ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 512.543

# НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА [1]

Д. Н. Азаров (г. Иваново)

**Аннотация**

Получено обобщение одной классической теоремы Шмелькина о полициклических группах. А. Л. Шмелькин доказал, что если $G$ — полициклическая группа, то она почти аппроксимируема конечными $p$-группами для любого простого числа $p$. Напомним, что группа $G$ называется аппроксимируемой конечными $p$-группами, если для каждого неединичного элемента $a$ группы $G$ существует гомоморфизм группы $G$ на конечную $p$-группу, при котором образ элемента $a$ отличен от 1. Группа $G$ называется почти аппроксимируемой конечными $p$-группами, если она содержит подгруппу конечного индекса, которая аппроксимируема конечными $p$-группами.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа $G$ называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число $r$ такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы $G$ порождается не более чем $r$ элементами. Для разрешимой группы конечного ранга получено следующее необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными $\pi$-группами для подходящего конечного множества $\pi$ простых чисел.

Группа $G$ конечного ранга аппроксимируема конечными $\pi$-группами для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел тогда и только тогда, когда $G$ является редуцированной поли-(циклической, квазициклической, рациональной) группой. Напомним, что группа $G$ называется редуцированной, если в ней нет неединичных полных подгрупп. Группу $H$ мы называем полной, если в ней из любого элемента $h$ можно извлечь корень любой натуральной степени.

Доказано, что если разрешимая группа конечного ранга аппроксимируема конечными $\pi$-группами для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел, то она почти аппроксимируема конечными нильпотентными

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному заказу.

$\pi$-группами. Доказано также следующее обобщение сформулированной выше теоремы Шмелькина.

Пусть $\pi$ — фиксированное конечное множество простых чисел. Разрешимая группа $G$ конечного ранга почти аппроксимируема конечными $\pi$-группами тогда и только тогда, когда $G$ — редуцированная поли-(циклическая, квазициклическая, рациональная) группа, не содержащая $\pi$-полных элементов бесконечного порядка.

Напомним, что элемент $g$ группы $G$ называется $\pi$-полным, если для каждого $\pi$-числа $m$ из элемента $g$ можно извлечь в группе $G$ корень $m$-й степени.

*Ключевые слова:* группа конечного ранга, разрешимая группа, полициклическая группа, нильпотентная группа, аппроксимируемость конечными $p$-группами.

# SOME RESIDUAL PROPERTIES OF SOLUBLE GROUPS OF FINITE RANK

D. N. Azarov

**Abstract**

The generalization of one classical Smel'kin's theorem for polycyclic groups is obtained. A. L. Smelkin proved that if $G$ is a polycyclic group, then it is a virtually residually finite $p$-group for any prime $p$. Recall that a group $G$ is said to be a residually finite $p$-group if for every nonidentity element $a$ of $G$ there exists a homomorphism of the group $G$ onto some finite $p$-group such that the image of the element $a$ differs from 1. A group $G$ will be said to be a virtually residually finite $p$-group if it contains a finite index subgroup which is a residually finite $p$-group.

One of the generalizations of the notation of polycyclic group is a notation of soluble finite rank group. Recall that a group $G$ is said to be a group of finite rank if there exists a positive integer $r$ such that every finitely generated subgroup in $G$ is generated by at most $r$ elements. For soluble groups of finite rank the following necessary and sufficient condition to be a residually finite $\pi$-group for some finite set $\pi$ of primes is obtained.

If $G$ is a group of finite rank, then the group $G$ is a residually finite $\pi$-group for some finite set $\pi$ of primes if and only if $G$ is a reduced poly-(cyclic, quasicyclic, or rational) group. Recall that a group $G$ is said to be a reduced group if it has no nonidentity radicable subgroups. A group $H$ is said to be a radicable group if every element $h$ in $H$ is an $m$th power of an element of $H$ for every positive number $m$.

It is proved that if a soluble group of finite rank is a residually finite $\pi$-group for some finite set $\pi$ of primes, then it is a virtually residually finite nilpotent $\pi$-group. We prove also the following generalization of Smel'kin's theorem.

Let $\pi$ be a finite set of primes. If $G$ is a soluble group of finite rank, then the group $G$ is a virtually residually finite $\pi$-group if and only if $G$ is a reduced poly-(cyclic, quasicyclic, or rational) group and $G$ has no $\pi$-radicable elements of infinite order. Recall that an element $g$ in $G$ is said to be $\pi$-radicable if $g$ is an $m$th power of an element of $G$ for every positive $\pi$-number $m$.

*Keywords:* finite rank group, soluble group, polycyclic group, nilpotent group, residually finite $p$-group.

## 1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа $G$ называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $a$ группы $G$ существует гомоморфизм группы $G$ на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента $a$ отличен от 1. Группа $G$ называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где $\pi$ — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных $\pi$-групп. Если множество $\pi$ состоит из одного простого числа $p$, то класс $\mathcal{F}_\pi$ совпадает с классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных $p$-групп.

Еще более тонким свойством является $\pi$-примарная аппроксимируемость (термин предложен Д. И. Молдаванским), т. е. аппроксимируемость классом

$$\mathcal{K} = \bigcup_{p\in\pi} \mathcal{F}_p.$$

Это свойство равносильно свойству аппроксимируемости конечными нильпотентными $\pi$-группами. Поэтому для нильпотентных групп свойство $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости равносильно свойству $\pi$-примарной аппроксимируемости. Для разрешимых групп это уже не так. Примером разрешимой $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы, не являющейся $\pi$-примарно аппроксимируемой, может служить любая конечная разрешимая $\pi$-группа, не являющаяся нильпотентной.

В 1952 году К. Гирш [1] доказал, что любая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Этот результат был усилен сначала в работе Лернера [2], а затем в работе А. Л. Шмелькина [3]. Лернером доказано, что для каждой полициклической группы $G$ существует конечное множество $\pi$ простых чисел такое, что группа $G$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, а в работе А. Л. Шмелькина доказана почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость произвольной полициклической группы для любого простого $p$. Заметим, что вопрос об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп исследован только в некоторых частных случаях.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа $G$ называется группой конечного ранга (или, в другой терминологии, группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число $r$ такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы $G$ порождается не более чем $r$ элементами.

Элемент $a$ группы $G$ называется полным, если для любого целого положительного числа $n$ уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе $G$. Группа $G$ называется полной, если все ее элементы являются полными. Группа $G$ называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп.

Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа является редуцированной. С другой стороны Д. Робинсон доказал, что если разрешимая группа конечного ранга является редуцированной, то она финитно аппроксимируема (см., напр., [4], п. 5.3.2).

Вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга для подходящего конечного множества $\pi$ простых чисел решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел тогда и только тогда, когда она является редуцированной FATR-группой.*

Следуя Д. Робинсону [4], мы называем разрешимую группу FATR-группой (группой с конечными абелевыми тотальными рангами), если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел.

Достаточность в теореме 1 установлена Д. Робинсоном (см., напр., [4], п. 5.3.8). Необходимость доказана ниже. Кроме того, для разрешимых групп конечного ранга, удовлетворяющих условиям теоремы 1, мы докажем следующее более тонкое свойство.

Теорема 2. *Если разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел, то она почти $\pi$-примарно аппроксимируема.*

Для разрешимой группы бесконечного ранга из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости уже не следует свойство почти $\pi$-примарной аппроксимируемости. Приведем соответствующий пример. Пусть множество $\pi$ состоит из двух простых чисел $p$ и $q$. Для каждого целого положительного числа $k$ рассмотрим группы

$$A_k = (a_1, a_2, \dots a_{q^k}; a_i{}^p = 1, a_i a_j = a_j a_i, (i, j = 1, 2, \dots q^k))$$

и

$$G_k = (A, b; b^{q^k} = 1, b^{-1}a_1 b = a_2, b^{-1}a_2 b = a_3, \dots b^{-1}a_{q^k-1}b = a_{q^k}, b^{-1}a_{q^k}b = a_1).$$

Очевидно, что подгруппа $A_k$ является наибольшей нормальной нильпотентной подгруппой группы $G_k$. Очевидно также, что прямое произведение $G$ групп

$G_k$ по всем $k$ является разрешимой $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой. Покажем, что эта группа не является почти $\pi$-примарно аппроксимируемой. Допустим от противного, что в $G$ существует нормальная $\pi$-примарно аппроксимируемая подгруппа $H$ конечного индекса $n$. Тогда $H \cap G_k$ — нормальная $\pi$-примарно аппроксимируемая подгруппа конечной группы $G_k$. Поэтому подгруппа $H \cap G_k$ нильпотентна, и следовательно она содержится в $A_k$. Тогда для каждого $k$ выполняется неравенство

$$[G_k : A_k] \leqslant [G_k : H \cap G_k] \leqslant [G : H] = n,$$

что не возможно, так как индексы $[G_k : A_k] = q^k$ не ограничены.

Заметим еще, что для фиксированного конечного множества $\pi$ простых чисел мы не располагаем критерием $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга, но, тем не менее, удается доказать следующий критерий почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.

Теорема 3. *Пусть $\pi$ — конечное множество простых чисел. Разрешимая группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она является редуцированной FATR-группой и не содержит $\pi$-полных элементов бесконечного порядка.*

Элемент $a$ группы $G$ называется $\pi$-полным, если для любого целого положительного $\pi$-числа $n$ уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе $G$.

Непосредственным следствием теоремы 3 является упомянутый выше результат А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости произвольной полициклической группы для каждого простого числа $p$.

Важным примером разрешимой группы конечного ранга является группа

$$G_n = (a, b; b^{-1}ab = a^n),$$

где $n$ — целое неотрицательное число. Эта группа принадлежит хорошо известному классу групп Баумслага — Солитэра и является финитно аппроксимируемой [5, 6]. Очевидно, что подгруппа $H$ группы $G_n$, порожденная всеми элементами $b^{-k}ab^k$, где $k$ — целое число, изоморфна группе $Q_n$ $n$-ичных дробей, а фактор-группа группы $G_n$ по подгруппе $H$ является бесконечной циклической. Поэтому $G_n$ — редуцированная разрешимая FATR-группа без кручения. Пусть теперь $\pi$ — некоторое (не обязательно конечное) множество простых чисел. Если все числа из $\pi$ делят $n$, то все элементы из $H \cong Q_n$ являются $\pi$-полными, и в этом случае в силу теоремы 3 группа $G_n$ не является почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой. Если же некоторое простое число $p$ из $\pi$ не делит $n$, то в группе $G_n$, очевидно, нет неединичных $p$-полных элементов и тогда в силу теоремы 3 группа $G_n$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и следовательно она почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Таким образом, из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $\pi$ — произвольное непустое множество простых чисел. Группа $G_n$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда множество $\pi$ не содержится в множестве всех делителей числа $n$.*

Независимое доказательство следствия 1 приведено в [7] (см. также [8]).

Для доказательства теоремы 1, 2 и 3 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

## 2. Доказательство теоремы 1

Как уже отмечалось выше, достаточность в теореме 1 доказана Д. Робинсоном. Докажем необходимость. Пусть $G$ — разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел. Покажем, что она является редуцированной FATR-группой. Так как любая финитно аппроксимируемая группа, очевидно, редуцирована, то нам остается доказать, что группа $G$ является FATR-группой. Мы будем использовать следующий хорошо известный критерий (см. [4], стр. 90).

Разрешимая группа $X$ конечного ранга является FATR-группой тогда и только тогда, когда ее периодический радикал $\tau(X)$ является черниковской группой (т. е. конечной группой или конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп). Напомним, что периодическим радикалом группы называется ее наибольшая нормальная периодическая подгруппа. Сформулированный выше критерий для свойства FATR доказан в ([4], стр. 90) даже в более общей ситуации — когда группа $X$ имеет конечный ранг Гирша, т. е. обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является циклической или периодической группой.

Теперь доказательство теоремы 1 сводится к проверке конечности группы $\tau(G)$, то есть к доказательству следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть $T$ — периодическая разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемоой для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел. Тогда группа $T$ конечна.*

Доказательство. Так как $T$ — периодическая $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая группа, то она является $\pi$-группой.

Пусть $1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_n = T$ — нормальный ряд группы $T$ с абелевыми факторами. Группа $A = T_1$ является абелевой $\pi$-группой и раскладывается в прямое произведение примарных компонент, причем их число конечно, так как конечно множество $\pi$. Примарные компоненты группы $A$ являются финитно аппроксимируемыми абелевыми $p$-группами конечного ранга. Покажем, что все они конечны.

Пусть $P$ — $p$-компонента группы $A$. Для каждого целого положительного числа $k$ через $P_k$ будем обозначать множество всех элементов $a$ группы $P$ таких, что $a^{p^k} = 1$. Это множество конечно за счет конечности ранга группы $P$. Поэтому группа $P$ не более чем счетна. Так как $P$ финитно аппроксимируема, то в ней нет элементов бесконечной $p$–высоты отличных от единицы, то есть таких неединичных элементов $a$, из которых в группе $A$ извлекается корень степени $p^k$ для любого целого положительного $k$. Из последних двух обстоятельств по второй теореме Прюфера следует, что группа $P$ раскладывается в прямое произведение циклических $p$-групп. Отсюда и из конечности ранга группы $P$ следует, что группа $P$ конечна.

Таким образом, все примарные компоненты группы $A$ являются конечными группами. А поскольку число этих примарных компонент также конечно, то и группа $A$ конечна.

Так как группа $T$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, и $A$ — ее конечная нормальная подгруппа, то фактор-группа $T/A$ также $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Таким образом, $T/A$ — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая периодическая разрешимая группа конечного ранга, причем она обладает нормальным рядом с абелевыми факторами длины меньшей $n$. Поэтому в силу индуктивных соображений группа $T/A$ конечна. Отсюда и из конечности группы $A$ следует конечность группы $T$.

## 3. Доказательство теоремы 2

Пусть $G$ — разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел. Покажем, что она почти $\pi$-примарно аппроксимируема.

По теореме 1 группа $G$ является FATR-группой, а по лемме 1 ее периодический радикал $\tau(G)$ конечен.

Хорошо известная теорема Грюнберга — Мальцева (см., напр., [4], п. 5.2.2) утверждает, что в любой разрешимой FATR-группе подгруппа Фиттинга нильпотентна. Напомним, что подгруппой Фиттинга данной группы называется произведение всех ее нормальных нильпотентных подгрупп.

Д. Робинсон доказал, что если периодический радикал разрешимой группы конечного ранга конечен, то фактор-группа этой группы по ее подгруппе Фиттинга является полициклической и почти абелевой. Этот результат имеет место даже в более обещей ситуации — для разрешимых групп конечного ранга Гираша (см., напр., [4], п. 5.2.3).

Так как рассматриваемая нами группа $G$ является FATR-группой, и ее периодический радикал $\tau(G)$ конечен, то в силу сформулированных выше теорем Грюнберга — Мальцева и Робинсона мы можем утверждать, что подгруппа Фиттинга $Fit\,G$ группы $G$ нильпотентна, а фактор-группа $G/Fit\,G$ является полициклической. При этом группа $Fit\,G$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы $G$.

Таким образом, группа $G$ является расширением нильпотентной $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы с помощью полициклической группы. Поэтому доказательство теоремы 2 сводится к проверке следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть $P$ — разрешимая группа конечного ранга, содержащая нормальную нильпотентную подгруппу $N$ такую, что фактор-группа $P/N$ является полициклической. И пусть группа $N$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой* *для некоторого конечного множества $\pi$ простых чисел. Тогда группа $P$ почти $\pi$-примарно аппроксимируема.*

Доказательство. Докажем сначала данное предложение для частного случая, когда множество $\pi$ состоит из одного простого числа $p$. Покажем, что в этом случае группа $P$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Будем использовать следующий известный результат, доказанный в [9].

Расщепляемое расширение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы конечного ранга с помощью почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы само является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Напомним, что группа $A$ называется расщепляемым расширением группы $B$ с помощью группы $C$, если $B$ — нормальная подгрупа группы $A$, $C$ — подгруппа группы $A$, $A = BC$ и $B \cap C = 1$.

Так как фактор-группа $P/N$ является полициклической, то существует субнормальный ряд

$$1 \leqslant N = P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_n = P,$$

в котором все факторы, начиная со второго, являются циклическими группами. Индукцией по $n$ покажем, что группа $P$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Если $n = 1$, то $P = N$ — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Предположим теперь, что группа $P_{n-1}$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и покажем, что группа $P$ также почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Это очевидно, если фактор-группа $P/P_{n-1}$ конечна. Поэтому можно считать, что $P/P_{n-1}$ — бесконечная циклическая группа, т. е. что $P$ — расширение группы $P_{n-1}$ с помощью бесконечной циклической группы. Хорошо известно и легко проверяется, что любое такое расширение расщепляемо. Таким образом, группа $P$ является расщепляемым расширением почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы $P_{n-1}$ конечного ранга с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому в силу отмеченного выше результата группа $P$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\pi$ — произвольное конечное множество простых чисел. Так как группа $N$ нильпотентна и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она аппроксимируема конечными нильпотентными $\pi$-группами. А так как конечные нильпотентные группы раскладываются в прямые произведения примарных компонент, то группа $N$ $\pi$-примарно аппроксимируема. Поэтому если через $\sigma_p(N)$ обозначить пересечение всех нормальных подгрупп конечного $p$-индекса группы $N$, то

$$\bigcap_{p\in\pi} \sigma_p(N) = 1.$$

Отсюда и из того, что подгруппы $\sigma_p(N)$, очевидно, нормальны в $P$ следует, что группа $P$ вложима в прямое произведение

$$W = \prod_{p\in\pi} P/\sigma_p(N).$$

Так как $N/\sigma_p(N)$ — нильпотентная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая нормальная подгруппа группы $P/\sigma_p(N)$ и фактор-группа

$$(P/\sigma_p(N))/(N/\sigma_p(N)) \cong P/N$$

является полициклической, то в силу рассмотренного выше частного случая группы $P/\sigma_p(N)$ почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. Поэтому прямое призведение $W$ этих групп по всем $p \in \pi$ почти $\pi$-примарно аппроксимируемо. (здесь существенна конечность множества $\pi$). Отсюда и из того, что группа $P$ вложима в группу $W$, следует, что и группа $P$ почти $\pi$-примарно аппроксимируема.

## 4. Доказательство теоремы 3

Пусть $G$ — разрешимая группа конечного ранга. И пусть $\pi$ — конечное множество простых чисел.

Для доказательства достаточности в теореме 3 предположим, что $G$ — редуцированная FATR-группа, не содержащая $\pi$-полных элементов бесконечного порядка. Покажем, что она почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Так как группа $G$ является FATR-группой, то в силу уже упомянутых выше теорем подгруппа Фиттинга $F = Fit\,G$ группы $G$ нильпотентна (см., напр., [4], п. 5.2.2), а периодический радикал $\tau(G)$ является черниковской группой (см. [4], стр. 90). Посколку группа $G$ редуцирована, она не содержит квазициклических подгрупп, и поэтому любая ее черниковская подгруппа конечна. Таким образом, $\tau(G)$ — конечная группа. Отсюда по упомянутой выше теореме Робинсона следует, что фактор-группа $G/F$ является полициклической (см., напр., [4], п. 5.2.3). Из конечности группы $\tau(G)$ очевидно следует конечность группы $\tau(F)$ Так как $G$ — редуцированная разрешимая группа конечного ранга, то по упомянутой выше теореме Робинсона она финитно аппроксимируема (см., напр., [4], п. 5.3.2).

Так как группа $G$ финитно аппроксимируема, а ее подгруппа $\tau(F)$ конечна, то в группе $G$ существует нормальная подгруппа $L$ конечного индекса такая, что $\tau(F) \cap L = 1$. Пусть $N = L \cap F$. Так как $G/F$ — полициклическая группа и $G/L$ — конечная разрешимая группа, то $G/N$ — полициклическая группа. Хорошо известно, что периодический радикал нильпотентной группы совпадает с множеством всех ее элементов конечного порядка. Отсюда и из того, что $\tau(F) \cap N = 1$, следует, что подгруппа $N$ группы $F$ является группой без кручения. Отсюда и из того, что группа $G$ не содержит $\pi$-полных элементов бесконечного порядка следует, что группа $N$ не содержит $\pi$-полных элементов, отличных от 1.

Покажем, что группа $N$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Для этого рассмотрим неединичный элемент $h$ группы $N$. Тогда элемент $h$ не является $\pi$-полным и поэтому мы можем зафиксировать $\pi$-число $s$ такое, что уравнение $x^s = h$ не разрешимо в группе $N$. Рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{s^c}$, где $c$ — ступень нильпотентности группы $N$. По лемме 2 из [10] из любого элемента $v$ подгруппы $V$ в группе $N$ извлекается корень степени $s$. Отсюда и из того, что уравнение $x^s = h$ не разрешимо в группе $N$, следует, что $h \notin V$. Очевидно, что любая периодическая абелева группа конечного ранга с ограниченными порядками элементов конечна. Это утверждение легко распространить с абелевых групп на разрешимые группы. Поэтому $N/V$ является конечной группой, и даже конечной $\pi$-группой. Таким образом, $V$ — нормальная подгруппа конечного $\pi$-индекса группы $N$, не содержащая элемент $h$. Тем самым доказана $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы $N$.

Таким образом, группа $G$ является расширением нильпотентной $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы $N$ с помощью полициклической группы. Поэтому в силу леммы 2 группа $G$ почти $\pi$-примарно аппроксимируема. Следовательно группа $G$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Таким образом, достаточность в теореме 3 доказана.

Для доказательства необходимости предположим, что группа $G$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Покажем, что $G$ — редуцированная FATR-группа, не содержащая $\pi$-полных элементов бесконечного порядка. Редуцированность группы $G$ очевидна, так как этим свойством обладает любая финитно аппроксимируемая группа. Так как группа $G$ содержит $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу $P$ конечного индекса, и так как в силу теоремы 1 группа $P$ является FATR-группой, то и группа $G$ является FATR-группой. Поэтому для завершения доказательства остается только проверить, что группа $G$ не содержит $\pi$-полных элементов бесконечного порядка. Это вытекает из следующего простого замечания.

Лемма 3. *Пусть $H$ — произвольная группа. И пусть $\pi$ — произвольное множество простых чисел. Если группа $H$ почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она не содержит $\pi$-полных элементов бесконечного порядка.*

Доказательство. Пусть $h$ — $\pi$-полный элемент почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы $H$. Обозначим через $K$ какую-нибудь $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы $H$, а через $m$ — индекс подгруппы $K$ в группе $H$. Без потери общности можно считать, что подгруппа $K$ нормальна в группе $H$. Тогда для каждого элемента $a$ группы $H$ элемент $a^m$ принадлежит $K$. Поэтому элемент $h^m$ принадлежит подгруппе $K$ и является $\pi$-полным элементом в подгруппе $K$.

Пусть $\varphi$ — произвольный гомоморфизм группы $K$ на конечную $\pi$-группу. Так как в конечной $\pi$-группе, очевидно, нет $\pi$-полных элементов отличных от 1, а элемент $h^m\varphi$ наследует $\pi$-полноту от элемента $h^m$, то $h^m\varphi = 1$. Отсюда и из $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы $K$ следует, что $h^m = 1$.

Таким образом, в почти в $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы $H$ любой $\pi$-полный элемент $h$ имеет конечный порядок.

## 5. Заключение

Перечислим основные результаты настоящей работы.

1. Получен критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга для подходящего конечного множества $\pi$ простых чисел.

2. Получен критерий почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга для фиксированного конечного множества $\pi$ простых чисел.

3. Найдена связь между $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемостью и почти $\pi$-примарной аппроксимируемостью разрешимой группы конечного ранга.

Некоторые частные случаи перечисленных выше результатов ранее были получены автором в [11]. Остается неисследованным свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга для бесконечного множества $\pi$ простых чисел.

Исследования групп конечного ранга, начатые А. И. Мальцевым в работе [12], были продолжены в различных направлениях. Так в работе [13] исследуется финитная аппроксимируемость групп конечного ранга, а в роботе автора [14] доказано, что если группа конечного ранга $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$, то она нильпотентна. Это обобщает аналогичный результат Сексенбаева для полициклических групп [15].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Hirsh K. A. On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81–85.

2. Learner A. Residual properties of polycyclic groups // J. Math. 1984. Vol. 8. P. 536–542.

3. Шмелькин А. Л. Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234–235.

4. Lennox J., Robinson D. The theory of infinite soluble groups. Oxford.: Clarendon press, 2004. 344 P.

5. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.

6. Meskin S. Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.

7. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемсти конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра // Моделирование и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 116–123.

8. Moldavanskii D. On some residuall properties of Baumslag Solitar groups // ArXiv: math.GR/1310.3585 Vol. 1. 2013.

9. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемсти конечными p–группами // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 3. С. 11–21.

10. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, вып. 5. С. 49–60.

11. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых разрешимых групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2012. Вып. 2. С. 80–85.

12. Мальцев А. И. О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22(2). С. 351–352.

13. Lubotzki. A., Mann A. Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 1989. Vol. 106(3). P. 385–388.

14. Азаров Д. Н. Об аппроксимируемости конечными p-группами групп конечного ранга // Вестник Иван. гос. ун-та. 2001. Вып. 3. С. 102–104.

15. Сексенбаев К. К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, вып. 3. С. 79–83.

Ивановский государственный университет.
Поступило 31.01.2014