ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-262-268

# О значениях гипергеометрической функции с параметром из алгебраического поля четвертой степени

П. Л. Иванков

**Иванков Павел Леонидович** — профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).
*e-mail: ivankovpl@mail.ru*

**Аннотация**

Исследование арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций с рациональными параметрами часто проводится с помощью метода Зигеля. Этим методом были получены наиболее общие результаты, относящиеся к данной проблеме. Основной недостаток метода Зигеля (в его классической форме) состоит в невозможности применения этого метода к гипергеометрическим функциям с иррациональными параметрами. В этой ситуации исследование обычно основывается на эффективной конструкции функциональной приближающей формы (в методе Зигеля существование такой формы доказывается с помощью принципа Дирихле). Заметим еще, что построение приближающей формы является лишь первым шагом на пути к получению арифметического результата.

Используя эффективный метод, мы сталкиваемся по крайней мере с двумя проблемами, которые в значительной степени сужают область его применимости. Во-первых, неизвестна более или менее общая конструкция эффективной приближающей формы для произведений гипергеометрических функций. По этой причине приходится рассматривать лишь вопросы линейной независимости над тем или иным алгебраическим полем. Выбор этого поля является второй проблемой. Подавляющее большинство опубликованных результатов, относящихся к рассматриваемому кругу задач, имеет дело с мнимым квадратичным полем (или с полем рациональных чисел). Лишь в отдельных случаях удается провести соответствующее исследование для какого-либо другого алгебраического поля.

В данной работе рассматривается случай поля четвертой степени. С помощью специального технического приема устанавливается линейная независимость над таким полем значений некоторой гипергеометрической функции с иррациональным параметром из этого поля.

*Ключевые слова:* гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость.

*Библиография:* 16 названий.

**Для цитирования:**
П. Л. Иванков. О значениях гипергеометрической функции с параметром из алгебраического поля четвертой степени // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 262–268.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-262-268

# On the values of hypergeometric function with parameter from algebraic field of the fourth degree

P. L. Ivankov

**Ivankov Pavel Leonidovich** — professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
*e-mail: ivankovpl@mail.ru*

**Abstract**

In order to investigate arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric functions with rational parameters one often makes use of Siegel's method. By means of this method have been achieved the most general results concerning this problem. The main deficiency of Siegel's method consists in the impossibility of its application in case of hypergeometric functions with irrational parameters. In this situation the investigation is usually based on the effective construction of the functional approximating form (in Siegel's method the existence of such a form is proved by means of pigeon-hole principle). The construction and investigation of an approximating form is the first step to the achievement of arithmetic result.

Applying effective method we encounter at least two problems which make considerably narrow the area of its employment. First, the more or less general effective construction of the approximating form for the products of hypergeometric functions is unknown. While using Siegel's method one doesn't deal with such a problem. Hence the investigator is compelled to consider only questions of linear independence of the values of hypergeometric functions over some algebraic field. Choosing this field is the second problem. The great majority of published results concerning corresponding questions deals with imaginary quadratic field (or the field of rational numbers). Only in exceptional situations it is possible to investigate the case of some other algebraic field.

We consider here the case of a field of the fourth degree. By means of a special technique we establish linear independence over such a field of the values of some hypergeometric function with irrational parameter from that field.

*Keywords:* hypergeometric function, effective construction, linear independence.

*Bibliography:* 16 titles.

**For citation:**
P. L. Ivankov, 2022, "On the values of hypergeometric function with parameter from algebraic field of the fourth degree", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 262–268.

## 1. Введение

Арифметическая природа значений обобщенных гипергеометрических функций, т.е. функций вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \tag{1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, причем $a(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \dots$ , изучалась во многих работах; см., например, [1]–[8]. Если в правой части (1) положить $a(x) \equiv 1$, $b(x) = x(\lambda + x)$, то мы получим функцию

$$K(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x},\ \lambda \neq -1, -2. \dots .$$

Значения этой функции и ее производной

$$K(\xi) \text{ и } K'(\xi) \tag{2}$$

при $\xi \neq 0$ рассматривались в ряде работ; наиболее общие результаты, относящиеся к арифметической природе таких значений, получены при рациональных $\lambda$, см. [3, гл. 6]. В частности, если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то при некоторых естественных ограничениях на $\lambda$ и $\xi$ доказана алгебраическая независимость чисел (2). При иррациональном $\lambda$ известные методы, как правило, позволяют доказать лишь линейную независимость этих чисел над соответствующим полем, причем в этом случае участвующие в рассуждениях линейные приближающие формы обычно строят эффективно. Например, из результатов работы [4] следует линейная независимость чисел (2) над мнимым квадратичным полем, если $\lambda$ и $\xi$ берутся из этого же поля. Наибольшее внимание в этом направлении исследований уделяется количественным результатам. Применительно к рассматриваемому случаю это означает получение оценок снизу модуля линейной формы

$$h_1 K(\xi) + h_2 K'(\xi) \tag{3}$$

в зависимости от максимума модулей коэффициентов $h_1$ и $h_2$, причем эти коэффициенты должны быть целыми в соответствующем поле. По этому поводу см. работы [5]— [11]. В некоторых из перечисленных работ получены точные по высоте оценки, а также вычислены входящие в эти оценки постоянные. Эффективные конструкции линейных приближающих форм можно использовать также для изучения ситуации, в которой $\lambda$ и $\xi$ лежат не в мнимом квадратичном, а в каком-либо другом поле алгебраических чисел. Отметим в связи с этим работы [12] — [15]. В работе [13] рассмотрен случай мнимого кубического поля. В работах [14] и [15] изучается случай вещественного квадратичного поля. В данной работе мы рассматриваем поле алгебраических чисел специального вида четвертой степени. Оценки линейных форм вида (3) при этом не рассматривается, т.к. ожидаемые здесь результаты весьма далеки от окончательных.

## 2. Формулировка теоремы

Пусть

$$\chi_1(\zeta) = 1,\ \chi_2(\zeta) = \zeta,\ \chi_3(\zeta) = \zeta(\zeta + \lambda)\,;$$

рассмотрим при $j = 1, 2$ и при $\lambda \neq -1, -2, \dots$ функции

$$K_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\chi_j(\nu) z^{\nu}}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}\,.$$

Теорема 1. *При $\lambda = i\sqrt[4]{2}$ числа*

$$K_j(1),\ j = 1, 2, \tag{4}$$

*линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$.*

В сформулированной теореме параметр $\lambda$ функций $K_j(z)$ лежит в поле четвертой степени. Ранее аналогичные результаты были получены для иррационального $\lambda$ из некоторых других полей алгебраических чисел (см. выше).

## 3. Доказательство теоремы

Пусть $n$ — натуральное число. Рассмотрим многочлены

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{js} z^s,$$

где

$$p_{js} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{\prod_{x=0}^{2n}(\zeta - x)d\zeta}{\chi_{j+1}(\zeta - s)\prod_{x=0}^{s-1}(\zeta - x)(\zeta + \lambda - x)}\,; \tag{5}$$

в последнем выражении $\Gamma$ есть положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции. Записав интеграл из правой части (5) в виде вычета относительно бесконечно удаленной точки, нетрудно убедиться, что $p_{js}$ являются многочленами от $\lambda$ с целыми рациональными коэффициентами. В правой части равенства (5) заменим в числителе под знаком интеграла $2n$ на $2n-1$; в левой части заменим $p_{js}$ на $p_{0js}$. После этого определим при $j = 1, 2$ многочлены

$$P_{0j}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{0js} z^s$$

и линейную форму

$$\sum_{j=1}^{2} P_{0j}(z) K_j(z) = R_0(z). \tag{6}$$

В работе [12, лемма 1] доказано, что

$$\sum_{j=1}^{2} P_j(z) K_j(z) = R(z), \tag{7}$$

где

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu \prod_{x=0}^{2n}(\nu - x)}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}\,. \tag{8}$$

Мы воспользуемся также [12, лемма 2]. В этой лемме утверждается, что если $\lambda \notin \mathbb{Z}$, а $\xi$ — ненулевое число, то при $n \to \infty$

$$P_j(\xi) = \Gamma(\lambda + 2n + 1)\left(\frac{(-1)^j K_{3-j}(\xi)}{\Gamma(\lambda+1)} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ j = 1, 2, \tag{9}$$

$$R(\xi) = \frac{\xi^{2n+1}\Gamma(\lambda+1)}{(\lambda + 2n + 1)\Gamma(\lambda + 2n + 1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{10}$$

Из (9) следует неравенство

$$|P_j(\xi)| \leqslant C_1 |\Gamma(\lambda + 2n + 1)|, \tag{11}$$

где положительная постоянная $C_1$ не зависит от $n$. Аналогичные соотношения выполняются и для многочленов $P_{0j}(z)$ и линейной формы $R_0(z)$; при этом следует заменить $2n$ на $2n-1$.

Положим $\lambda = i\sqrt[4]{2}$ и рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} P_{01}(1) & P_{02}(1) \\ P_1(1) & P_2(1) \end{vmatrix}.$$

Элементы этого определителя являются целыми числами в поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$, что вытекает из замечания после равенства (5). При этом сам определитель $D$ отличен от нуля; см. по этому поводу работу [8, леммы 5 и 9]. Пусть существуют два целых в поле $\mathbb{K}$ числа $h_1$ и $h_2$, из которых хотя бы одно отлично от нуля и для которых

$$h_1 K_1(1) + h_2 K_2(1) = 0, \tag{12}$$

т.е. предположим, что числа (4) линейно зависимы над полем $\mathbb{K}$. Поскольку определитель $D$ отличен от нуля, то одну из его строк можно заменить числами $h_1$ и $h_2$, и при этом получится отличный от нуля определитель. Пусть, для определенности,

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ P_1(1) & P_2(1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда

$$|\Delta^{(1)}\Delta^{(2)}\Delta^{(3)}\Delta^{(4)}| \geqslant 1, \tag{13}$$

где в левой части выписаны определители, получающиеся из $\Delta$ заменой числа $\lambda$, входящего в выражения для коэффициентов многочленов (5), соответственно на числа, сопряженные числу $\lambda = i\sqrt[4]{2}$ в поле $\mathbb{K}$, т.е. на числа

$$i\sqrt[4]{2},\ -i\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{2},\ -\sqrt[4]{2}.$$

Учитывая (11), (13), а также равенство $|\Delta^{(1)}| = |\Delta^{(2)}|$, получаем отсюда такое неравенство

$$|\Delta| \geqslant \frac{C_2}{\sqrt{\Gamma(\sqrt[4]{2} + 2n + 1)\Gamma(-\sqrt[4]{2} + 2n + 1)}}, \tag{14}$$

где положительная константа $C_2$ не зависит от $n$.

Равенство (12) и оценка (10) при $\xi = 1$ позволяют оценить модуль определителя $\Delta$ также и сверху. Известно, что функция $K_\lambda(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка $zy'' + y + (\lambda - 1)y = 0$. Отсюда следует, что среди чисел (4) имеется отличное от нуля. Пусть, например, $K_1(1) \neq 0$. Тогда определитель $\Delta$ можно записать в виде

$$\Delta = \frac{1}{K_1(1)} \begin{vmatrix} 0 & h_2 \\ R(1) & P_2(1) \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из (10) получаем такую оценку

$$|\Delta| \leqslant \frac{C_3}{|(\lambda + 2n + 1)(\Gamma(\lambda + 2n + 1))|}$$

Если применить формулу Стирлинга, то мы увидим, что последняя оценка противоречит (14), откуда и следует справедливость теоремы.

## 4. Заключение

Применяемый в данной работе технический прием, может, быть использован и для решения других аналогичных задач. Можно, например, попробовать обобщить теорему из работы [12], где рассмотрен случай мнимого кубического поля. Формулировка теоремы была опубликована в [16].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929. № 1, S. 1-70.

2. Siegel C.L. Transcendental numbers. Princeton University Press. Princeton, 1949.

3. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.

4. Osgood Ch. F. Some theorems on diophantine approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, № 1, pp. 64–87.

5. Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19–28.

6. Галочкин А.И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 1. С. 35-45.

7. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220–1235.

8. Галочкин А.И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм // Математический сборник. 1984. Т. 124, № 3. С. 416–430.

9. Коробов А.Н. Оценки некоторых линейных форм // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983, № 6. С. 36–41.

10. Попов А.Ю. Приближения некоторых степеней числа $e$ // Диофантовы приближения, часть I. Изд-во МГУ, 1985. С. 77–85.

11. Иванков П.Л. О приближении значений некоторых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1994, № 4. С. 12–15.

12. Иванков П.Л. О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля // Чебышевский сборник. 2019, т 20, вып. 2. С. 170–177.

13. Иванков П.Л. О совместных приближениях значений некоторых целых функций числами из кубического поля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1987. № 3. С. 53–56.

14. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 5. С. 53–62.

15. Иванков П.Л. О приближении значений гипергеометрической функции с параметром из вещественного квадратичного поля // Математика и математическое моделирование. 2017, № 1. С. 25–33.

16. Иванков П.Л. О значениях некоторых функций с иррациональным параметром // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвященной 200-летию со дня рождения П.Л.Чебышева. Тула, 2021. С. 204.

## REFERENCES

1. Siegel, C.L. 1929, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen" *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* № 1, pp. 1–70.

2. Siegel, C.L. 1949, "Transcendental numbers." Princeton University Press.

3. Shidlovskii, A.B. 1987, *"Transtsendentnye chisla"* , [Transcendental numbers] Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian).

4. Osgood, Ch. F. 1966, "Some theorems on diophantine approximation" *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 123, № 1, pp. 64–87.

5. Galochkin, A.I. 1970, "Lower estimates of the linear forms in the values of some hypergeometric functions", *Mat. Zametki*, v. 8, № 1, pp. 19–28. (Russian).

6. Galochkin, A.I. 1976, "Sharpening of the estimates of some linear forms", *Mat. Zametki*, v. 20, № 1, pp. 35-45. (Russian).

7. Galochkin, A.I. 1976, "On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions", *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, № 6, pp. 1220–1235.(Russian)

8. Galochkin, A.I., 1984, "Estimates, unimprovable with respect to height, for certain linear forms", Mat. Sb., vol. 124(166), № 3, pp. 416–430. (Russian).

9. Korobov, A.N. 1983, "Estimates of some linear forms", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, № 6, pp. 36–41. (Russian).

10. Popov, A. Yu. 1985, "Approximations of some degrees of the number $e$", *Diophantovy priblizhenija*, part 1. Moskov. Gos. Univ., Moscow (Russian).

11. Ivankov, P.L. 1994, "On approximation of the values of some functions", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, № 4, pp. 12–15. (Russian).

12. Ivankov, P.L. 2019, "On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field", Chebyshevsky sbornik, vol. 20, № 2, p. 170–177 (Russian).

13. Ivankov, P.L. 1987, "On simultaneous approximations of the values of some entire functions by the numbers from a cubic field", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1, Mat. Meh.*, № 3, pp. 53-56. (Russian).

14. Ivankov, P.L. 1993, "On linear independence of values of entire hypergeometric functions with irrational parameters", *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 34, № 5, pp. 839–847. (Russian)

15. Ivankov, P.L. 2017, "On approximation of the values of hypergeometric function with a parameter from real quadratic field", *Mathematics and Mathematical Modelling*, № 1, pp. 25–33. (Russian).

16. Ivankov, P.L. 2021, "On the values of some functions with irrational parameter" //In: Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modelling: modern problems, applications and problems of history.
   Transactions of the XIX International conference devoted to the 200-th anniversary of P.L.Chebyshev. Tula, P. 204.

Получено 23.06.2022
Принято в печать 14.09.2022