

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-245-248

Уточнение оценки среднего угла в проблеме Фейеш Тота¹

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Лепетков Даниил Русланович — Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: Shipsdays@gmail.com

Аннотация

Рассматривается проблема Фейеш Тота о максимуме E_* среднего значения суммы углов между прямыми в $\mathbb{R}^3$ с общим центром. Л. Фейеш Тот предположил, что $E_* = \frac{\pi}{3} = 1.047\dots$. Эта гипотеза до сих пор не доказана. D. Bilyk и R.W. Matzke доказали, что $E_* \leq 1.110\dots$. Мы уточняем эту оценку при помощи экстремальной задачи типа Дельсарта: $E_* \leq A_* < 1.08326$. При помощи двойственной проблемы B_* мы показываем, что решение задачи A_* не позволяет доказать гипотезу Фейеш Тота, так как $1.05210 < A_*$.

Ключевые слова: гипотеза Фейеш Тота, единичная сфера, многочлен Лежандра, оценка линейного программирования, задача Дельсарта.

Библиография: 3 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков. Уточнение оценки среднего угла в проблеме Фейеш Тота // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 245–248.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-245-248

Refinement of the mean angle estimation in the Feyesh Toth problem²

D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Lepetkov Daniil Ruslamovich — Tula State University (Tula).

e-mail: Shipsdays@gmail.com

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

Abstract

The Fejes Tóth problem about the maximum E_* of the mean value of the sum of angles between lines in $\mathbb{R}^3$ with a common center is considered. L. Fejes Tóth suggested that $E_* = \frac{\pi}{3} = 1.047\dots$. This conjecture has not yet been proven. D. Bilyk and R.W. Matzke proved that $E_* \leq 1.110\dots$. We refine this estimate using an extremal problem of the Delsarte type: $E_* \leq A_* < 1.08326$. Using the dual problem B_* we show that the solution of the A_* problem does not allow us to prove the Fejes Tóth conjecture, since $1.05210 < A_*$.

Keywords: Fejes Tóth conjecture, unit sphere, Legendre polynomial, linear programming bound, Delsarte problem.

Bibliography: 3 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov, 2022, "Refinement of the mean angle estimation in the Fejes Tóth problem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 245–248.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан набор прямых с общим центром. В классической проблеме Фейеш Тота спрашивается, сколь большой может быть сумма углов между прямыми (см. [3, 2]). Если число прямых может быть произвольным, то проблема эквивалентна нахождению величины

$$E_* = \sup_{X \subset S^2} E(X), \quad E(X) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \arccos |x_i x_j|,$$

где $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ — всевозможные наборы точек на единичной сфере, xy — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Л. Фейеш Тот предположил, что $E_* = \frac{\pi}{3} = 1.047\dots$ и экстремум образуют множества, состоящие из повторов тройки единичных ортов. Эта гипотеза до сих пор не доказана. В работе [3] доказана оценка $E_* \leq \frac{3\pi}{8} = 1.178\dots$. Эта оценка была уточнена в работе [2]: $E_* \leq 1.110\dots$

Докажем, что

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.

$$E_* < 1.08326.$$

Для доказательства воспользуемся аналитическими методами из теории кодирования, связанными с оценкой линейного программирования Дельсарта (см., например, [1]). Пусть $P_n(t)$ — ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ многочлены Лежандра, $P_n(1) = 1$,

$$F(t) = \arccos |t| = \sum_{k=0}^{\infty} F_k P_{2k}(t).$$

Заметим, что четные на $[-1, 1]$ функции раскладываются по четным многочленам $P_{2k}(t)$, причем $\int_0^1 P_{2k}^2(t) dt = \frac{1}{4k+1}$. Отсюда $F_k = (4k+1) \int_0^1 \arccos t P_{2k}(t) dt$.

Предложение 1 вытекает из следующих утверждений.

ЛЕММА 1 (оценка линейного программирования). Пусть K — класс непрерывных на $[0, 1]$ четных функций $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_{2k}(t)$, для которых $f_0 > 0$, $f_k \leq 0$ при $k \geq 1$, $F(t) \leq f(t)$ при $t \in [0, 1]$. Тогда

$$E_* \leq A_* = \inf_{f \in K} f_0.$$

ЛЕММА 2 (двойственная оценка). Пусть L — класс положительных на $[0, 1]$ борелевских мер $\mu(t)$, для которых $\mu_k = \int_0^1 P_{2k}(t) d\mu(t)$, $\mu_0 = 1$, $\mu_k \geq 0$ при $k \geq 1$. Тогда

$$A_* \geq B_* = \sup_{\mu \in L} \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mu_k.$$

ЛЕММА 3. Имеем

$$1.05210 < B_* \leq A_* < 1.08326.$$

Лемма 3 означает, что решение экстремальной задачи A_* не позволяет доказать гипотезу Фейеш Тота. Также отметим, что оценка из работы [2] получена на многочлене второй степени из проблемы A_* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_N\} \in \mathbb{S}^2$, $f \in K$. Используя свойства функции f и положительную определенность многочленов Лежандра, получаем

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \underbrace{F(x_i x_j)}_{\leq f(x_i x_j)} \leq \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N f(x_i x_j) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_{2k}(x_i x_j) \\ &= f_0 + \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{f_k}_{\leq 0} \underbrace{\sum_{i,j=1}^N P_{2k}(x_i x_j)}_{\geq 0} \leq f_0. \end{aligned}$$

Теперь можно перейти к нижней грани по f . Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $f \in K$, $\mu \in L$. Тогда

$$0 \leq \int_0^1 \underbrace{(f(t) - F(t))}_{\geq 0} d\mu(t) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (f_k - F_k) P_{2k}(t) d\mu(t) = f_0 \underbrace{\mu_0}_{=1} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{f_k \mu_k}_{\leq 0} - \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mu_k,$$

откуда $f_0 \geq \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mu_k$. Теперь можно перейти к нижней грани по f и верхней грани по μ . Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Приведем примеры многочленов $f \in K$ и $g(t) = \mu'(t)$, $\mu \in L$, которые дадут нужные оценки. Они получены численными экспериментами с помощью дискретизации и линейного программирования, однако их свойства можно проверить непосредственно. Такой подход хорошо известен в теории экстремальных задач Дельсарта. Все вычисления проводились с 10-ю знаками после точки.

Многочлен

$$f(t) = \sum_{k \in \{0,1,3,5,9,11,13\}} f_k P_{2k}(t),$$

где коэффициенты f_k последовательно равны

$$1.083257455, -0.9128828392, -0.02249927905, -0.06981521396, -0.02596318737, \\ -0.006259729365, -0.01301527343.$$

Для него $\min_{t \in [0,1]} (f(t) - F(t)) \geq 0.001$. Отсюда округляя, получаем $A_* \leq 1.08326$.

Многочлен

$$g(t) = \sum_{k \in \{0,2,4,6,8,10,12,14\}} (4k+1) \mu_k P_{2k}(t),$$

где коэффициенты μ_k последовательно равны

$$1, 0.4583469123, 0.2734701526, 0.1838476292, 0.1139628481, 0.06729056530, \\ 0.03222866343, 0.01182221436.$$

Для него $\min_{t \in [0,1]} g(t) \geq 0.0007$, $\sum_{k \in \{0,2,4,6,8,10,12,14\}} F_k \mu_k = 1.052101964$, где коэффициенты F_k последовательно равны

1, 0.07500000000, 0.03752480159, 0.02353061435, 0.01654979769, 0.01247489073,
0.009849540645, 0.008039378483.

Отсюда округляя, получаем $B_* \geq 1.05210$. Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н.Н., Юдин В.А. Экстремальные расположения точек на сфере // Матем. просв. 1997. Вып. 1. С. 115–125.
2. Bilyk D., Matzke R.W. On the Fejes Tóth problem about the sum of angles between lines // Proc. Amer. Math. Soc. 2019. V. 147, no. 1. P. 51–59.
3. Fodor F., Vigh V., Zarnócz T. On the angle sum of lines // Arch. Math. (Basel). 2016. V. 106, no. 1. P. 91–100.

REFERENCES

1. Andreev, N.N. & Yudin, V.A. 1997. “An extremal location of points on a sphere”, *Mat. Pros.*, vol. 3, no. 1, pp. 115–125. (In Russ.)
2. Bilyk, D. & Matzke, R.W. 2019. “On the Fejes Tóth problem about the sum of angles between lines”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 147, no. 1, pp. 51–59.
3. Fodor, F., Vigh, V. & Zarnócz, T. 2016. “On the angle sum of lines”, *Arch. Math. (Basel)*, vol. 106, no. 1, pp. 91–100.

Получено 23.08.2022

Принято в печать 14.09.2022