

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-249-254

О трёхмерных сетках Смоляка III¹

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dv@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Это третья статья из серии, посвящённой сеткам Смоляка. Работа относится к аналитической теории чисел и в ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа.

В работе показано, что:

1. линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s \geq 3$ не является нормальным;
2. найдены значения некоторых тригонометрических сумм $S_q(m_1, \dots, m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s \geq 3$.

Ключевые слова: сетки Смоляка, квадратурные формулы с сетками Смоляка, интерполяционные формулы с сетками Смоляка.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка III // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 249–254.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а. Исследование выполнено за счет гранта правительства Тульской области (договор № ДС/306 от 16.11.2021)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-249-254

About three-dimensional nets of Smolyak III²

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dv@mail@mail.ru

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

This is the third article in a series dedicated to Smolyak grids. The work relates to analytical number theory and it deals with the application of number theory to problems of approximate analysis.

The paper shows that:

1. the linear operator A_q of weighted grid averages over the Smolyak grid at dimension $s \geq 3$ is not normal;
2. found the values of some trigonometric sums $S_q(m_1, \dots, m_s)$ of the resin grid at the dimension $s \geq 3$.

Keywords: grid Smolyak, quadrature formulas with grids of Smolyak, interpolation formula with grids of Smolyak.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2022, "About three-dimensional nets of Smolyak III", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 249–254.

1. Введение

Рассмотрим s -мерные сетки Смоляка $Sm(q, s)$ с параметром $q \geq s$, которые определяются как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1, \dots, \nu_s)$ с $\max(s, q - s + 1) \leq \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q$, таким образом

$$Sm(q, s) = \left\{ \left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq k_1 \leq 2^{\nu_1} - 1, \dots, 0 \leq k_s \leq 2^{\nu_s} - 1, \\ \nu_1, \dots, \nu_s \geq 1, \quad \max(s, q - s + 1) \leq \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q \end{array} \right\}. \quad (1)$$

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a. The study was carried out at the expense of a grant from the Government of the Tula region (contract No. DS/306 dated 11/16/2021)

Обозначим через $S_q(m_1, \dots, m_s)$ тригонометрическую сумму сетки Смоляка, определенную равенством:

$$S_q(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\substack{\rightarrow \\ \nu \in C_s(q-k)}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{2^{\nu_1}} + \dots + \frac{m_s k_s}{2^{\nu_s}} \right)},$$

где $C_s(q) = \{ \substack{\rightarrow \\ \nu} = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \mid \nu_1 + \dots + \nu_s = q, \nu_j \geq 1 (j = 1, \dots, s) \}$, $k(q, s) = \min(q - s, s - 1)$.

Суммируя по $k_1, \dots, k_s$, получим

$$S_q(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\substack{\rightarrow \\ \nu \in C_s(q-k)}} \delta_{2^{\nu_1}}(m_1) \dots \delta_{2^{\nu_s}}(m_s), \quad (2)$$

где

$$\delta_a(m) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 \pmod{a}, \\ 0, & \text{при } m \not\equiv 0 \pmod{a} \end{cases}$$

— символ Коробова. Если $m = \prod_p p^{\nu_p(m)}$ — каноническое разложение на простые множители, то $\delta_{2^\nu}(m) = 1$ только при $\nu \leq \nu_2(m)$. Отсюда видно, что все значения тригонометрических сумм сеток Смоляка целые числа.

В работе [7] доказана следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство $S_q(\substack{\rightarrow \\ 0}) = 1$.*

В этой же работе был поставлен вопрос: каковы истинные значения тригонометрических сумм $S_q(m_1, \dots, m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s \geq 3$?

А также, связанный с ним вопрос: является ли нормальным линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s \geq 3$?

Цель данной статьи — найти эти значения и дать отрицательный ответ на второй вопрос.

2. Тригонометрические суммы сетки Смоляка

Из равенства (2) непосредственно следует, что тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\substack{\rightarrow \\ m})$ равна 0, если хоть одно значение m_j — нечетное число, поэтому далее будем предполагать, что все координаты целого вектора m — четные числа. Пусть далее $m_\nu = 2^{\nu_\nu} l_\nu$, $\nu_\nu \geq 1$, $(l_\nu, 2) = 1$ ($\nu = 1, \dots, s$) и $N(t; n_1, \dots, n_s)$ — количество решений в натуральных числах системы

$$\begin{cases} \nu_1 + \dots + \nu_s = t \\ 1 \leq \nu_j \leq n_j \quad (j = 1, \dots, s). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $N(t, t-s+1, \dots, t-s+1) = C_{t-1}^{s-1}$ и $N(t; n_1, \dots, n_s) = 0$ при $n_1 + \dots + n_s < t$.

Отсюда сразу следует, что

$$\sum_{\substack{\rightarrow \\ \nu \in C_s(q-k)}} \delta_{2^{\nu_1}}(2^{n_1}) \dots \delta_{2^{\nu_s}}(2^{n_s}) = N(q-k; n_1, \dots, n_s),$$

$$S_q(2^{n_1} l_1, \dots, 2^{n_s} l_s) = S_q(2^{n_1}, \dots, 2^{n_s}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k N(q-k; n_1, \dots, n_s).$$

Простейший случай получаем при $q = s$.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$S_s(2^{n_1}, \dots, 2^{n_s}) = 1. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $k(s, s) = \min(0, s - 1) = 0$ и

$$S_s(2^{n_1}, \dots, 2^{n_s}) = N(s; n_1, \dots, n_s) = 1.$$

□

Так как от перестановки аргументов в сумме $S_q(2^{n_1}, \dots, 2^{n_s})$ её значение не меняется, то будем предполагать, что $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$ и обозначать такое значение через $S_q^*(n_1, \dots, n_s)$. Аналогично, будем писать $N^*(t; n_1, \dots, n_s)$, предполагая, что $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$.

ЛЕММА 3. *Если $n_1 \geq q - s + 2$ и $n_2 + \dots + n_s < q - k(q, s)$, то*

$$N^*(t; n_1, \dots, n_s) = n_2 \cdot \dots \cdot n_s \quad (q - k(q, s) \leq t \leq q),$$

$$S_q^*(n_1, \dots, n_s) = \begin{cases} 0 & \text{при } q \geq 2s - 1, \\ n_2 \cdot \dots \cdot n_s \sum_{k=0}^{q-s+1} (-1)^k C_{s-1}^k & \text{при } s + 1 \leq q \leq 2s - 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, справедливы неравенства

$$s - 2 \leq \nu_2 + \dots + \nu_s \leq n_2 + \dots + n_s < q - k(q, s).$$

Поэтому для любого набора натуральных $1 \leq \nu_j \leq n_j$ ($j = 2, \dots, s$) имеем для $\nu_1 = t - (\nu_2 + \dots + \nu_s)$ неравенства

$$0 \leq t - (q - k(q, s)) < \nu_1 \leq t - s + 2.$$

Отсюда следует, что

$$N^*(t; n_1, \dots, n_s) = n_2 \cdot \dots \cdot n_s \quad (q - k(q, s) \leq t \leq q).$$

Следовательно, вынося общий множитель, получим

$$S_q^*(n_1, \dots, n_s) = n_2 \cdot \dots \cdot n_s \sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k.$$

Так как при $q \geq 2s - 1$ имеем $k(q, s) = \min(q - s + 1, s - 1) = s - 1$, то

$$\sum_{k=0}^{k(q,s)} (-1)^k C_{s-1}^k = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k C_{s-1}^k = (1 - 1)^{s-1} = 0, \quad S_q^*(n_1, \dots, n_s) = 0.$$

□

3. Оператор взвешенных сеточных средних

Рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_q f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{k(q,s)} \frac{(-1)^k C_{s-1}^k}{2^{q-k}} \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}} + x_1, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} + x_s\right). \quad (4)$$

Обозначим через $A_q C(m)$ действие линейного оператора A_q на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$. В работе [7] следующая лемма:

ЛЕММА 4. Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (5)$$

справедливо равенство

$$A_q C(\vec{m}) = S_q(\vec{m}) C(\vec{m}) \quad (6)$$

где $S_q(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки Смоляка.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_q f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка называется нормальным, если он не увеличивает норму любой функции из класса E_s^α .

Очевидно, что необходимым и достаточным условием нормальности линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних является ограниченность сверху единицей модуля всех тригонометрических сумм сетки Смоляка: $|S_q(\vec{m})| \leq 1$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$). Как показано в работе [2], тригонометрические суммы двумерной сетки Смоляка принимают только три значения: 1, 0, -1. Поэтому оператор взвешенных сеточных средних для двумерных сеток Смоляка — нормальный.

Из доказанной леммы следует, что собственными функциями линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних для сеток Смоляка является набор базисных функций $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$) за исключением тех гармоник, которые переходят в ноль, то есть принадлежат ядру оператора. Собственными значениями являются соответствующие тригонометрические суммы сеток Смоляка $S_q(\vec{m})$ отличные от нуля.

Таким образом, нормальные линейные операторы A_q взвешенных сеточных средних выделяются условием, что все собственные значения этих операторов не превосходят по модулю единицу. Из леммы 3 вытекает, что при $s \geq 3$ найдутся тригонометрические суммы сеток Смоляка, для которых их абсолютное значение больше 1. Следовательно, при $s \geq 3$ оператор взвешенных сеточных по сетке Смоляка не является нормальным.

4. Заключение

В настоящей работе были даны ответы на вопросы, поставленные в работе [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 18–20.
2. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.

3. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36–36.
4. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6–18.
5. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, 2014.
6. Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка I // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 193–219.
7. Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 100–121.
8. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5, С. 1042–1045.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, "On grids of Smolyak S. A." , *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii*, Tula, Russia, pp. 18–20.
2. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids" , *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.
3. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak" , *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki"* [Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"], Tula, Russia, pp. 34–36.
4. Dobrovol'skii, N. N., 2013, "О гиперболическом параметре сетки" , *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 2. P. 1. P. 6–18.
5. Dobrovol'skii, N. N., 2014, *Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application*, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.
6. N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "About three-dimensional nets of Smolyak I" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 193–219.
7. N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2021, "About three-dimensional nets of Smolyak II" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 100–121.
8. Smolyak, S. A., 1963, "Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions" , *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

Получено 11.06.2022

Принято в печать 14.09.2022