

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 4.

УДК 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19

Рациональные A -функции с рациональными коэффициентами¹

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).

e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

В статье рассматривается функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами, где в качестве операций выступают операции суперпозиции и для этой системы исследуется специальный случай проблемы полноты, который представляет особый интерес — полные системы минимальной мощности, т.е. полные системы, состоящие из одной единственной рациональной функции; такие функции назовем A -функциями (аналог функции Шеффера в двузначной логике).

Автором этой статьи было установлено, что

- *существует A -функция;*
- *мощность множества всех A -функций равно c_0 ;*
- *найжены конкретные A -функции.*

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, функция Шеффера, рациональная функция, A -функция.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. Ф. Алексиадис. Рациональные A -функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19.

¹Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 4.

UDC 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19

Rational A -functions with rational coefficients

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Filippovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; National Research University “MPEI” (Moscow).

e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness that consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

In our paper we consider the functional system of rational functions with rational coefficients endowed with the superposition operation. We investigate the special case of the completeness problem which is of a particular interest, namely obtaining complete systems of minimum cardinality, i.e. complete systems consisting of a single rational function (such functions are referred to as A -functions and are analogues of Schaeffer stroke in Boolean logic).

The main results of the paper are the following:

- *there exists an A -function;*
- *the cardinality of the set of all A -functions equals c_0 ;*
- *a number of examples of A -functions are presented explicitly.*

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, Schaeffer function, rational function, A -function.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. Ph. Aleksiadis, 2022, “Rational A -functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 11–19.

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада о рациональных A -функциях, сделанного в мае 2021 года на XIX Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева [1].

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах - это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

Функциональные системы обладают определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при их исследовании с позиции математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиции математической кибернетики функциональные системы рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем; с позиции математической логики – как модели логик, т.е. системы предложений с логическими операциями над ними; с позиции алгебры – как универсальные алгебры.

В качестве обобщений реальных функциональных систем могут в принципе рассматриваться и универсальные алгебры, однако, в этом случае теряются основные достоинства реальных систем и, прежде всего, такие, как конструктивность множества и операций.

Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем, с одной стороны, определяет серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

Проблематика функциональных систем обширна. К числу основных задач для функциональных систем относятся проблемы полноты и выразимости, о базисах, о синтезе и анализе, о тождественных преобразованиях и другие.

При исследовании проблемы полноты одной из основных задач является задача о минимальных полных системах, т.е. задача о полных системах, состоящих из одной единственной функции. В настоящей работе решается эта задача для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа рациональных функций, так и в вычленении позитивных результатов типа существования A -функции, а также в отсечении негативных ситуаций, когда указанной функции нет.

При изложении материала в основном используется терминология книг [7] и [11].

Несмотря на то, что мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия дискретной математики (в частности, теории функциональных систем), с целью корректного понимания изложенного, все-таки следует уточнить некоторые “моменты”.

Функциональная система (ф.с.) $\mathbf{F}$ – это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O множество операций над функциями из F , при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F .

Для произвольного подмножества A множества F обозначим через $[A]$ множество всех функций из F , которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O . Множество $[A]$ называется *замыканием множества A* .

Множество A ($A \subseteq F$) называется *замкнутым* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$. Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом*.

Множество A ($A \subseteq F$) называется *полным* в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть *полной системой*.

Функциональная система $\mathbf{F}$ называется *конечно-порожденной*, если в $\mathbf{F}$ существует конечная полная система.

$\mathbf{F} = (F, O)$ называется *функциональной системой счетной мощности*, если F счетное множество.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F , которые являются полными в ф.с. $\mathbf{F}$, т.е. $[A] = F$.*

Как известно, изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем: 2-значная логика (Пост [14]), 3-значная логика (Яблонский [12]), 4-значная логика (Мальцев [8]), k -значная логика (Розенберг [15], Саломеа [9], Слупецкий [16], Яблонский [13]), автоматные функции (Бабин [4], Кудрявцев [6], Часовских [10]), счетнозначные логики (Гаврилов [5]). В этих функциональных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов (максимальных подалгебр). Метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал после этого одним из основных (можно сказать, стало традицией).

Функция $f \in F$ называется *A -функцией*, если система $\{f\}$ является полной. Другими словами, функция $f \in F$ называется *A -функцией*, если из этой одной функции можно получить все функций из F с помощью конечного числа применения операций из O .²

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множества всех натуральных (включая 0).

Q — множества всех рациональных чисел.

c_0 — мощность счетного множества.

$\equiv$ — обозначим, по определению, тождественно равно.

Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.

2. Основной текст статьи

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, при этом $h(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами*.

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *rq-функциями*.

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Пришло время определить основной объект нашего исследования — функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рацио-

²Раньше автор этой статьи вместо термина “А-функция” употреблял термин “универсальная функция”. Но после того, как начал исследовать функциональную систему рекурсивных функций, а как известно в теории рекурсивных функций термин “универсальная функция” уже существует, он хорошо известен и по содержанию имеет другой смысл, то логично ввести новый термин (что и было сделано, например, в статьях [2] и [3]).

нальными коэффициентами, а O — множество операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя:

- перестановку переменных,
- переименования переменных (без отождествления),
- отождествления переменных,
- введение фиктивной переменной,
- удаление фиктивной переменной,
- подстановку одной функции в другую.

Заметим, что это определение функциональной системы $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ} .

Целью настоящей работы является исследование задачи об A -функциях в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$:³

- существует ли A -функция?
- найти число A -функций;
- найти конкретные A -функции.

ТЕОРЕМА 1. В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ система функций

$$\{1, x - y, xy, \frac{x}{y} (y \neq 0)\}$$

является полной системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через

$$B = \{1, x - y, xy, \frac{x}{y} (y \neq 0), \}$$

а через

$$f(x, y) \equiv x - y, g(x, y) \equiv xy, h(x, y) \equiv \frac{x}{y}.$$

Сначала получим все константы из Q . Имеем

$$f(x, x) = 0; i(x) \equiv f(0, x) = -x;$$

$$f_1(x, y) \equiv f(x, i(y)) = x + y;$$

$$f_1(1, 1) = 2, f_1(1, 2) = 3, f_1(1, 3) = 4, \dots$$

$$i(1) = -1, i(2) = -2, i(3) = -3, \dots$$

Итак, мы получили все целые числа. Из этих чисел и функции $h(x, y)$ с помощью операции суперпозиции можно получить все рациональные числа.

Теперь построим все мономы с рациональными коэффициентами, отличные от константы, т.е. rq -функции вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ где c — произвольное рациональное число, отличное

³Задача о A - функциях имеет смысл для конечно-порожденных функциональных систем, каковым и является рассматриваемая ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$ (ниже см. следствия 1 теоремы 1).

от нуля, n — произвольное положительное целое число, а $k_1, k_2, \dots, k_n$ — произвольные натуральные числа (в том числе и 0), при этом $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ (т.е. имеем хотя бы одну существенную переменную). Очевидно, что из функции $g(x, y)$ и константы 1 с помощью операций суперпозиции можно получить любой моном вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ (в том числе и тождественную функцию $f(x) = x$). Далее, подставляя в функцию $g(x, y)$ вместо x константу c , а вместо y — моном $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, мы получим rq -моном $cx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$.

Ясно, что из функции $f_1(x, y)$ с помощью операций суперпозиции можно получить любую линейную функцию вида $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ($m \geq 2$). Поскольку любой полином с рациональными коэффициентами является конечной суммой rq -мономов, то, если в подходящей линейной функции $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ вместо ее переменных подставим соответствующие rq -мономы, то получим желаемый полином с рациональными коэффициентами.

Далее, из полиномов с рациональными коэффициентами и функции $h(x, y)$ с помощью операций суперпозиций можно получить любую рациональную функцию с рациональными коэффициентами.

Таким образом, из функций множества B с помощью операций суперпозиции можно получить все функции из F_{RQ} , поэтому $[B] \supseteq F_{RQ}$. Но, с другой стороны, поскольку $B \subset F_{RQ}$, то в силу свойства оператора замыкания $[B] \subseteq F_{RQ}$. Следовательно, $[B] = F_{RQ}$, т.е. B является полной системой в F_{RQ} .

Теорема доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. F_{RQ} является конечно-порожденной функциональной системой.

СЛЕДСТВИЕ 2. F_{RQ} является функциональной системой счетной мощности.

Так как ф.с. F_{RQ} является конечно-порожденной (в силу следствия 1 теоремы 1), то имеет смысл рассмотреть вопрос об A -функциях.

ТЕОРЕМА 2. rq -функция

$$f(x, y, z, t, u, v) = (t - u) \cdot \frac{x}{v} + xz - yz + z + 1$$

является A -функцией в функциональной системе F_{RQ} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что система $\{f\}$ является полной, т.е. $[\{f\}] = F_{RQ}$. Имеем

$$g(x, y, z) \equiv f(x, y, z, t, v) = xz - yz + z + 1;$$

$$h(x) \equiv g(x, x, x) = x + 1; g(x, h(x), x) = 1;$$

$$h(1) = 2, h(2) = 3, h(3) = 4;$$

$$g(1, 3, 2) = -1; g(1, 1, -1) = 0;$$

$$g_1(x, y) \equiv g(x, y, 1) = x - y + 2;$$

$$g_2(x, y, z) \equiv g_1(g_1(x, y), z) = x - y - z + 4;$$

$$g_3(x, y) \equiv g_2(x, y, 4) = x - y;$$

$$g_4(x, y) \equiv g(x, 0, y) = xy + y + 1;$$

$$g_6(x, y) \equiv g_3(g_4(x, y), h(y)) = xy;$$

И еще получим одну функцию $\frac{x}{y}$.

$$g_7(x, y) \equiv f(x, 0, 0, 1, 0, y) = \frac{x}{y} + 1.$$

$$g_8(x, y) \equiv g_3(g_7(x, y), 1) = \frac{x}{y}.$$

Итак, $[f(x, y, z, t, u, v)]$ содержит подсистему

$$\{1, x - y, xy, \frac{x}{y}(y \neq 0)\},$$

которая является полной в силу теоремы 1. Следовательно, система $\{f(x, y, z, t, u, v)\}$ является полной в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$.

Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 3. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ существует счетное число A -функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что rq -функция

$$g(x, y, z, t, u, v, w, x_1, \dots, x_n) \equiv f(x, y, z, t, u, v) + (v - w)h(x_1, \dots, x_n),$$

где $f(x, y, z, t, u, v)$ — A -функция из теоремы 2, а $h(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная rq -функция, является A -функцией в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$. Действительно,

$$g(x, y, z, t, u, v, v, x_1, \dots, x_n) = f(x, y, z, t, u, v).$$

Итак, число A -функций не меньше c_0 . Но, с другой стороны, это число не может быть больше c_0 , так как функциональная система $\mathbf{F}_{RQ}$ является счетной мощности (в силу следствия 2 теоремы 1).

Теорема доказана. $\square$

3. Заключение

В заключении коротко отметим, что цель, поставленная в начале статьи, достигнута: доказано, что существует счетное число A -функций, из каждой из них с помощью операций суперпозиции можно получить все рациональные функции с рациональными коэффициентами; более того, приведены конкретные примеры таких функций.

Автор выражает глубокую благодарность старшему научному сотруднику МГУ им. М. В. Ломоносова А. В. Галатенко за постоянную поддержку при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. О рациональных A -функциях с рациональными коэффициентами // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва (Тула, 18–22 мая 2021 года). Тула, 2021. С. 93–97.
2. Алексиадис Н. Ф. О существовании рекурсивных A -функций // Вестник МЭИ. 2011. № 6. С. 109–111.
3. Алексиадис Н. Ф., Тхан Тун Аунг Об одной рекурсивной A -функции // Труды XXI международной научно-технической конференции “Информационные средства и технологии”. (Москва, 19–21 ноября 2013 г.) — М.: Издательский дом МЭИ, 2013. Т. 3. С. 96–101.
4. Бабин Д. Н. О задаче полноты для автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. Т. 23, вып. 4. С. 82–83.

5. Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 15. С. 5-64.
6. Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных системах, связанных с автоматами // В кн.: Проблемы кибернетики. 1965 (М. Наука). вып. 13. С. 45-74.
7. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982. 157 с.
8. Мальцев А. И. Избранные труды. Т. II — М.: Изд-во Наука, 1976. 388 с.
9. Саломеа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики // В кн.: Кибернетический сборник. 1964 (М.: Мир). Т. 8. С. 7-32.
10. Часовских А. А. Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, вып. 2. С. 151-154.
11. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд-во Наука, 1986. 384 с.
12. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. 1954. 95. № 6. С. 1153-1156.
13. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5-142.
14. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. — Princeton. 1941.
15. Rosenberg Y. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. // Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Akademie Ved. v. 80, №4. P. 393, 1970.
16. Slupecki J. Kriterium pelnosci wielowar — toscowych systemow logiki zdan. // Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie. 1939. Cl. III. v. 32. P. 102-128.

REFERENCES

1. Aleksiadis, N. Ph. 2021, "Rational A -functions with rational coefficients", *Proc. 19th Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history"*, pp. 97-101.
2. Aleksiadis, N. Ph. 2011, "On the existence of recursive A -functions", *Vestnik MPEI*, no. 6, pp. 109-111.
3. Aleksiadis, N. Ph., & Than Htun Aung 2013, "On the recursive A -function", *Proceedings of the XXI International Scientific and Technical Conference "Information tools and Technologies"*, vol. 3, pp. 96-101.
4. Babin, D. N. 2020, "On the completeness problem for automata", *Proc. Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 23(4), pp. 82-83.
5. Gavrilov, G. P. 1965, "On functional completeness in countable logic", *Problems of cybernetics*, vol. 15, pp. 5-64.
6. Kudryavtsev, V. B. 1965, "On the powers of sets of discrete sets of some functional systems related to automata", *Problems of cybernetics*, vol. 13, pp. 45-74.

7. Kudryavtsev, V. B. 1982, "Functional systems ", Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU., 157 p.
8. Maltsev, A. I. 1976, "Selected works". vol. II — Moscow: Publishing House "Nauka", 388 p.
9. Salomaa, A. 1963, "Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain", II. Ibid., Ser. A I 63, 19 pp.
10. Chasavskikh, A. A. 2018, "The problem of completeness in classes of linear automata", *Intelligent systems. Theory and Applications*, vol. 22(2), pp. 151-154.
11. Yablonsky, S. V. 1986, "Introduction to discrete mathematics", Moscow.:Science, 384 p.
12. Yablonsky, S. V. 1954, "On functional completeness in three-digit calculus", *DAN USSR*, vol. 95(6), pp. 1153–1156.
13. Yablonsky, S. V. 1958, "Functional constructions in k -valued logic", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 51, pp. 5–142.
14. Post, E. 1941, "Two-valued iterative systems of mathematical logic". — Princeton.
15. Rosenberg, Y. 1970, "Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken". *Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acedemie Ved.*, v. 80, №4, p. 393.
16. Slupecki, J. 1939, Kriterium pelnosci wielowar — toscowych systemow logiki zdan. *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsivie*, cl. III, v. 32, pp. 102-128.

Получено: 25.04.2022

Принято в печать: 8.12.2022