha \cdot x + t$, $t > 0$, — семейство прямых и $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. При каждом t прямая $f_{t,OXU}$ отсекает от I_{OXU} треугольник $\Delta(t) = OA(t)B(t)$, $A(t) = OX \cap f_{t,OXU}$, $B(t) = OY \cap f_{t,OXU}$.

ТЕОРЕМА 3. *Разность $u(t)$ между белыми и черными клетками из $\Delta(t)$ не ограничена ни снизу, ни сверху, когда $t \rightarrow \infty$.*

Данная теорема представляет собой задачу, поставленную в [13].

4.1. Рекуррентные формулы для клетчатых областей $E_n(l_1; l_2)$ и их разностей $\epsilon_n(l_1; l_2)$

В дальнейшем нижний индекс у объекта в виде обозначения системы координат говорит, что этот объект берется из указанной системы координат, но индекс, равный $A(\alpha q)e_1e_2$, для

удобства записи в основном будем опускать, ибо почти всюду мы работаем в системе координат $A(\alpha q)e_1e_2$.

Множество из раскрашенных клеток $\Delta(\alpha q)$ обозначим $\mathbf{U}(\alpha q)$, $q \in \mathbb{N}$, а $A(\alpha q)e_1e_2$ — новую систему координат с началом $A(\alpha q) = (q; 0)_{OXU}$ и ортонормированным базисом $\bar{e}_1(q; 0)_{OXU}$ и $\bar{e}_2(q; 0)_{OXU}$, и осью абсцисс $A(\alpha q)e_1$, противоположно направленной OX , осью ординат $A(\alpha q)e_2$ сонаправлена с OY , угловая раскрашенная клетка K_O из первого квадранта I_{OXU} белая.

Цвет угловой раскрашенной клетки $K_{A(\alpha q)}$ из $I_{A(\alpha q)e_1e_2}$ определится через

$$K_{A(\alpha q)} = \begin{cases} 1, & q = 2q' - 1, \\ -1, & q = 2q', \end{cases} \quad q' \in \mathbb{N} \quad (17)$$

— в первом случае $K_{A(\alpha q)}$ белая, а во втором черная, так как K_O белая.

Пусть $(l_1; l_2)$ — целая точка с неотрицательными координатами в $A(\alpha q)e_1e_2$, а $K_{(l_1; l_2)}(q)$ — раскрашенная клетка, у которой точка $(l_1; l_2)$ является ближайшей вершиной к $A(\alpha q)$. По $(l_1; l_2)$ клетка $K_{(l_1; l_2)}(q)$ определяется однозначно, поэтому $(l_1; l_2)$, назовем её *координатами*.

Клетке $K_{(l_1; l_2)}(q)$ припишем единицу, если она белая и минус единицу в противном случае, откуда с учетом (17) имеем

$$\begin{aligned} K_{(l_1; l_2)}(q) &= (-1)^{q+1+l_1+l_2}, \\ K_{(l_1; l_2)}(2q' - 1) &= (-1)^{l_1+l_2}, \quad K_{(l_1; l_2)}(2q') = (-1)^{1+l_1+l_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для четностей чисел введем следующее обозначение:

$$2l = l^+ = \oplus, \quad 2l + 1 = l^- = \ominus, \quad l \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

Верхние индексы, отражающие четность и нечетность числа, их используем в тех случаях, когда для нас важны четность и величина числа одновременно, а $\oplus$ и $\ominus$ —, когда на результат влияет только четность. Над символами $\oplus$ и $\ominus$ можно совершать операции сложения и умножения по тем же правилам, что и над целыми числами, только результатом будет не число, а его четность. Если алгебраическое выражение состоит из членов в виде целых чисел и символов четности, то эти числа заменяем их четностью и совершают заданные операции.

Выберем вектор $\bar{d} = (\bar{d}_1; \bar{d}_2)$, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_0$, целую точку $(l_1; l_2)$ такие, что вектор $\bar{d}(l_1; l_2) = (\bar{d}_1; \bar{d}_2)_{(l_1; l_2)}$, приложенный к $(l_1; l_2)$ и принадлежит $I_{OXU} \cap I_{A(\alpha q)e_1e_2}$. Тогда через $\mathbf{D}(l_1; l_2) = \mathbf{D}(\bar{d}(l_1; l_2))$ обозначим клетчатую область, образованную раскрашенными клетками из $I_{A(\alpha q)e_1e_2}$, ограниченную OY , прямыми: $e_2 = l_2$, $e_2 = l_2 + d_2$ и $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)_{(l_1; l_2)}$. $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ однозначно определяется $\bar{d}(l_1; l_2)$, который назовем *определяющим вектором области $\mathbf{D}(l_1; l_2)$* , а разность $\delta(l_1; l_2)$ между её белыми и черными клетками — её *разностью*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Разность $\delta(l_1; l_2)$ клетчатой области $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ с определяющим вектором $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)_{(l_1; l_2)}$ при фиксированных его координатах зависит только от четностей l_1 и l_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что если $l_1^\pm = m_1^\pm$ и $l_2^\pm = m_2^\pm$ у определяющих векторов $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)_{(l_1; l_2)}$ и $(\bar{d}_1; \bar{d}_2)_{(m_1; m_2)}$ соответственно $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ и $\mathbf{D}(m_1; m_2)$ при фиксированных d_1 и d_2 , то $\delta(l_1; l_2) = \delta(m_1; m_2)$. При параллельном перемещении $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ или $\mathbf{D}(m_1; m_2)$ в $I_{OXU} \cap I_{A(\alpha q)e_1e_2}$ на одну единицу вдоль $A(\alpha q)e_1$ или $A(\alpha q)e_2$ каждая раскрашенная клетка из этих областей меняет цвет на противоположный. Если $l_1 \geq m_1$, то переместим $\mathbf{D}(m_1; m_2)$ на вектор $(l_1 - m_1; l_2 - m_2)$ с четными координатами. Вследствие чего клетчатая область $(l_1 - m_1; l_2 - m_2) + \mathbf{D}(m_1; m_2)$ накроет часть $\mathbf{D}(l_1; l_2)$ (при равенстве они совпадут), причем белые клетки с белыми, а черные с черными. Ненакрытая часть $\mathbf{D}(l_1; l_2)$

является прямоугольником, горизонтальная сторона которого имеет четную длину, а поэтому $\delta(l_1; l_2) = \delta(m_1; m_2)$, что доказывает данное предположения.

□

Векторы (6) при $2m = n + 1$ определяют клетчатые области

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+2}(l_1; l_2) &= \mathbf{E}_{n+2}(\bar{e}_{n+2}(l_1; l_2)), \quad \mathbf{E}_n(l_1; l_1) = \mathbf{E}_n(\bar{e}_n(l_1; l_2)), \\ a_{n-1}\mathbf{E}_{n+1}(l_1 + q_{n-2}; l_2 + p_{n-2}) &= \mathbf{E}_{n+1}(a_{n-1}\bar{e}_{n+1}(l_1 + q_{n-2}; l_2 + p_{n-2})), \\ a_{n-1}\mathbf{E}_{n+1}(l_1; l_2) &= \mathbf{E}_{n+1}(a_{n-1}\bar{e}_{n+1}(l_1; l_2)), \quad \mathbf{E}_n(l_1 + a_{n-1}q_{n-2}; \\ l_2 + a_{n-1}p_{n-2}) &= \mathbf{E}_n(\bar{e}_n(l_1 + a_{n-1}q_{n-2}; l_2 + a_{n-1}p_{n-2})). \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что клетчатые области вида $k\mathbf{E}_l(m_1; m_2)$, $k \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$, из (20) обладают следующим свойством

$$\begin{aligned} k\mathbf{E}_l(m_1; m_2) &= \cup_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}_l(m_1 + q_{l-3}j; m_2 + p_{l-3}j), \\ \mathbf{E}_l(m_1 + q_{l-3}j_1; m_2 + p_{l-3}j_2) \cap \mathbf{E}_l(m_1 + q_{l-3}j_2; m_2 + p_{l-3}j_1) &= \emptyset, \\ j_1, j_2 &= 0, 1, \dots, k-1; \quad j_1 \neq j_2. \end{aligned} \quad (21)$$

(6) и (7) при $m' = m$ и $(l'_1; l'_2) = (l_1; l_2)$ дают рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_2) &= \\ \mathbf{E}_{2m-1}(l_1; l_2) \cup a_{2m-2}\mathbf{E}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}), & \\ \mathbf{E}_{2m-1}(l_1; l_2) \cap a_{2m-2}\mathbf{E}_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2m+2}(l_1; l_2) &= \\ a_{2m-1}\mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_2) \cup \mathbf{E}_{2m}(l_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + a_{2m-1}p_{2m-2}), & \\ a_{2m-1}\mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_2) \cap \mathbf{E}_{2m}(l_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + a_{2m-1}p_{2m-2}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad (23)$$

При $l_1; l_2 = A(\alpha q) = (q; 0)_{OXY} = (0; 0)$, тогда из рассуждений в первом абзаце после (4) для $n = 2m + 1$ для клетчатой области $\mathbf{U}(\alpha q)$ треугольника $\Delta(\alpha q)$ получаем: $\mathbf{U}(\alpha q) \cap \mathbf{E}_n(0; 0) = \mathbf{E}_n(0; 0)$, $q > q_{2m-2}$.

Выразим правую часть из (7) при $m' = m$ и $(l'_1; l'_2) = (l'_1; l'_2)$ через $\bar{e}_{2m-1}(\cdot; \cdot)$ и $\bar{e}_{2m}(\cdot; \cdot)$ с помощью правой части (6), тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{e}_{2m+2}(l_1; l_2) &= \sum_{k'=0}^{a_{2m-1}-1} \bar{e}_{2m+1}(l_1 + k'q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) + \bar{e}_{2m}(l_1 + \\ a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) &= \sum_{k'=0}^{a_{2m-1}-1} \bar{e}_{2m-1}(l_1 + k'q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) + \\ \sum_{k'=0}^{a_{2m-1}-1} \sum_{k=0}^{a_{2m-2}-1} \bar{e}_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + kq_{2m-3} + k'q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) &+ \\ \bar{e}_{2m}(l_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l_2 + p \rightarrow q) & \end{aligned} \quad (24)$$

Из (6), (21) – (24) и предложения 2 вытекает, что разности $\epsilon_{2m+1}(l_1; l_2)$ и $\epsilon_{2m+2}(l'_1; l'_2)$ соответственно клетчатых областей $\mathbf{E}_{2m+1}(l_1; l_1)$ и $\mathbf{E}_{2m+2}(l'_1; l'_2)$ определяются рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} \epsilon_{2m+1}(l_1; l_2) &= \epsilon_{2m-1}(l_1; l_2) + \sum_{j=0}^{a_{2m-2}-1} \epsilon_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3}j; l_2 + \\ p \rightarrow q) &= \epsilon_{2m-1}(l_1; l_2) + (b_{2m-2} + 1)\epsilon_{2m}(l_1 + q_{2m-4}; l_2 + p_{2m-4}) + \\ (b_{2m-2} + \delta_{\oplus, a_{2m-2}^\pm})\epsilon_{2m}(l_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3}; l_2 + p \rightarrow q), & \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{2m+2}(l'_1; l'_2) &= \sum_{j=0}^{a_{2m-1}-1} \epsilon_{2m+1}(l'_1 + q_{2m-2}j; l'_2 + p_{2m-2}j) + \epsilon_{2m}(l'_1 + \\ a_{2m-1}q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q) &= (b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m+1}(l'_1; l'_2) + (b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^\pm}) \\)\epsilon_{2m+1}(l'_1 + q_{2m-2}; l'_2 + p_{2m-2}) + \epsilon_{2m}(l'_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q) &= \\ (b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m-1}(l'_1; l'_2) + (b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^\pm})\epsilon_{2m-1}(l'_1 + q_{2m-2}; l'_2 + & \\ p_{2m-2}) + (b_{2m-2} + 1)(b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4}; l'_2 + p_{2m-4}) + (b_{2m-2} + & \\ \delta_{\oplus, a_{2m-2}^\pm})(b_{2m-1} + 1)\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3}; l'_2 + p \rightarrow q) + (b_{2m-2} + 1) & \\ (b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^\pm})\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4} + q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q) + (b_{2m-2} + & \\ \delta_{\oplus, a_{2m-2}^\pm})(b_{2m-1} + \delta_{\oplus, a_{2m-1}^\pm})\epsilon_{2m}(l'_1 + q_{2m-4} + q_{2m-3} + q_{2m-2}; l'_2 + & \\ p \rightarrow q) + \epsilon_{2m}(l'_1 + a_{2m-1}q_{2m-2}; l'_2 + p \rightarrow q). & \end{aligned} \quad (26)$$

где $b_n = \lfloor \frac{a_n-1}{2} \rfloor$, а $\delta_{\circ, \bullet}, \circ, \bullet \in \{\oplus, \ominus\}$ обозначим символ Кронекера, который равен 1 при $\circ = \bullet$, а в противном случае — 0.

В силу предложения 2 имеет смысл ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \epsilon_n^{++} &= \epsilon_n(l_1^+; l_2^+) = \epsilon_n(\oplus; \oplus), \quad \epsilon_n^{-+} = \epsilon_n(l_1^-; l_2^+) = \epsilon_n(\ominus; \oplus), \\ \epsilon_n^{+-} &= \epsilon_n(l_1^+; l_2^-) = \epsilon_n(\oplus; \ominus), \quad \epsilon_n^{--} = \epsilon_n(l_1^-; l_2^-) = \epsilon_n(\ominus; \ominus), \end{aligned} \quad (27)$$

$n = 2m + 1, 2m + 2$, а $\hat{\epsilon}_n$ — четверка последовательных членов $\epsilon_n^{++}, \epsilon_n^{-+}, \epsilon_n^{+-}, \epsilon_n^{--}$ последовательности $\{\hat{\epsilon}_n\}_{n=1}^\infty$. Каждый последующий её член вычисляется через восемь её предыдущих при известных четностях параметров: $a_{2m-2}, a_{2m-1}, p_{2m-4}, p_{2m-3}, p_{2m-2}, q_{2m-4}, q_{2m-3}, q_{2m-2}$, ибо задано $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ и есть (2).

Пусть l_1 и l_2 заданы в (25) и (26), тогда их четности известны. Правые части из (25) и (26) есть линейные комбинации относительно компонент из

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{2m-1, 2m} &= (\hat{\epsilon}_{2m-1}, \hat{\epsilon}_{2m})^\tau = \\ &= (\epsilon_{2m-1}^{++}, \epsilon_{2m-1}^{-+}, \epsilon_{2m-1}^{+-}, \epsilon_{2m-1}^{--}, \epsilon_{2m}^{++}, \epsilon_{2m}^{-+}, \epsilon_{2m}^{+-}, \epsilon_{2m}^{--})^\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

взятых в том же порядке, где τ — операция транспонирования. Рассмотрим матрицу $B_{2m+1, 2m+2}$ размера 8×8 , первые четыре строки и оставшиеся которой есть коэффициенты линейной комбинации соответственно из (25) и (26) относительно компонент из крайней правой части в (28), взятых в порядке их следования, когда $(l_1; l_2)$ принимают значения из упорядоченного множества: $\langle (\oplus; \oplus), (\ominus; \oplus), (\oplus; \ominus), (\ominus; \ominus) \rangle$. Тогда крайние части из (25) и (26) в матричном виде представимы следующим образом:

$$\bar{\epsilon}_{2m+1, 2m+2} = B_{2m+1, 2m+2} \bar{\epsilon}_{2m-1, 2m} \quad (29)$$

с начальными условиями

$$\bar{\epsilon}_{1, 2} = (\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)^\tau = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1)^\tau, \quad q = 2q', \quad (30)$$

$$\bar{\epsilon}_{1, 2} = (\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)^\tau = (0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0)^\tau, \quad q = 2q' + 1, \quad (31)$$

так как $\epsilon_1(l_1; l_2) = 0$ и $\mathbf{E}_2(l_1; l_2) = \cup_{j=l_1}^{q-1} K_{(j; l_2)}(q)$. Из последнего следует, что $\epsilon_2(l_1; l_2)$ зависит от цветов крайних клеток $K_{(l_1; l_2)}(q)$ и $K_{(q-1; l_2)}(q)$, цвета которых в силу (18) определяется четностью q при фиксированных l_1 и l_2 , что и дает числовые значения в (30) и (31), которые не зависят от конкретного α .

Матрица $B_{2m+1, 2m+2}$ есть блочная матрица вида:

$$B_{2m+1, 2m+2} = \begin{pmatrix} B_{11; 2m-1} & B_{12; 2m} \\ B_{21; 2m-1} & B_{22; 2m} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Эти блоки есть матрицы $B_{11; 2m-1}$ и $B_{21; 2m-1}$ размера 4×4 , образованные коэффициентами при $\hat{\epsilon}_{2m-1}$ соответственно из первых и последних четырех равенств в (29). Аналогично образуются $B_{21; 2m}$ и $B_{22; 2m}$ из коэффициентов при $\hat{\epsilon}_{2m}$ также в (29). В силу (25) блок $B_{11; 2m-1} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4$ при любом α .

4.2. Достаточные условия, при который теорема 3 справедлива

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $L^- = L(A(\alpha q), B^-(\alpha q))$ — левая аппроксимация отрезка $A(\alpha q)B(\alpha q)$ из леммы 1 после замены OXY на $A(\alpha q)e_1e_2$, а $L_i = (Q_i; P_i)$, $i = 0, 1, \dots, k+1$, — её вершины, $L_0 = A(\alpha q)$ и $L_{k+1} = B^-(\alpha q)$, тогда разность клетчатой области $U(\alpha q)$ треугольника $\Delta(\alpha q)$ задаются формулой:

$$u(\alpha q) = \sum_{i=0}^k \lambda_i(Q_i; P_i), \quad (33)$$

где $\lambda_i(Q_i; P_i)$ — разность клетчатой области с определяющим вектором $\overline{L_i L_{i+1}}(Q_i; P_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая аппроксимации L^- принадлежит $\Delta(\alpha q)$ в силу её построения, а в силу определения аппроксимации отрезка следует, что внутри многоугольника $A(\alpha q)B(\alpha q)L^-B^-(\alpha q)$ нет целых точек. Поэтому $U(\alpha q) = L^-$, где L^- — клетчатая область многоугольника $\mathbb{L}^-$, отсекаемого от $\Delta(\alpha q)$ аппроксимацией L^- , откуда имеем $u(\alpha q) = \lambda^-$ для их разностей. Согласно методу построения L^- из леммы 1 каждый её вектор-звено $\overline{LiLi+1}(Q_i; P_i) = \sum_{j=0}^{k_j} \bar{e}_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$ в общем случае, где $\bar{e}_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$ — последовательно приложенные друг к другу, коллинеарных векторов каждый из которых с точкой его приложения находится по (6) или (24). Отсюда $\lambda_i(Q_i; P_i) = \sum_{j=0}^{k_j} \epsilon_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$, где $\epsilon_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$ — разности клетчатых областей с определяющим вектором $\bar{e}_{i,j}(q_{i,j}; p_{i,j})$. Эти разности вычисляются с помощью (25) или (26). Теперь суммирования по всем $\lambda_i(Q_i; P_i)$, получаем (33). $\square$

Пусть $A(\alpha Q_i)$ — начало системы координат $A(\alpha Q_i); e_1 \bar{e}_2$, $L_i^-(\alpha Q_i)$ — левая аппроксимация отрезка $A(\alpha Q_i)B(\alpha Q_i)$, как в предложении 3, и $u(\alpha Q_i)$ — разность клетчатой области $U(\alpha Q_i)$ треугольника $\Delta(\alpha Q_i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $\mathcal{A}$ — множество положительных иррациональных чисел таких, что для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ найдется строго возрастающая последовательность $\{Q_{\alpha,i}\}_{i=1}^\infty$ положительных чисел, для которой $\lim_{i \rightarrow \infty} u(\alpha Q_{\alpha,i}) = \infty$ ($\lim_{i \rightarrow \infty} u(\alpha Q_{\alpha,i}) = -\infty$), то при любом фиксированном $\alpha \in \mathcal{A}$ справедлива теорема 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы 3 об неограниченности сверху, очевидно. Неограниченность снизу следует из замены $\{Q_{\alpha,i}\}_{i=1}^\infty$ на $\{Q_{\alpha,i} + 1\}_{i=1}^\infty$, ибо $u(\alpha(Q_{\alpha,i} + 1)) \leq -u(\alpha Q_{\alpha,i}) + 1$, так как $U(\alpha(Q_{\alpha,i} + 1))$ получается из $U(\alpha Q_{\alpha,i})$ при параллельном сдвиге $A(\alpha Q_{\alpha,i})e_1 \bar{e}_2$ на $(-1; 0)$, при этом раскрашенные клетки из $U(\alpha Q_{\alpha,i})$ поменяют цвет на противоположный, а к ней добавится полоса из клеток — с белой нижней клеткой —, прилегающих к OY , содержащаяся в $\Delta(\alpha(Q_{\alpha,i} + 1))$. Эти факты устанавливаются аналогичным методом, как при доказательстве предложения 2 и при получения начальных условий (30).

Для $\lim_{i \rightarrow \infty} u(\alpha Q_{\alpha,i}) = -\infty$ доказательство аналогично. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\alpha \in \mathcal{A}$ из предложения 4, то $\alpha^{-1} \in \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая $f_{t, OXY} : y = -\alpha \cdot x + t$ в системе координат $OX'Y'$ при $OX' = OY$ и $OY' = OX$ будет иметь вид: $f_{t', OX'Y'} : y' = -\alpha^{-1} \cdot x' + t'$, а поэтому $u(t) = u'(t')$, где $u(t)$ и $u'(t')$ разности соответственно совпадающих клетчатых областей $U(t)$ в $OX'Y'$ и $U'(t')$ в $OX'Y'$ вплоть до раскраски, отсекаемого треугольника одной и той же прямой. Из $u(t) = u'(t')$ следует справедливость данного предложение $\square$

5. Доказательство теоремы 3 для $\alpha = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1, 1, \dots]$

Это доказательство будет основано на предложении 4.

5.1. Последовательность $\{\bar{e}_{2m+1, 2m+2}^\varphi\}_{m=0}^\infty$

Для вычисления каждой из разностей $\epsilon_n^\varphi(l_1; l_2)$ применим рекуррентную формулу (29) с начальными условиями (30). Вследствие чего потребуется нахождения каждого из блоков $B_{12; 2m}$, $B_{21; 2m}$ и $B_{22; 2m}$ в (32) для $\alpha = \varphi$.

С этой целью введем понятие периодичности по четности аргументов последовательности $\{\bar{e}_{2m+1, 2m+2}^\varphi\}_{m=0}^\infty$ при произвольно заданных α и $(l_1; l_2)$, которая определяется с помощью (29). В связи, с чем нам необходимо знать четности аргументов разностей из крайних правых частей в (25) и (26). Эти четности при фиксированных α и $(l_1; l_2)$ зависят от a_{2m-2} , a_{2m-1} , p_{2m-4} ,

$p_{2m-3}, p_{2m-2}, q_{2m-4}, q_{2m-3}, q_{2m-2}$, посредством которых образуем упорядоченный набор

$$f_{2m} = \langle (q_{2m-4}^{\pm}; p_{2m-4}^{\pm})_{2m-4,1}, (q_{2m-3}^{\pm}; p_{2m-3}^{\pm})_{2m-3,2}, \\ (q_{2m-2}^{\pm}; p_{2m-2}^{\pm})_{2m-2,3}, (a_{2m-2}^{\pm}, a_{2m-1}^{\pm})_{2m-1,4} \rangle.$$

из четностей входящих в него величин. Эти наборы составляют последовательность $\{f_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$.

DEFINITION 1. Последовательность $\{\bar{e}_{2m+1,2m+2}\}_{m=0}^{\infty}$, определяемая (29), называется T -периодической по четности переменных аргументов относительно m из крайних правых частей в (25) и (26) или просто периодической по четности аргументам, если $f_{2m+T} = f_{2m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$ при минимальном $T \in \mathbb{N}$.

Из (2) при $a_n = 1$ следует, что $p_n = F_{n+1}$ и $q_n = F_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, где F_n — такие числа Фибоначчи, что $F_0 = F_1 = 1$. Отсюда получаем, что последовательность $\{F_n^{\pm}\}_{n=0}^{\infty}$ из четностей чисел Фибоначчи трехпериодична: $F_{3m}^- = F_{3m+1}^- = \ominus$, $F_{3m+2}^+ = \oplus$, $m \in \mathbb{N}_0$. Тогда компоненты наборов $f_{2m}^{\varphi} = f_{2m}$ для $m = 3k+1, 3k+2, 3k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$, задаются равенствами:

$$\begin{aligned} f_{6k+2}^{\varphi} &= \langle (\ominus; \oplus)_{6k-2,1}, (\oplus; \ominus)_{6k-1,2}, (\ominus; \ominus)_{6k,3}, (\ominus, \ominus)_{6k+1,4} \rangle, \\ f_{6k+4}^{\varphi} &= \langle (\ominus; \ominus)_{6k,1}, (\ominus; \oplus)_{6k+1,1}, (\oplus; \ominus)_{6k+2,3}, (\ominus, \ominus)_{6k+3,4} \rangle, \\ f_{6k+6}^{\varphi} &= \langle (\oplus; \ominus)_{6k+2,1}, (\ominus; \ominus)_{6k+3,1}, (\ominus; \oplus)_{6k+4,3}, (\ominus, \ominus)_{6k+5,4} \rangle, \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда следует, что $\{\bar{e}_{2m+1,2m+2}^{\varphi}\}_{m=0}^{\infty}$ 6-периодична по четности аргументов. Поэтому каждая из матриц $B_{2m+1,2m+2}^{\varphi} (= B_{2m+1,2m+2})$ для $m = 3k+1, 3k+2, 3k+3$ имеет одинаковую структуру. причем элементы матрицы $B_{2m+1,2m+2}^{\varphi}$ отличаются от элементов матрицы $B_{2m'+1,2m'+2}^{\varphi}$ только индексами при $m = m' \bmod 3$, а так как $b_n = \lfloor \frac{a_n-1}{2} \rfloor = 0$, то они совпадают и состоят из 0 и 1.

Из (25) и (26) при $m = 3k+1|_{k=0}$ для $\alpha = \varphi$ с учетом первого равенства в (34) имеем $\epsilon_3^{\pm\pm,\varphi} = \epsilon_1^{\pm\pm,\varphi} + \epsilon_2^{\mp\pm,\varphi}$ и $\epsilon_4^{\pm\pm,\varphi} = \epsilon_1^{\pm\pm,\varphi} + \epsilon_2^{\mp\pm,\varphi} + \epsilon_2^{\mp\mp,\varphi}$, тогда блоки

$$B_{12;2}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{21;1}^{\varphi} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4, B_{22;2}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Также из (25) и (26) при $m = 3k+2|_{k=0}$ с учетом только второго равенства в (34) получаем $\epsilon_5^{\pm\pm,\varphi} = \epsilon_3^{\pm\pm,\varphi} + \epsilon_4^{\mp\mp,\varphi}$ и $\epsilon_6^{\pm\pm,\varphi} = \epsilon_3^{\pm\pm,\varphi} + \epsilon_4^{\mp\mp,\varphi} + \epsilon_4^{\pm\mp,\varphi}$, поэтому

$$B_{12;4}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & o & 0 & 1 \\ o & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & o \\ 1 & 0 & o & 0 \end{pmatrix}, B_{21;3}^{\varphi} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4, B_{22;4}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Аналогично для $m = 3k+3|_{k=0}$ с учетом третьего равенства из (34) получаем $\epsilon_7^{\pm\pm,\varphi} = \epsilon_5^{\pm\pm,\varphi} + \epsilon_6^{\pm\mp,\varphi}$ и $\epsilon_8^{\pm\pm,\varphi} = \epsilon_5^{\pm\pm,\varphi} + \epsilon_6^{\pm\mp,\varphi} + \epsilon_6^{\mp\pm,\varphi}$, следовательно

$$B_{12;6}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{21;5}^{\varphi} = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^4, B_{22;6}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Отсюда с учетом (29), и (32) для $k \in \mathbb{N}_0$ имеем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \bar{e}_{6k+3,6k+4}^{\varphi} &= B_{6k+3,6k+4}^{\varphi} \bar{e}_{6k+1,6k+2}^{\varphi} = (1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)^{\tau} \\ \bar{e}_{6k+5,6k+6}^{\varphi} &= B_{6k+5,6k+6}^{\varphi} B_{6k+3,6k+4}^{\varphi} \bar{e}_{6k+1,6k+2}^{\varphi} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0)^{\tau}, \\ \bar{e}_{6k+7,6k+8}^{\varphi} &= B_{6k+7,6k+8}^{\varphi} B_{6k+5,6k+6}^{\varphi} B_{6k+3,6k+4}^{\varphi} \bar{e}_{6k+1,6k+2}^{\varphi} = \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1)^{\tau}, \end{aligned} \quad (38)$$

с начальными условиями (30) для $\{\bar{\epsilon}_{2m+1,2m+2}^\varphi\}_{m=0}^\infty$. Вследствие чего компоненты крайних частей дают двадцать четыре подпоследовательности

i	3	4	5	6	7	8
ϵ_{6k+i}^{++}	1	0	1	1	0	0
ϵ_{6k+i}^{+-}	0	0	0	0	0	1
ϵ_{6k+i}^{--}	-1	0	-1	-1	0	0
ϵ_{6k+i}^{-+}	0	0	0	0	0	-1

(39)

С помощью первых равенств из (25) и (26) выберем разности из этой таблицы с такими свойствами, что их сумма с увеличением числа слагаемых неограниченно увеличивалась. Этот метод выбора аналогичен методу, применяемому в лемме 1 для выбора таких векторов, что абсцисса конечной точка аппроксимируемого отрезка принадлежала проекции этого вектора на OX .

Ниже обозначение $\bar{\epsilon}_n^{\pm\pm,\varphi}$ говорит о том, что $\epsilon_n^{\pm\pm,\varphi}$ на следующем шаге разлагается через одно из первых равенств из (25) или (26) — все зависит от четности n . С помощью первых равенств (25) и (26) с учетом результатов таблицы (39) для любого $m \in \mathbb{N}$ построим последовательность разложений разностей в сумму разностей с меньшими с меньшими индексами:

$$\begin{aligned}
 \bar{\epsilon}_{6m+5}^{\varphi} &\Rightarrow \epsilon_{6m+3}^{++,\varphi} + \bar{\epsilon}_{6m+4}^{\varphi} \Rightarrow 1 + \epsilon_{6m+3}^{--,\varphi} + \bar{\epsilon}_{6(m-1)+8}^{\varphi} \Rightarrow \dots \Rightarrow 1 + \bar{\epsilon}_{6(m-1)+5}^{\varphi} \\
 &\Rightarrow 1 + \epsilon_{6(m-1)+3}^{++,\varphi} + \bar{\epsilon}_{6(m-1)+3}^{\varphi} + \bar{\epsilon}_{6(m-2)+8}^{\varphi} \Rightarrow \dots \Rightarrow 2 + \bar{\epsilon}_{6(m-2)+5}^{\varphi} \Rightarrow \dots \\
 &\dots \Rightarrow m-1 + \epsilon_{6(m-(m-1))+3}^{++,\varphi} + \bar{\epsilon}_{6(m-(m-1))+3}^{\varphi} + \bar{\epsilon}_{6(m-(m-1)-1)+8}^{\varphi} \Rightarrow \\
 &\quad m + \epsilon_3^{++,\varphi} + \epsilon_3^{--,\varphi} + \epsilon_2^{++,\varphi} \Rightarrow m+1.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{k=0}^m (\epsilon_{6(m-k)+3}^{++,\varphi} + \epsilon_{6(m-k)+3}^{--,\varphi}) = m+1. \tag{41}$$

Слагаемые под суммой являются разностями клетчатых областей, с такими, например, определены векторами:

$$\begin{aligned}
 &\bar{e}_{6m+3}^\varphi(0;0), \bar{e}_{6m+3}^\varphi(q_{6m}^{\varphi,-}; p_{6m}^{\varphi,-}), \bar{e}_{6(m-1)+3}^\varphi(2q_{6m}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_{6(m-1)+3}^\varphi(2 \\
 &q_{6m}^{\varphi,-} + q_{6(m-1)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_{6(m-2)+3}^\varphi(2 \sum_{k=0}^1 q_{6(m-k)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_{6(m-2)+3}^\varphi(2 \\
 &\sum_{k=0}^1 q_{6(m-k)}^{\varphi,-} + q_{6(m-2)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \dots, \bar{e}_3^\varphi(2 \sum_{k=0}^{m-1} q_{6(m-k)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \\
 &\bar{e}_3^\varphi(2 \sum_{k=0}^{m-1} q_{6(m-k)}^{\varphi,-} + q_0^{\varphi,-}; q \rightarrow p), \bar{e}_2^\varphi(2 \sum_{k=0}^m q_{6(m-k)}^{\varphi,-}; q \rightarrow p).
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Совокупность этих векторов является ломанной $L(A(\varphi Q_{\varphi,m}), B^*)$ с началом $A(\varphi Q_m^\varphi) = (0;0)$ и концом $B^* = (Q_m^\varphi; 2 \sum_{k=0}^m p_{6(m-k)}^{\varphi,-} + p_{-1}^{\varphi,-})$, где $Q_m^\varphi = 2 \sum_{k=0}^m q_{6(m-k)}^{\varphi,-}$. Применяя метод построения левой аппроксимации из леммы 1 получаем, что ломанная $L(A(\varphi Q_m^\varphi), B^*)$ есть левая аппроксимация отрезка $A(\varphi Q_m^\varphi)B(\varphi Q_m^\varphi)$, а поэтому внутри многоугольника $A(\varphi Q_m^\varphi)L(A(\varphi Q_m^\varphi))B^* B(\varphi Q_m^\varphi)$ нет целых точек. Следовательно, разность $u(\varphi Q_{\varphi,m})$ клетчатой области треугольника $A(\varphi Q_{\varphi,m})B(\varphi Q_{\varphi,m})$ равна $m+1$, тогда в силу предложения 4 справедлива теорема 3 для $\alpha = \varphi$.

6. Заключение

Множество $\mathcal{A} = \{e^{\pm 1}, \text{tg}^{\pm 1}, [a_0^-; a_1^-, a_2^-, \dots]^{\pm 1} (\neq \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}), [a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]^{\pm 1}, [a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]^{\pm 1}\}$ удовлетворяет предложению 4.

Если $\alpha_1 = e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots]$, $a_{\alpha_1, 3m-1} = 2m$, $a_{\alpha_1, 3m-2} = a_{\alpha_1, 3m} = 1$, $m \in \mathbb{N}$, то положим $Q_{\alpha, k} = Q_{\alpha_1, k} = q_{\alpha_1, 3+6k}^+$. Левая аппроксимация $L_{\alpha_1}(A(\alpha_1 q_{\alpha_1, 6+6k}), B^-(\alpha_1 q_{\alpha_1, 6+6k})) = \bar{e}_{\alpha_1, 6+6k}(Q_{\alpha_1, k}^+; 0)_{OX_Y}$, тогда в силу предложения 3 разность $u(\alpha_1 Q_{\alpha_1, k}) = \epsilon_{\alpha_1, 6+6k}(Q_{\alpha_1, k}^+; 0)$ клетчатой области $\mathbf{U}(q_{\alpha_1, 3+6k}^+)$ треугольника $\Delta(\alpha_1 q_{\alpha_1, 3+6k}^+)$. На основании вычислений, проделанных с

помощью (29), имеем: $\epsilon_{\alpha_1, 6+6k}(q_{\alpha_1, 3+6k}^+; 0) = k + 1$, следовательно, $e \in \mathcal{A}$, а вследствие предложения 5 и $e^{-1} \in \mathcal{A}$.

При $\alpha_2 = \text{tg } 1 = [1; 1, 1, 3, \dots]$, $a_{\alpha_2, 2m} = 1$, $a_{\alpha_2, 2m+1} = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, возьмем $Q_{\alpha_2, k} = q_{\alpha_2, 1+6k}$, а в качестве левой аппроксимации: $L_{\alpha_2}(A(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k}), B^-(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k})) = \bar{e}_{\alpha_2, 4+6k}(q_{\alpha_2, 1+6k}^-; 0)_{OXY}$ и поэтому $u(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k}^-) = \epsilon_{\alpha_2, 4+6k}(q_{\alpha_2, 1+6k}^-; 0)$. Первые равенства из (25) и (26) дают рекуррентную формулу $\epsilon_{\alpha_2, 4+6k}(q_{\alpha_2, 1+6k}^-; 0) = \epsilon_{\alpha_2, 4+6(k-1)}^{++} + 3k$ с начальным условием $\epsilon_{\alpha_2, 4}^{++} = 0$. Отсюда $u(\alpha_2 q_{\alpha_2, 1+6k}^-) = 3k^2$, что дает $\text{tg}^{\pm 1} 1 \in \mathcal{A}$.

Всюду ниже обозначение $b_n = \lfloor \frac{a_n - 1}{2} \rfloor$ для каждого абзаца задается элементом цепной дроби, рассматриваемой в этом абзаце.

Так как

$$\epsilon_{6(k+1)+3}^{++,-} = 2^{k-1} b_3 b_9 \cdots b_{6(k-1)+3} + \cdots + 2^2 \sum_{i_1 > i_2 > i_3 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} b_{6(k-i_3)+3} + 2 \sum_{i_1 > i_2 = 1}^k b_{6(k-i_1)+3} b_{6(k-i_2)+3} + \sum_{i=1}^k b_{6(k-i)+3} + 1, \quad \epsilon_3^{++,-} = 1.$$

Если b_i такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_{6k+3}^{++,-} = \infty$, то выбирая

$$Q_{\alpha_3, k} = q_{\alpha_3, 6k}^- + 1, \quad L_{\alpha_3}(A(\alpha_3 Q_{\alpha_3, k}), B^-(\alpha_3 Q_{\alpha_3, k})) = \bar{e}_{\alpha_3, 6k+3}(Q_{\alpha_3, k}^+; 0)_{OXY},$$

получаем, что $u^-(\alpha_3 Q_{\alpha_3, k}) = \epsilon_{6k+3}^{++,-}$ и поэтому $\alpha_3^{\pm 1} \in \mathcal{A}$. Если же b_i такие, что $\epsilon_{6k+3}^{++,-}$ ограничены, то применим метод накопление положительных величин, который применяли при доказательстве при $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

В случае $\alpha_4 = [a_0^+; a_1^+, a_2^+, \dots]$ ненулевыми разностями являются $\epsilon_{2m+2}^{-\pm+} = \pm 1$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$ при четном q . Применяя тот же метод что и для $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ получаем последовательность $\{Q_{\alpha_4, k}^+\}_{k=1}^\infty$ с $Q_{\alpha_4, k}^+ = \sum_{i=4}^{2k} q_{2k-i}^-$, которая дает $u^+(Q_{\alpha_4, k}^+) = -k$ и, следовательно, $\alpha_4^{\pm 1} \in \mathcal{A}$,

Для $\alpha_5 = [a_0^+; a_1^-, a_2^+, \dots]$ разности $\epsilon_{4k+3}(q_{\alpha_5, 4k}^-; 0)_{OXY} = \sum_{i=1}^k (b_{4i-2} + 1)$. Отсюда $Q_{\alpha_5, k} = q_{\alpha_5, 4k}^-$ и $L_{\alpha_5}(A(\alpha_5 Q_{\alpha_5, k}), B^-(\alpha_5 Q_{\alpha_5, k})) = \bar{e}_{\alpha_5, 4k}(q_{\alpha_5, 4k}^-; 0)_{OXY}$, что влечет $u(\alpha_5 Q_{\alpha_5, k}) = \sum_{i=1}^k (b_{4i-2} + 1)$ и $\alpha_5^{\pm 1} \in \mathcal{A}$.

Часть изложенных здесь результатов анонсирована в [14] – [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А. Я., 1978, 4-ое изд. *Цепные дроби*. Наука, Москва, 112 с.
2. Бухштаб А. А., 1966. *Теория чисел*. Просвещение, Москва, 376 с.
3. Нестеренко Ю. В., 2008. *Теория чисел*. Издательский центр “Академия”, Москва, 272 с.
4. Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М., 1983, *Очерк о цепных дробях*. // Квант, Москва, № 5, 16–20 с., № 6, 26–30 с.
5. Михалович Ш. Х., 1967. *Теория чисел*. Высшая школа, Москва, 336 с.
6. Александров П. С, Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. (редакторы), 1951. *Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. Арифметика*. Москва – Ленинград, ТТЛ, 448 с.
7. Васильев Н. Б., 1974. *Вокруг формулы Пика* // Квант, Москва, № 12, С.39–43
8. Вавилов В. В., Устинов А. В., 2006, *Многоугольники на решетках*. МЦНМО, Москва, 72 с.
9. Grunbaum, Branko, and G. C. Shephard., 2001. *Pick's Theorem*. // The American Mathematical Monthly, vol. 100, no. 2, Mathematical Association of America, 1993, pp. 150–61,

10. Арнольд В. И., 2001. *Ценные дроби*. МЦНМО, Москва, 40 с.
11. Дэвенпорт Г., 1965, *Высшая арифметика. Введение в теорию чисел*. Наука, Москва, 176 с.
12. Клейн Ф., 1987, 4-ое издание. *Элементарная математика с точки зрения высшей. Арифметика. Алгебра. Анализ* Наука, Москва, Том I, 432 с.
13. Khovanova T., Konyagin S. 2011 *Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors*. arXiv:1104.0441v1 [math.CO] (4 Apr 2011), pp.1–20.
14. Галламов М. М. *Прямые $y = -e \cdot x + t$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула, 13–18 мая 2019 г. С. 247–250.
15. Галламов М. М. *Прямые $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + s$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Наума Ильича Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров Аскольда Ивановича Виноградова, Александра Васильевича Малышева и Бориса Фаддеевича Скубенко. Тула, 23–29 сентября 2019 г. С. 142–245.
16. Галламов М. М. *Прямые $y = -[a_0^\pm; a_1^\pm, a_2^\pm, \dots] \cdot x + t$ с четными a_n^+ и нечетными $a_n^- = a (\neq 1)$ и шахматная раскраска* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XVIII Международной конференции, посвященная столетию со дня рождения профессоров Бориса Максимовича Бредихина, Василия Ильича Нечаева и Сергея Борисовича Стечкина. Тула, 23–26 сентября 2020 г. С. 261–265.
17. Галламов М. М. *Целочисленная аппроксимация отрезка* // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». Материалы XXI Международной конференции, посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы. Тула, 17–21 мая 2022 г. С. 235–238.

REFERENCES

1. Khinchin A. Ya., 1978, 4 izd. *Zepnyie drobi* [The continued fractions]. Nauka, Moscow, pp. 112.
2. Bukhshtab A. A., 1966. *Teoriya chisel* [Theory numbers]. Prosveschenit, Moscow, pp. 376.
3. Nesterenko Yu. V., 2008. *Teoriya chisel* [Theory numbers]. Izdatel'skiy zentr "Akademiya", Moscow, pp. 272.
4. Nesterenko Yu. V., Nikishin E. N., 1983, *Очерк о ценных дробях*. // Kvant, Moscow, no. 5, pp. 16–20, no. 6, pp. 26–30.
5. Mikhalevich Sh. Kh., 1967. *Teoriya chisel* [Theory numbers]. Vyishaya shkola, Moscow, pp.336.
6. Aleksandrov P. S., Markushevich A. I., Rhinchin A. Ya. (redaktori), 1951. *Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. Арифметика* [Encyclopedia of elementary mathematics. Book 1. Arithmetic]. Moscow – Leningrad, TTL, pp. 448.
7. Vasil'ev N. B., 1974. *The circumformula for Pick* // Kvant, Moscow, no. 12, pp.39–43

8. Vavilov V. V., Ustinov A. V., 2006, *Mnogougol'niki nf reshetkakh* [The polygons an lattices]. NZNMO, Moscow, pp.72.
9. Grunbaum, Branko, and G. C. Shephard., 2001. *Pick's Theorem.* // The American Mathematical Monthly, vol. 100, no. 2, Mathematical Association of America, 1993, pp. 150–61,
10. Arnol'd V.I., 2001. *Zepnyie drobi* [The continued fractions]. NZNMO, Moscow, pp. 40.
11. Davenport H. ., 1965, *The higher arithmetic. An introduction to the theory of numbers.* Harper torchbooks? the science library. Harper & Brothers, New York, pp. 176.
12. Klein F., 1987, 4-ое издание. *Элементарная математика с точки зрения высшей. Арифметика. Алгебра. Анализ* [Elementary mathematics in terms of higher. Arithmetic. Algebra. Analysis] Nauka, Moscow, Vol. I, pp. 432.
13. Khovanova T., Konyagin S. 2011 *Sequences of Integers with Missing Quotients and Dense Points Without Neighbors.* arXiv:1104.0441v1 [math.CO] (4 Apr 2011), pp.1–20.
14. Gallamov M.M. *Straight line $y = e \cdot x + t$ and chess coloring* // «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii». Materialy XVI Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 80-letiyu so dnya roghdeniya professora Misheelya Deza. Tula, 13–18 maya 2019 g. S. 247–250.
15. Gallamov M.M. *Straight line $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x + t$ and chess coloring* // «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii». Materialy XVII Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 100-letiyu so dnya roghdeniya professora Nauma Il'cha Fel'dmana, 90-letiyu so dnya roghdeniya professorov Askol'da Ivanovicha Vinogradova, Aleksandra* Vasil'evicha Malysheva i Borisa Faddeevicha Skubenko. Tula, 23–29 sentyabr' 2020 g.
16. Галламов М.М. *Straight line $y = -[a_0^\pm; a_1^\pm, a_2^\pm, \dots] \cdot x + t$ s chetnymi a_n^+ i nechetnymi $a_n^- = a(\neq 1)$ and chess coloring* // «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii». Materialy XVIII Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 100-letiyu so dnya roghdeniya professorov Borisa Maksimovicha Bredihina, Vasikiya Iikicha Nechatva i Sergeya Borisovicha Stechkina. Tula, 23–26 sentyabrya 2020 g. S. 261–265.
17. Gallamov M.M. *Zelochislennaya approksimaziya otreska* /// «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii». Materialy XXI Mezhdunarodnoy konferenzii, posvyaschennaya 85-letiyu so dnya roghdeniya professora A. A. Karazuby. Tula, 17–21 maya 2022 g. S. 235–238.

Получено: 07.06.2022

Принято в печать: 8.12.2022