

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 512.667.7

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ХОПФА¹

В.А. Артамонов (Москва)

Аннотация

В работе приводится обзор результатов о строении полупростых конечномерных алгебры Хопфа с изоморфными неприводимыми неодномерными представлениями одной размерности. Кроме того, приведены новые результаты о групповых элементах построенных алгебр Хопфа и о строении дуальной алгебры Хопфа.

Ключевые слова: Алгебры Хопфа, проективные представления.

SEMISIMPLE HOPF ALGEBRAS

V. A. Artamonov (Moscow)

Abstract

There is given a survey of results on a structure of semisimple finite dimensional Hopf algebras with isomorphic irreducible non-one-dimensional representations. There is found an explicit form of group-like elements in these Hopf algebras and a structure of the dual a Hopf algebra.

Keywords:

1. Введение

В работе в разделах 1 — 4 приводится обзор по проблеме классификации полупростых конечномерных алгебр Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k . Предполагается, что основного поля k либо нулевая, либо больше размерности H .

Рассматривается задача описания таких полупростых конечномерных k -алгебр Хопфа H , у которых в каждой размерности, большей 1, существует не более одного неприводимого H -модуля.

Эти исследования мотивированы следующим результатом из теории групп.

ТЕОРЕМА 1 (Беркович, Chillag, Herzog). Пусть G неабелева группа, причем для любого $n > 1$ имеется не более одного неприводимого комплексного представления размерности n . Тогда G — одна из следующих групп:

¹Частично поддержано грантом РФФИ 12-01-00070

- а) Экстра-специальная 2-группа порядка 2^{2m+1} , у которой в точности одно неприводимое неодномерное представление размерности 2^m .
- б) G – 2-транзитивная фробениусова группа порядка $q^f(q^f-1)$, где q – простое число, и ядро Фробениуса совпадает с G' . Группа G имеет q^f-1 одномерных представлений и одно представление размерности q^f-1 .
- в) G является 2-транзитивная фробениусовой группой порядка 72 с фробениусовым ядром F , и G/F – группа кватернионов порядка 8. Группа G имеет 4 одномерных представлений и два неприводимых представлений размерности 2 и 8.

Напомним, что компактные группы $SU(2, \mathbb{C})$, $SO(3, \mathbb{R})$ имеют в каждой размерности не более одного неприводимого представления.

В последних разделах дается описание групповых элементов в построенной в теореме 13 новой серии алгебры Хопфа H . Каждый групповой элемент соответствует одномерному представлению дуальной алгебры Хопфа H^* . В заключительном разделе описывается центр H^* . Размерность центра равна числу неприводимых представлений H^* . Все это позволяет предположить, что дуальные алгебры H^* дают новую серию полупростых алгебр Хопфа.

2. Свойства модулей

Для конечномерной полупростой алгебры Хопфа H одномерные слагаемые в полупростом разложении соответствуют гомоморфизмам k -алгебр $H \rightarrow k$. Эти гомоморфизмы являются групповыми элементами дуальной алгебры Хопфа H^* . Всюду в работе через G обозначается группа групповых элементов в H^* . Таким образом, прямая сумма одномерных слагаемых у алгебры H как алгебра совпадает с дуальной алгеброй $kG)^*$.

Обозначим через $M_1, \dots, M_n$ неприводимые H -модули размерностей $1 < d_1 < \dots < d_n$. В работе [2] показано, что каждый модуль M_i имеет такую невырожденную (косо-)симметричную билинейную форму $\langle x, y \rangle_i$, что $\langle hx, y \rangle_i = \langle x, S(h)y \rangle_i$ для всех $x, y \in M_i$ и всех $h \in H$. При этом $|G| \leq d_1^2$.

Каждая матричная компонента $\text{Mat}(d_i, k)$ из полупростого разложения H инвариантна относительно антипода S . Пусть U_i – матрица Грама билинейной формы $\langle x, y \rangle_i$ в некотором базисе модуля M_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $S(x) = U_i {}^t x U_i^{-1}$ для всех $x \in \text{Mat}(d_i, k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого i имеется такое точное проективное представление Φ_i группы G в M_i , что

$$g \rightharpoonup h = \Phi_i(g)h\Phi_i(g)^{-1}, \quad h \leftharpoonup g = S(\Phi_i(g))hS(\Phi_i(g))^{-1}$$

для любого $h \in \text{Mat}(d_i, k)$ и $\text{tr } \Phi_i(g) = d_i \delta_{g1}$.

Групповой коммутатор $[\Phi_i(g), S(\Phi_i(f))] = 1$ в $\text{PGL}(M_i)$ для любых $f, g \in G$.

Отождествим $M_i \otimes M_i$ с алгеброй $\text{Mat}(d_i, k)$, используя билинейную форму $\langle x, y \rangle_i$. Если $a, b, c \in M_i$, то $a \otimes b$ является таким линейным оператором на M_i , что

$$(a \otimes b)c = a\langle b, c \rangle_i \in M_i.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При этом отождествлении образ одномерного подмодуля в $M_i \otimes M_i$, соответствующего элементу $g \in G$, совпадает с линейной оболочкой матрицы $\Phi_i(g)$.*

Алгебра Хопфа H почти кокоммутативна, если существует такой обратимый элемент $\mathcal{R} \in H \otimes H$, что

$${}^t\Delta(x) = \mathcal{R}\Delta(x)\mathcal{R}^{-1}$$

для всех $x \in H$. Если H почти кокоммутативна и M, N — произвольные H -модули, то имеется изоморфизм H -модулей $M \otimes N \simeq N \otimes M$.

ТЕОРЕМА 2. *Если алгебра Хопфа H почти кокоммутативна, то группа G абелева. Если $n = 1$, то верно и обратное.*

ТЕОРЕМА 3 ([2]). *Пусть матричная компонента $\text{Mat}(d_i, k)$ является идеалом Хопфа в H . Тогда $i = n$.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть C — ненулевой левый идеал в H , являющийся левым коидеалом. Тогда $C = H$.*

3. Коумножение и антипод

Рассмотрим элемент

$$\mathcal{R}_q = \frac{1}{d_q} \sum_{i,j=1}^{d_q} E_{ij}^{(q)} \otimes E_{ji}^{(q)} \in \text{Mat}(d_q, k)^{\otimes 2},$$

где $E_{**}^{(q)}$ — матричные единицы. Можно проверить, что $\mathcal{R}_q$ — единственный с точностью до множителя такой элемент из $\text{Mat}(d_q, k)^{\otimes 2}$, что

$$(A \otimes B)\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_q(B \otimes A)$$

для всех $A, B \in \text{Mat}(d_q, k)$.

Следующая теорема используется для классификационной теоремы 8. Впрочем, она имеет и самостоятельное значение.

ТЕОРЕМА 5 ([4, 5]). *Пусть G — конечная группа, порядок которой взаимно прост с $\text{char } k$. Проективное представление $\Omega : G \rightarrow \text{PGL}(d, k)$ с условием*

$$\Omega(g^{-1}) = \Omega(g)^{-1}, \quad \Omega(E) = E,$$

неприводимо в том и только в том случае, если

$$\mathcal{R}_d = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Omega(g^{-1}) \otimes \Omega(g).$$

Справедливо следующее описание структуры коумножения и антипода в алгебре Хопфа H .

ТЕОРЕМА 6 ([2]). Пусть $g \in G$ и $x \in \text{Mat}(d_r, k)$. Положим $\Delta_q = (1 \otimes S)\mathcal{R}_q$. Тогда $\varepsilon(e_g) = \delta_{1,g}$, $\varepsilon(x) = 0$ и

$$\begin{aligned} \Delta(e_g) &= \sum_{f \in G} e_f \otimes e_{f^{-1}g} + \sum_{t=1, \dots, n} (1 \otimes (g \rightharpoonup)) \Delta_t, \\ \Delta(x) &= \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)] + \sum_{i,j=1}^n \Delta_{ij}^r(x), \end{aligned}$$

где $\Delta_{ij}^r(x) \in \text{Mat}(d_i, k) \otimes \text{Mat}(d_j, k)$.

4. Случай одного неодномерного неприводимого представления

Приведем обзор результатов, описывающих строение H в случае одного неодномерного неприводимого представления. В этом случае d_1 делит порядок G делится на d_1 и делит d_1^2 , [8, 9]. В работе [6] показано, что если порядок G имеет максимально возможное значение d_1^2 , то группа G абелева. Из работы [10] и предложения 2 вытекает, что $G = A \times A$ для некоторой абелевой группы A .

Если $d_1 = 2$, то имеется 4 класса алгебр Хопфа — групповая алгебра абелевой группы порядка 8, групповая алгебра группы диэдра D_4 или группы кватернионов Q_8 , а также алгебра Хопфа Г.Каца H порождаемая элементами x, y, z с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 = 1, \quad xy = yx, \quad zx = yz, \quad zy = xz, \\ z^2 &= \frac{1}{2}(1 + x + y - xy), \\ \varepsilon(z) &= 1, \quad S(z) = z^{-1}, \\ \Delta(z) &= \frac{1}{2}((1 + y) \otimes 1 + (1 - y) \otimes x)(z \otimes z), \end{aligned}$$

где x, y — групповые элементы.

В работе [7] рассматривается полупростая алгебры Хопфа H размерности $2p^2$, где p — простое нечетное натуральное число. Тогда либо H имеет одно неприводимое представление размерности $d_1 = p$, причем $|G| = p^2$, либо H дуальная алгебра Хопфа к первому случаю и H имеет $2p$ одномерных представлений и $\frac{p(p-1)}{2}$ представление размерности 2.

ТЕОРЕМА 7 ([1, 5, 4]). Пусть H имеет одно неодномерное неприводимое представление и $G = G(H^*)$.

Следующие условия эквивалентны:

1. Порядок G равен d_1^2 .
2. $\Delta_{11}^1 = 0$ в теореме 6.
3. Φ_1 является неприводимым проективным представлением группы G в M_1 .

При выполнении условий последней теоремы

$$H = (kG)^* \oplus \text{Mat}(d_1, k) \quad (1)$$

и $\varepsilon(x) = 0$, где $x \in \text{Mat}(d_1, k)$. Кроме того, если $\{e_g \mid g \in G\}$ — дуальный базис к базису $\{g \mid g \in G\}$, то $\varepsilon(e_g) = \delta_{g1}$, и

$$\begin{aligned} \Delta(e_g) &= \sum_{f \in G} e_f \otimes e_{f^{-1}g} + \frac{1}{d_1} \sum_{i,j=1}^{d_1} E_{ij} \otimes (g^{-1} \rightarrow S(E_{ji})), \\ \Delta(x) &= \sum_{g \in G} [(\Phi_1(g)x\Phi_1(g)^{-1}) \otimes e_g \\ &\quad + e_g \otimes (S(\Phi_1(g))xS(\Phi_1(g)^{-1}))]. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 8 ([1, 5, 4, 3]). Пусть G — абелева группа порядка d^2 с прямым разложением $G \simeq A \times A$ для некоторой абелевой группы A порядка d . Группа G имеет неприводимое проективное представление Φ размерности d .

Тогда существует такая (косо-)симметричная матрица $U \in \text{GL}(d, k)$ что $[\Phi(g), S(\Phi(f))] = 1$ в $\text{PGL}(d, k)$ для всех $f, g \in G$. Здесь $S(x) = U^t x U^{-1}$ для любого $x \in \text{Mat}(d, k)$. Тогда алгебра H с разложением (1) обладает структурой алгебры Хопфа, указанной в теореме 6. При этом $G \simeq G(H^*)$.

ТЕОРЕМА 9 ([11]). Если d_1 нечетное простое число, то группа групповых элементов $G(H)$ в H из теоремы 8 является циклической группой порядка $2d_1$.

ТЕОРЕМА 10 ([4]). Пусть $n = 1$, $d_1 > 2$ и H из теоремы 8. Тогда алгебра Хопфа H^* не изоморфна ни одной алгебре Хопфа из теоремы 8.

В работах С.Ю. Спиридоновой [18, 19] рассмотрен случай, когда H — полупростая алгебра Хопфа с одним неприводимым неодномерным представлением, G — циклическая группа минимально возможного порядка d_1 , равного размерности единственного неодномерного неприводимого модуля. Кроме того, предполагается, что

$$\Delta_{11}^1(E) \in \text{Mat}(d_1, k)^{\otimes 2}$$

симметрично относительно перестановки матричных множителей.

ТЕОРЕМА 11 ([18, 19]). При выполнении этих условия алгебра Хопфа H существует в том и только в том случае, если $d_1 = p^f - 1$ для некоторого простого числа p . При этом матрица Грама U мономимальна. Найден явный вид гомоморфизма Δ_{11}^1 .

В полученных алгебрах Хопфа описаны идеалы Хопфа.

5. Случай произвольного n

Рассмотрим случай произвольного числа n неприводимых одномерных представлений. Предположим, что группа G абелева. В произвольной матричной компоненте $\text{Mat}(d_i, k)$ для любых k -характеров μ, λ группы G через $C_{\mu, \lambda}^i$ обозначим множество всех таких $x \in \text{Mat}(d_i, k)$, что для любого $g \in G$ выполнены равенства

$$g \rightharpoonup x = \lambda_g x, \quad x \leftharpoonup g = \mu_g x.$$

ТЕОРЕМА 12 ([2]). В алгебре матриц $\text{Mat}(d_i, k)$ имеется $G^* \times G^*$ -градуировка

$$\text{Mat}(d_i, k) = \bigoplus_{\mu, \lambda \in G^*} C_{\mu, \lambda}^i, \quad C_{\mu, \lambda}^i \cdot C_{\alpha, \beta}^i \subseteq C_{\mu\alpha, \lambda\beta}^i.$$

Кроме того, $S(C_{\mu, \lambda}^i) \subseteq C_{\lambda^{-1}, \mu^{-1}}^i$ и

$$\Delta_{jt}^i(C_{\mu, \lambda}^i) \subseteq \bigoplus_{\xi \in G^*} (C_{\mu, \xi}^j \otimes C_{\xi, \lambda}^t) \subseteq \text{Mat}(d_j, k) \otimes \text{Mat}(d_t, k).$$

Пусть Φ_i — проективное представление группы G в модуле M_i . При этом

$$\Phi_i(f)\Phi_i(g) = \lambda_g(f)\Phi_i(g)\Phi_i(f), \quad \lambda_g \in G^*.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 ([2]). $\Phi_i(g) \in C_{\mu_g, \lambda_g}^i$ для некоторого μ_g .

Положим $\Psi(g, f) = \Phi_i(f)S(\Phi_i(g))$. Тогда Ψ_i задает представление группы $G \times G$ в M_i .

ТЕОРЕМА 13 ([2]). Если представление Ψ_i точно и неприводимо, то матрица Грама U_i диагонализуема. Кроме того, $d_i = |G|$ и каждое пространство $C_{\mu, \lambda}^i$ одномерно.

В условиях предыдущего предложения в каждом $C_{\mu, \lambda}^i$ выберем ненулевой элемент (μ, λ) таким образом, что $S(\mu, \lambda) = (\lambda^{-1}, \mu^{-1})$. Можно считать, что умножение имеет вид

$$(\alpha, \beta) \cdot (\mu, \lambda) = \sigma_{\alpha, \mu} \sigma_{\beta, \lambda}^{-1} (\alpha\mu, \beta\lambda)$$

для некоторого 2-коцикла $\sigma : G^* \times G^* \rightarrow k^*$.

В этом случае коумножение имеет вид

$$\Delta_{ii}^i(\alpha, \beta) = \sum_{\xi \in G^*} \kappa_{\alpha, \xi, \beta}(\alpha, \xi) \otimes (\xi, \beta), \quad \kappa_{\alpha, \xi, \beta} \in k,$$

а действия

$$g \rightharpoonup (\alpha, \beta) = \langle g, \beta \rangle(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \leftarrow g = \langle g, \alpha \rangle(\alpha, \beta).$$

Найдены необходимые и достаточные условия на коэффициенты $\kappa_{\alpha, \xi, \beta}$, если снова имеется только одно неприводимое представление Ψ_1 . Они имеют вид

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha, \xi, \beta} &= \kappa_{\beta^{-1}, \xi^{-1}, \alpha^{-1}}; \\ \kappa_{\alpha\gamma, \xi, \beta\nu} &= \sum_{\tau\eta=\xi} \kappa_{\alpha, \tau, \beta} \kappa_{\gamma, \eta, \nu}; \\ \sum_{\xi \in G^*} \kappa_{\alpha, \xi, \beta} &= 0; \\ \kappa_{\varepsilon, \xi, \varepsilon} &= \delta_{\xi, \varepsilon} - \frac{1}{|G|}; \\ \kappa_{\gamma, \rho, \nu} \kappa_{\rho, \sigma, \nu} - \kappa_{\gamma, \rho, \sigma} \kappa_{\gamma, \sigma, \nu} &= \frac{1}{|G|} (\delta_{\gamma, \sigma} - \delta_{\rho, \nu}). \end{aligned} \tag{2}$$

В [2] показано, что случай двух неоднмерных представлений M_1, M_2 алгебры H невозможен, если на M_1 имеется неприводимое представление Φ_1 группы G , а на M_2 — неприводимое представление Ψ_2 группы $G \times G$.

6. Групповые элементы

Опишем групповые элементы в алгебре Хопфа из теоремы 13.

По [1, формула (17)], [2, формулы (12), (13)] умножение и коумножение в H имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta(e_g) &= \sum_{f, h \in G} e_f \otimes e_h + \frac{\alpha_g^{-1}}{|G|^2} \sum_{\alpha, \beta \in G^*} R_{\alpha\beta} \otimes R_{\beta\alpha}, \\ \Delta(R_{\alpha\beta}) &= \sum_{g \in G} (\beta_g R_{\alpha\beta} \otimes e_g + \alpha_g e_g \otimes R_{\alpha\beta}) + \sum_{\xi \in G^*} \kappa_{\alpha, \xi, \beta} R_{\alpha\xi} \otimes R_{\xi\beta}; \\ e_g e_f &= \delta_{f, g} e_g, \quad R_{\alpha\beta} e_g = e_g R_{\alpha\beta} = 0, \quad R_{\alpha\beta} R_{\tau\xi} = \mu_{\alpha, \tau, \beta, \xi} R_{\alpha\tau, \beta\xi}. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим групповые элементы x в H из [1]. Пусть

$$x = \sum_{g \in G} \chi_g e_g + \sum_{\lambda, \mu \in G^*} a_{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}.$$

По [1] и [2, Лемма 3.1]

$$\begin{aligned} \Delta(x) = & \sum_{g \in G} \chi_g \left(\sum_{f, h \in G, fh=g} e_f \otimes e_h + \frac{\alpha_g^{-1}}{|G|^2} \sum_{\alpha, \beta \in G^*} R_{\alpha\beta} \otimes R_{\beta\alpha} \right) + \\ & \sum_{\lambda\mu, \xi \in G^*} a_{\lambda\mu} \kappa_{\lambda, \xi, \mu} R_{\lambda\xi} \otimes R_{\xi\mu} + \\ & \sum_{g \in G} a_{\lambda\mu} \lambda_g e_g \otimes R_{\lambda\mu} + \sum_{g \in G} a_{\lambda\mu} \mu_g R_{\lambda\mu} \otimes e_g. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} x \otimes x = & \sum_{f, h \in G} \chi_f \chi_h e_f \otimes e_h + \sum_{g, \lambda, \mu} \chi_g a_{\lambda\mu} e_g \otimes R_{\lambda\mu} + \\ & \sum_{g, \lambda, \mu} \chi_g a_{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} \otimes e_g + \sum_{\lambda, \mu, \lambda', \mu'} a_{\lambda\mu} a_{\lambda'\mu'} R_{\lambda\mu} \otimes R_{\lambda'\mu'}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициент при $e_f \otimes e_h$ получаем, что $\chi_f \chi_h = \chi_{fh}$, т.е. $\chi \in G^*$.

Из равенства $\Delta(x) = x \otimes x$ вытекает, что существует такая пара $\lambda, \mu \in G^*$, что $a_{\lambda\mu} \neq 0$.

Приравнявая коэффициент при $e_g \otimes R_{\lambda\mu}$ получаем $a_{\lambda\mu} \lambda_g = \chi_g a_{\lambda\mu}$. Поскольку $a_{\lambda\mu} \neq 0$, то $\lambda = \chi$. Аналогично, приравнявая коэффициент при $R_{\lambda\mu} \otimes e_g$ получаем, что $\mu = \chi$.

Итак,

$$x = \sum_{g \in G} \chi_g e_g + a_{\chi} R_{\chi\chi}.$$

и потому

$$\sum_{g \in G} \sum_{\alpha, \beta \in G^*} \frac{\chi_g \alpha_g^{-1}}{|G|^2} R_{\alpha\beta} \otimes R_{\beta\alpha} + \sum_{\xi \in G^*} a_{\chi} \kappa_{\chi, \xi, \chi} R_{\chi\xi} \otimes R_{\xi\chi} = a_{\chi}^2 R_{\chi\chi} \otimes R_{\chi\chi}.$$

Заметим, что $\chi, \alpha^{-1}, \chi\alpha^{-1} \in G^*$. Поэтому

$$\sum_{g \in G} \chi_g \alpha_g^{-1} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \chi; \\ |G|, & \alpha = \chi. \end{cases}$$

Следовательно, последнее равенство имеет вид

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\beta \in G^*} R_{\chi\beta} \otimes R_{\beta\chi} + \sum_{\xi \in G^*} a_{\chi} \kappa_{\chi, \xi, \chi} R_{\chi\xi} \otimes R_{\xi\chi} = a_{\chi}^2 R_{\chi\chi} \otimes R_{\chi\chi}.$$

Таким образом, это равенство возможно только при условии

$$\frac{1}{|G|} + a_{\chi} \kappa_{\chi, \beta, \chi} = \begin{cases} 0, & \beta \neq \chi; \\ a_{\chi}^2, & \beta = \chi. \end{cases}$$

Суммируя эти равенства при всех β в силу [1, формула (23)], получаем $a_\chi^2 = 1$, откуда $a_\chi = \pm 1$ и

$$\kappa_{\chi,\beta,\chi} = a_\chi \left(\delta_{\beta,\chi} - \frac{1}{|G|} \right) \quad (4)$$

Итак,

$$x = \sum_{g \in G} \chi_g e_g + a_\chi R_{\chi\chi}, \quad a_\chi = \pm 1, \quad (5)$$

причем выполнено (4)

ТЕОРЕМА 14. *Группа $G(H)$ состоит из элементов (5), причем выполнено (4), При этом $\chi : G \rightarrow k$ — гомоморфизм групп.*

7. Дуальная алгебра

Дуальная алгебра H^* для H является прямой суммой групповой алгеброй kG и дуального подпространства $\text{Mat}(d, k)^*$.

На пространстве матриц $\text{Mat}(d, k)$ имеется билинейная форма

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AS(B)), \quad (6)$$

где S — антипод.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Выполнены равенства*

$$\text{tr}(R_{\alpha\beta}) = \begin{cases} \neq 0, & \alpha = \beta; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $g \in G$ по [1], [2] имеем

$$g \rightharpoonup R_{\alpha\beta} = \beta_g R_{\alpha\beta} = A_g R_{\alpha\beta} A_g^{-1}.$$

Поэтому если $\beta \neq \varepsilon$, то найдется такое $g \in G$, что $\beta_g \neq 1$. Следовательно, $\text{tr}(R_{\alpha\beta}) = \beta_g \text{tr}(R_{\alpha\beta})$ и потому $\text{tr}(R_{\alpha\beta}) = 0$.

Аналогично рассматривается случай $\alpha \neq \varepsilon$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Форма (6) симметрична и невырождена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [2] для любой матрицы B имеем

$$S(B) = U^t B U^{-1}.$$

Поэтому $\text{tr}(S(B)) = \text{tr} B$. Таким образом, учитывая, что $S^2 = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{tr}(AS(B)) = \text{tr}(S(AS(B))) \\ &= \text{tr}(S^2(B)S(A)) = \text{tr}(BS(A)) = \langle B, A \rangle. \end{aligned}$$

Невырожденность очевидна. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $(\alpha, \beta) \neq (\lambda, \gamma)$, то $\langle R_{\alpha\beta}, R_{\gamma\lambda} \rangle = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по [1, формула (17)] имеем

$$R_{\alpha\beta}R_{\gamma\lambda} = \mu_{\alpha,\gamma,\beta,\lambda},$$

где $\mu_{\alpha,\gamma,\beta,\lambda} \in k$. Таким образом, по [1, теоремы 2.4, 2.7] получаем

$$\begin{aligned} \langle R_{\alpha\beta}, R_{\gamma\lambda} \rangle &= \text{tr}(R_{\alpha\beta}S(R_{\gamma\lambda})) \\ &= \text{tr}(R_{\alpha\beta}R_{\lambda^{-1}\gamma^{-1}}) = \mu_{\alpha,\lambda^{-1},\beta,\gamma^{-1}} \text{tr}(R_{\alpha\lambda^{-1},\beta\gamma^{-1}}) = 0, \end{aligned}$$

по предложению 5, если либо $\alpha \neq \lambda$, либо $\beta \neq \gamma$. $\square$

Без ограничения общности можно ввести нормировку

$$\langle R_{\alpha\beta}, R_{\beta\alpha} \rangle = 1. \quad (7)$$

Используя билинейную форму (6) отождествим пространство матриц со своим дуальным пространством.

Найдем вид произведения $*$ и коумножения Δ^* в H^* .

Пусть

$$R_{\alpha\beta} * R_{\gamma\eta} = \sum_{\tau,\sigma} \omega_{\alpha,\gamma,\beta,\eta}^{\tau\sigma} R_{\tau\sigma} + \sum_g \rho_g g.$$

По (3), (7) и предложению 7 получаем

$$\begin{aligned} \langle R_{\alpha\beta} * R_{\gamma\eta}, R_{\sigma\tau} \rangle &= \omega_{\alpha,\gamma,\beta,\eta}^{\tau\sigma} \sum_{\xi} \kappa_{\sigma,\xi,\tau} \langle R_{\alpha\beta}, R_{\sigma\xi} \rangle \langle R_{\gamma\eta}, R_{\xi\tau} \rangle \\ &= \kappa_{\beta,\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\sigma} \delta_{\gamma,\tau} \delta_{\eta,\alpha} \end{aligned}$$

Далее по (3)

$$\begin{aligned} \langle R_{\alpha\beta} * R_{\gamma\eta}, e_g \rangle &= \rho_g = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma,\tau \in G^*} \sigma_g^{-1} \langle R_{\alpha\beta}, R_{\sigma\tau} \rangle \langle R_{\gamma\eta}, R_{\tau\sigma} \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma,\tau \in G^*} \sigma_g^{-1} \delta_{\alpha,\tau} \delta_{\beta,\sigma} \delta_{\gamma,\sigma} \delta_{\eta,\tau} = \frac{1}{|G|} \beta_g^{-1} \delta_{\alpha,\eta} \delta_{\beta,\gamma}. \end{aligned}$$

Итак,

$$R_{\alpha\beta} * R_{\gamma\eta} = \kappa_{\beta,\alpha,\gamma} \delta_{\eta,\alpha} R_{\gamma\beta} + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \beta_g^{-1} \delta_{\alpha,\eta} \delta_{\beta,\gamma} g \quad (8)$$

Итак, (8) принимает вид

$$R_{\alpha\beta} * R_{\gamma\eta} = \begin{cases} 0, & \eta \neq \alpha; \\ \kappa_{\beta,\alpha,\gamma} R_{\gamma\beta}, & \eta = \alpha, \beta \neq \gamma; \\ \kappa_{\beta,\alpha,\beta} R_{\beta\beta} + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \beta_g^{-1} g, & \eta = \alpha, \beta = \gamma. \end{cases} \quad (9)$$

Аналогичные соображения показывают, что

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} * g &= \beta_g R_{\beta\alpha} = R_{\beta\alpha} \leftarrow g, \\ g * R_{\alpha\beta} &= \alpha_g R_{\beta\alpha} = g \rightarrow R_{\beta\alpha}, \quad g * f = gf. \end{aligned}$$

Вычислим теперь $\Delta^*(g), \Delta^*(R_{\alpha\beta})$.

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta^*(g)(e_f \otimes e_h) &= \langle g, e_f e_h \rangle = \delta_{g,f} \delta_{f,h}, \\ \Delta^*(g)(e_f \otimes R_{\alpha\beta}) &= \Delta^*(g)(R_{\alpha\beta} \otimes e_f) = 0, \\ \Delta^*(g)(R_{\alpha\beta} \otimes R_{\gamma\eta}) &= \langle g, R_{\alpha\beta} R_{\gamma\eta} \rangle = \mu_{\alpha,\gamma,\beta,\eta} \langle g, R_{\alpha\gamma,\beta\eta} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta^*(g) = g \otimes g \quad (10)$$

Далее

$$\begin{aligned} \Delta^*(R_{\alpha\beta})(e_f \otimes e_h) &= \langle R_{\alpha\beta}, e_f e_h \rangle = 0; \\ \Delta^*(R_{\alpha\beta})(R_{\tau\eta} \otimes e_h) &= \langle R_{\alpha\beta}, R_{\tau\eta} e_h \rangle = 0; \\ \Delta^*(R_{\alpha\beta})(e_h \otimes R_{\tau\eta}) &= \langle R_{\alpha\beta}, e_h R_{\tau\eta} \rangle = 0; \\ \Delta^*(R_{\alpha\beta})(R_{\tau\eta} \otimes R_{\lambda\xi}) &= \mu_{\tau,\lambda,\eta,\xi} \langle R_{\alpha\beta}, R_{\tau\lambda,\eta\xi} \rangle = \mu_{\tau,\lambda,\eta,\xi} \delta_{\alpha,\eta\xi} \delta_{\beta,\tau\lambda} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta^*(R_{\alpha\beta}) = \sum_{\tau\lambda=\beta, \eta\xi=\alpha} \mu_{\tau,\lambda,\eta,\xi} R_{\tau\eta} \otimes R_{\lambda\xi} \quad (11)$$

8. Центр H^*

Пусть элемент

$$z = \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{\gamma, \lambda \in G^*} \omega_{\gamma, \lambda} R_{\gamma\lambda}$$

лежит в центре H^* . Тогда

$$z * f = f * z, \quad z * R_{\tau\eta} = R_{\tau\eta} * z$$

для всех $f \in G$ и всех $\tau, \eta \in G^*$.

Как отмечено в предыдущем разделе

$$\begin{aligned} z * f &= \sum_{g \in G} \alpha_g (fg) + \sum_{\gamma, \lambda \in G^*} \omega_{\gamma, \lambda} \lambda_f R_{\lambda\gamma} = \\ f * z &= \sum_{g \in G} \alpha_g (fg) + \sum_{\gamma, \lambda \in G^*} \omega_{\gamma, \lambda} \gamma_f R_{\lambda\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\omega_{\gamma\lambda} \neq 0$, то $\gamma = \lambda$, и

$$z = \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{\lambda \in G^*} \omega_\lambda R_{\lambda\lambda}$$

Далее при $\tau \neq \eta$

$$\begin{aligned} z * R_{\tau\eta} &= \sum_g \alpha_g \tau_g R_{\eta\tau} + \sum_\lambda \omega_\lambda R_{\lambda\lambda} * R_{\tau\eta} = \\ &= \sum_g \alpha_g \tau_g R_{\eta\tau} + \omega_\eta \kappa_{\eta,\eta,\tau} R_{\tau\eta} = \\ R_{\tau\eta} * z &= \sum_g \alpha_g \eta_g R_{\eta\tau} + \sum_\lambda \omega_\lambda R_{\tau\eta} * R_{\lambda\lambda} = \\ &= \sum_g \alpha_g \eta_g R_{\eta\tau} + \omega_\tau \kappa_{\eta,\tau,\tau} R_{\tau\eta}. \end{aligned}$$

Таким образом, при любых $\tau \neq \eta$

$$\sum_g \alpha_g \tau_g = \sum_g \alpha_g \eta_g \quad (12)$$

$$\omega_\eta \kappa_{\eta,\eta,\tau} = \omega_\tau \kappa_{\eta,\tau,\tau}. \quad (13)$$

Наконец

$$\begin{aligned} z * R_{\tau\tau} &= \sum_g \alpha_g \tau_g R_{\tau\tau} + \sum_\lambda \omega_\lambda R_{\lambda\lambda} * R_{\tau\tau} = \\ &= \sum_g \alpha_g \tau_g R_{\tau\tau} + \omega_\tau \kappa_{\tau,\tau,\tau} R_{\tau\tau} + \frac{\omega_\tau}{|G|} \sum_g \tau_g^{-1} g = \\ R_{\tau\tau} * z &= \sum_g \alpha_g \tau_g R_{\tau\tau} + \sum_\lambda \omega_\lambda R_{\tau\tau} * R_{\lambda\lambda} = \\ &= \sum_g \alpha_g \tau_g R_{\tau\tau} + \omega_\tau \kappa_{\tau,\tau,\tau} R_{\tau\tau} + \frac{\omega_\tau}{|G|} \sum_g \tau_g^{-1} g, \end{aligned}$$

что всегда выполнено.

Таким образом, центр H^* задается системой линейных уравнений вида (12) с неизвестными коэффициентами α_g , $g \in G$, и ω_λ , $\lambda \in G^*$. Число уравнений равно $\frac{|G|(|G|-1)}{2}$ и равно числу разных пар несовпадающих элементов η, τ .

Отметим, что размерность центра H^* равна числу неприводимых представлений дуальной алгебры Хопфа H^* .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Артамонов, Полупростые алгебры Хопфа с ограничениями на неприводимые неоднмерные модули // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, вып. 2.

2. V. A. Artamonov, On semisimple Hopf algebras with few representations of dimension greater than one // Revista de la Unión Matemática Argentina, 51(2010), № 2, 91–105
3. Мухатов Р. Б. О структуре полупростых алгебр Хопфа. Рукопись. Деп. в ВИНТИ 17.10.2012, № 405-В2012.
4. V. A. Artamonov, I. A. Chubarov, Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras // Modules and comodules, Trends in Mathematics, 65–85, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, 2008.
5. V. A. Artamonov, I. A. Chubarov, Properties of some semisimple Hopf algebras // Contemp. Math. 483, Algebras, representations and applications, A conference in honour of Ivan Shestakov's 60th birthday, August 26 — September 1, 2007, Maresias, Brazil. Edited by: Vyacheslav Futorny, Victor Kac, Iryna Kashuba and E. Zelmanov. // Amer. Math. Soc., 2009, 23–36.
6. Tambara D., Yamagami S., Tensor Categories with Fusion Rules of Self-Duality for Finite Abelian Groups // J.Algebra 209(1998), 692–707.
7. A. Masuoka, Some further classification results on semisimple Hopf algebras // Commun. Algebra, 24(1996), 307–329.
8. S. Natale, Semisolvability of semisimple Hopf algebras of low dimension // Memoirs of AMS 186(2007).
9. Sonia Natale, Julia Yael Plavnik, On fusion categories with few irreducible degrees // Algebra and Number theory, 6(2012), № 6, 1171–1197, DOI: 10.2140/ant.2012.6.1171
10. Frucht R., Über die Darsteckung endlicher abelscher Gruppen durch Kol-
lineationen // J. reine angew. Math., 166(1932), 16–29.
11. Е. Г. Пунинский, Групповые элементы некоторых полупростых конечномер-
ных алгебр Хопфа // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 2010.
№ 5. С. 15–20.
12. Спиридонова С. Ю. О некоторых полупростых алгебрах Хопфа размерно-
сти $n(n + 1)$ // Математические заметки. 2012. Т. 91, вып. 2. С. 253–269.
13. Спиридонова С. Ю. Обобщенная кокоммутативность некоторых алгебр
Хопфа и их связь с конечными полями // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25,
вып. 5. С. 253–269.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Поступило 3.03.2014