

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 539.3: 517.958

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-224-237

Нелинейная математическая модель связи тензоров второго ранга для композитных материалов¹

А. А. Трещев, А. Е. Гвоздев, Н. С. Ющенко, А. А. Калинин

Трещев Александр Анатольевич — член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: taa58@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Ющенко Никита Сергеевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: yushenko_1972@bk.ru

Калинин Антон Алексеевич — инженер, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: antony_ak@mail.ru***Аннотация**

Анализ процессов деформирования как давно известных, так и новых полимерных, композитных и синтетических материалов, используемых в строительных конструкциях, деталях аппаратов, машин, а также энергетических установок позволил выявить их специфические свойства. Установлено, что многие подобные материалы имеют ортотропию структуры с одновременным проявлением деформационной анизотропией или неоднородностью. Наведенная деформационная анизотропия или механическая неоднородность вызвана зависимостью жесткостных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния. В предыдущих работах авторов показано, что традиционные модели деформирования подобных материалов и их математические представления, приводят к грубым ошибкам, явно проявляющимся при расчете различных конструкций. При этом теории деформирования композитных материалов с «усложненными свойствами», специально разработанные для них другими авторами в последние 40 лет, весьма противоречивы и обладают непреодолимыми недостатками. Авторами представленной работы ранее были разработаны нелинейные энергетические связи тензоров деформаций и напряжений, для определения констант которых рекомендован широкий набор экспериментов. Однако среди экспериментальных испытаний необходимо привлекать опыты по сложным напряженным состояниям, многие из которых в настоящее время практически нереализуемы. Поэтому в 2021 году были постулированы квазилинейный потенциал деформаций, представленный в главных осях ортотропии материалов. Для этого варианта оказалось достаточно вычисления констант по данным простейших опытов. Несмотря на несомненные преимущества данного потенциала, все же реальные нелинейные диаграммы аппроксимировались прямыми лучами по методу наименьших квадратов, а это при качественной адекватности приводило к количественным погрешностям. В связи с этим в представленной статье сделана попытка ухода от общих правил формулировки полной нелинейной потенциальной связи тензоров деформаций и напряжений. В этом направлении постулирована нелинейная математическая модель связи двух тензоров второго ранга, объединяющая

¹Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Тульской области для выполнения работ в сфере науки и техники, договор №ДС/284.

форму обобщенного закона Гука для ортотропного материала, теорию малых упругопластических деформаций и методику тензорного пространства нормированных напряжений. Данный подход позволил определять нелинейные материальные функции, ограничившись набором традиционных простейших экспериментов. Сделано замечание о единственности решений краевых задач, которая сводится к проверке устойчивости уравнений состояния в малом по Друкеру. В рамках предложенной математической модели обработаны широко известные экспериментальные диаграммы для карбоно-графитового композита, для которого получены нелинейные материальные функции.

Ключевые слова: нелинейные материальные функции, деформационная анизотропия, структурная ортотропия, уравнения состояния, тензоры второго ранга, главные оси ортотропии, метод наименьших квадратов.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:

А. А. Трещев, А. Е. Гвоздев, Н. С. Ющенко, А. А. Калинин. Нелинейная математическая модель связи тензоров второго ранга для композитных материалов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 224–237.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 539.3: 517.958

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-224-237

Nonlinear mathematical model of relation of second-rank tensors for composite materials

A. A. Treshchev, A. E. Gvozdev, N. S. Yushenko, A. A. Kalinin

Treshchev Alexander Anatolyevich — corresponding member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: taa58@yandex.ru

Gvozdev Alexander Yevgenyevich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy (Tula).

e-mail: gwozdew.alexqndr2013@yandex.ru

Yushchenko Nikita Sergeevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: yushenko_1972@bk.ru

Kalinin Anton Alekseevich — engineer, Tula State University (Tula).

e-mail: antony_ak@mail.ru

Abstract

Analysis of the deformation processes of both long-known and new polymer, composite and synthetic materials used in building structures, parts of apparatuses, machines, as well as power plants revealed their specific properties. It is established that many similar materials have orthotropy of the structure with simultaneous manifestation of deformation anisotropy or heterogeneity. Induced deformation anisotropy or mechanical inhomogeneity is caused by the dependence of stiffness and strength characteristics on the type of stress state. In previous works of the authors, it has been shown that traditional models of deformation of such materials and their mathematical representations lead to gross errors that are clearly manifested in the calculation of various structures. At the same time, the theories of deformation of composite materials with "complicated properties specially developed for them by other authors in the

last 40 years, are very contradictory and have insurmountable disadvantages. The authors of the presented work have previously developed nonlinear energy relations of strain and stress tensors, for determining the constants of which a wide range of experiments is recommended. However, among the experimental tests, it is necessary to involve experiments on complex stress states, many of which are currently practically unrealizable. Therefore, in 2021, a quasi-linear deformation potential was postulated, represented in the main axes of orthotropy of materials. For this option, it turned out to be sufficient to calculate constants according to the simplest experiments. Despite the undoubted advantages of this potential, nevertheless, real nonlinear diagrams were approximated by direct rays using the least squares method, and this, with qualitative adequacy, led to quantitative errors. In this regard, the presented article attempts to avoid the general rules for the formulation of a complete nonlinear potential relationship of strain and stress tensors. In this direction, a nonlinear mathematical model of the connection of two second-rank tensors is postulated, combining the form of the generalized Hooke's law for orthotropic material, the theory of small elastic-plastic deformations and the tensor space technique of normalized stresses. This approach allowed us to determine nonlinear material functions, limiting ourselves to a set of traditional simplest experiments. A remark is made about the uniqueness of solutions to boundary value problems, which boils down to checking the stability of the equations of state in the small Drucker. Within the framework of the proposed mathematical model, widely known experimental diagrams for a carbon-graphite composite are processed, for which nonlinear material functions are obtained.

Keywords: nonlinear material functions, deformation anisotropy, structural orthotropy, equations of state, second-rank tensors, main axes of orthotropy, least squares method.

Bibliography: 38 titles.

For citation:

A. A. Treshchev, A. E. Gvozdev, N. S. Yushchenro, A. A. Kalinin, 2022, "Nonlinear mathematical model of relation of second-rank tensors for composite materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 224–237.

1. Введение

Уникальные здания, сооружения и детали индивидуального изготовления в настоящее время широко распространены в современной технике и строительстве, технологии, которые непрерывно совершенствуются. Данный факт создает предпосылки к созданию наиболее совершенных материалов, обладающих значительно большей жесткостью и прочностью при одновременном снижении общей массы конструкций, а также - новыми уникальными свойствами, отличающимися от традиционных [1 – 13]. Наиболее используемыми среди подобных материалов являются волокнистые, хаотически наполненные наноструктурными «трубками», фибрами композитные материалы, плёночные объекты, пластики (углепластики, стеклопластики, боропластики и др.).

Особенностями как новых, так и большинства давно известных конструкционных материалов типа бетонов и железобетона [14 – 17], ковких и серых чугунов [18 – 20], фторопласта [21, 22], полиметилметакрилата [23 – 25], карбонов [3 – 5, 7, 11, 12, 14, 26, 27], является зависимость их механических характеристик от вида напряженного состояния. Причем некоторая часть из них обладает начальной структурной изотропией [14 – 24, 26], а другая – анизотропией [1 – 25, 27]. Отметим, что для изотропных материалов за последние 50 лет был предложен ряд моделей уравнений состояния разной степени точности в квазилинейной и нелинейной формах, но как показано в работе [14], все они имеют отдельные недостатки и даже ошибочны. Наиболее универсальными и свободными от модельных ограничений, как показано в исследованиях [14, 28 – 30], являются энергетически непротиворечивые уравнения связи деформаций и напряжений, сформулированные в тензорных пространствах нормированных напряжений.

Наряду с этим, для структурно анизотропных материалов известны отдельные и не систематизированные исследования в плане построения определяющих соотношений [1 – 13, 27, 31, 32].

2. Нелинейные уравнения связи тензоров второго ранга

В работах [33, 34] предприняты попытки использования нормированного пространства для построения нелинейных моделей деформирования ортотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, разного уровня нелинейности, по всем правилам постулирования формы удельной энергии деформаций и дополнительной работы напряжений [35, 36]. Как показано [14, 33, 34], в уравнениях высокой точности (нелинейности), даже в отдельных квазилинейных формах потенциалов, для определения всех констант, требуется комплекс испытаний, включающий сложные напряженно-деформированные состояния. При этом требуется привлечение широкого набора испытаний на плоские напряженные состояния (двухосные), пространственные (трехосные) эксперименты в главных плоскостях ортотропии, включающие как растяжения, так и сжатия. Однако это не самое сложное. Гораздо сложнее выполнить испытания на совместные сдвиг в двух - трех главных материальных плоскостях ортотропии. Проведение подобных испытаний даже при современном уровне развития экспериментальной базы не реализуемо. Во всяком случае, в научной литературе сведения о проведении подобных опытов отсутствуют.

В работе [37] в рамках тензорного пространства нормированных напряжений были сформулированы потенциалы деформаций для ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией квазилинейного уровня. Там же разработана методика определения констант потенциалов через экспериментально определенные технические характеристики и установлены ограничения, вытекающие из доказательства теоремы единственности. Очевидно, что дальнейшего совершенствования расчетных моделей конструкций из композитных материалов невозможно добиться без перехода от квазилинейных уравнений состояния к нелинейным, наиболее точно, связывающих тензоры деформаций и напряжений для структур с двойной анизотропией и минимально отличающихся от экспериментальных связей. Однако одного желания и постановки проблемы весьма недостаточно, ведь сложности экспериментального определения технических констант никуда не исчезают. Поэтому первоначально предлагается постулировать нелинейные уравнения связи между двумя тензорами второго ранга для композитных ортотропных материалов с несовершенной упругостью в гибридной форме, близкой к обобщенному закону Гука с модификацией по типу теории малых упругопластических деформаций, но с учетом зависимости жесткостей от вида напряженного состояния.

Предлагаемая модель должна быть универсальной для любого вида напряженного состояния. Кроме того необходимо установить взаимно-однозначные зависимости между деформациями и напряжениями с обоснованием системы простейших экспериментов, достаточных для определения нелинейных материальных функций, которые вводятся в уравнения состояния и учитывают механические свойства структурно ортотропного материала, обладающего деформационной анизотропией.

Нелинейные уравнения связи деформаций и напряжений для ортотропного материала рекомендуется сформулировать в виде:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = & [A_{1111}(\sigma_i) + B_{1111}(\sigma_i)\alpha_{11}]\sigma_{11} + [A_{1122}(\sigma_i) + B_{1122}(\sigma_i)(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \\ & + [A_{1133}(\sigma_i) + B_{1133}(\sigma_i)(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\ \epsilon_{22} = & [A_{1122}(\sigma_i) + B_{1122}(\sigma_i)(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + [A_{2222}(\sigma_i) + B_{2222}(\sigma_i)\alpha_{22}]\sigma_{22} + \\ & + [A_{2233}(\sigma_i) + B_{2233}(\sigma_i)(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{33} = & [A_{1133}(\sigma_i) + B_{1133}(\sigma_i)(\alpha_{11} + \alpha_{33})] \sigma_{11} + \\
& + [A_{2233}(\sigma_i) + B_{2233}(\sigma_i)(\alpha_{22} + \alpha_{33})] \sigma_{22} + \\
& + [A_{3333}(\sigma_i) + B_{3333}(\sigma_i)\alpha_{33}] \sigma_{33}; \\
\gamma_{12} = & C_{1212}(\sigma_i) \tau_{12}; \gamma_{23} = C_{2323}(\sigma_i) \tau_{23}; \gamma_{13} = C_{1313}(\sigma_i) \tau_{13},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $A_{ijkl}(\sigma_i)$, $B_{ijkl}(\sigma_i)$ и $C_{ijkl}(\sigma_i)$ – материальные нелинейные функции от интенсивности напряжений, определяемые характеристиками деформирования ортотропного материала; $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$ – компоненты нормированных напряжений ($i, j = 1, 2, 3$);

$\sigma_i = \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)]/2}$ – интенсивность напряжений; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}$ – модуль вектора полного напряжения (норма тензорного пространства напряжений).

3. Определение материальных функций модели и их ограничения

Нелинейные материальные функции уравнений состояния (1) представим степенными полиномами, аппроксимирующими экспериментально полученные диаграммы деформирования конкретного материала, полученные при испытании на одноосные растяжение и сжатие вдоль главных осей ортотропии и на сдвиги во всех трех главных материальных плоскостях. Математическая обработка эмпирических результатов осуществлялась в программном модуле Microcal Origin Pro 8.0 (Microcal Software Inc.). Согласно методикам вычисления констант определяющих соотношений, рассмотренных в работах [33, 34], для нелинейно ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией, материальные функции должны определяться следующей совокупностью характеристик, устанавливаемых из экспериментов:

$$\begin{aligned}
A_{kkkk}(\sigma_i) = & 0,5 [1/E_k^+(\sigma_i) + 1/E_k^-(\sigma_i)]; \\
B_{kkkk}(\sigma_i) = & 0,5 [1/E_k^+(\sigma_i) - 1/E_k^-(\sigma_i)]; \\
A_{kkmm}(\sigma_i) = & -0,5 [\nu_{km}^+(\sigma_i)/E_m^+(\sigma_i) + \nu_{km}^-(\sigma_i)/E_m^-(\sigma_i)]; \\
B_{kkmm}(\sigma_i) = & -0,5 [\nu_{km}^+(\sigma_i)/E_m^+(\sigma_i) - \nu_{km}^-(\sigma_i)/E_m^-(\sigma_i)]; \\
C_{kmkm}(\sigma_i) = & 1/G_{km}(\sigma_i); k, m = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $E_k^\pm(\sigma_i) = a_k^\pm + m_k^\pm \sigma_i + n_k^\pm \sigma_i^2$; $\nu_{km}^\pm(\sigma_i) = \lambda_{km}^\pm + \beta_{km}^\pm \sigma_i + \mu_{km}^\pm \sigma_i^2$; $G_{km}(\sigma_i) = g_{km} + p_{km} \sigma_i + q_{km} \sigma_i^2$; $E_k^\pm(\sigma_i)$, $\nu_{km}^\pm(\sigma_i)$, $G_{km}(\sigma_i)$ – нелинейные функции от интенсивности напряжений, представляющие собой аналоги модулей упругости, коэффициентов поперечной деформации и модулей сдвига ортотропного материала в соответствующих направлениях главных материальных осей и плоскостей (знак «+» соответствует характеристикам, полученным из опытов на осевое растяжение, а знак «-» – на осевое сжатие); $o_k^\pm$, $m_k^\pm$, $n_k^\pm$, $\lambda_{km}^\pm$, $\beta_{km}^\pm$, $\mu_{km}^\pm$, g_{km} , p_{km} , q_{km} – коэффициенты степенных полиномов, получаемые в результате аппроксимации (методом наименьших квадратов) экспериментальных данных по деформированию материалов.

При определении материальных функций необходимо придерживаться приближенных ограничений, традиционных для механики ортотропных материалов [35]:

$$\nu_{km}^+(\sigma_i)/E_m^+(\sigma_i) = \nu_{mk}^+(\sigma_i)/E_k^+(\sigma_i); \nu_{km}^-(\sigma_i)/E_m^-(\sigma_i) = \nu_{mk}^-(\sigma_i)/E_k^-(\sigma_i). \tag{3}$$

В качестве конкретного материала, обладающего анизотропией двоякого рода, рассмотрен процесс пропорционального деформирования композита «углеродное волокно-углерод

AVCOMod 3a», экспериментальные данные для которого заимствованы из работ [11, 27]. В этих работах приведены результаты экспериментального деформирования на одноосные растяжение и сжатие в направлениях вдоль главных осей ортотропии и на чистый сдвиг в трех взаимно ортогональных главных материальных плоскостях. Результаты математической обработки экспериментальных данных по деформированию композита AVCOMod 3a приведены в табл. 1, а сами экспериментальные диаграммы и их математические представления согласно модели (1) представлены на рис. 1 – 4.

Таблица 1: Константы композитного материала AVCOMod 3a [11, 27]

Вид испытания образца	Технический параметр	Константы полиномов материальных функций		
Одноосное растяжение вдоль главных осей ортотропии	$E_k^+(\sigma_i)$, Па	$a_1^+ = 1,058 \cdot 10^{10}$	$m_1^+ = 62,829$	$n_1^+ = 1,535 \cdot 10^{-6}$
		$a_2^+ = 2,864 \cdot 10^{10}$	$m_2^+ = -105,476$	$n_2^+ = 5,893 \cdot 10^{-7}$
		$a_3^+ = 2,301 \cdot 10^{10}$	$m_3^+ = 88,349$	$n_3^+ = 3,711 \cdot 10^{-6}$
	$\nu_{km}^+(\sigma_i)$	$\lambda_{12}^+ = 0,158$	$\beta_{12}^+ = -3,1 \cdot 10^{-9}$	$\mu_{12}^+ = 2,19 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{21}^+ = 0,103$	$\beta_{21}^+ = -1,79 \cdot 10^{-9}$	$\mu_{21}^+ = 9,1 \cdot 10^{-18}$
		$\lambda_{13}^+ = 0,203$	$\beta_{13}^+ = 2,15 \cdot 10^{-9}$	$\mu_{13}^+ = 6,15 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{23}^+ = 0,104$	$\beta_{23}^+ = 0,87 \cdot 10^{-10}$	$\mu_{23}^+ = 6,74 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{31}^+ = 0,146$	$\beta_{31}^+ = -0,15 \cdot 10^{-10}$	$\mu_{31}^+ = 6,97 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{32}^+ = 0,1884$	$\beta_{32}^+ = -1,153 \cdot 10^{-2}$	$\mu_{32}^+ = 1,914 \cdot 10^{-4}$
Одноосное сжатие вдоль главных осей ортотропии	$E_k^-(\sigma_i)$, Па	$a_1^- = 9,988 \cdot 10^9$	$m_1^- = -12,943$	$n_1^- = 6,71 \cdot 10^{-7}$
		$a_2^- = 2,326 \cdot 10^{10}$	$m_2^- = -436,81$	$n_2^- = -6,08 \cdot 10^{-7}$
		$a_3^- = 5,14 \cdot 10^9$	$m_3^- = -129,15$	$n_3^- = -78,3 \cdot 10^{-6}$
	$\nu_{km}^-(\sigma_i)$	$\lambda_{12}^- = 0,118$	$\beta_{12}^- = -1,457 \cdot 10^{-9}$	$\mu_{12}^- = 2,14 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{21}^- = 0,06$	$\beta_{21}^- = 1,77 \cdot 10^{-9}$	$\mu_{21}^- = 2,95 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{13}^- = 0,264$	$\beta_{13}^- = -1,118 \cdot 10^{-9}$	$\mu_{13}^- = 3,01 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{23}^- = 0,189$	$\beta_{23}^- = 2,156 \cdot 10^{-9}$	$\mu_{23}^- = 2,1 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{31}^- = 0,134$	$\beta_{31}^- = -0,46 \cdot 10^{-10}$	$\mu_{31}^- = 5,82 \cdot 10^{-17}$
		$\lambda_{32}^- = 0,07793$	$\beta_{32}^- = -0,465 \cdot 10^{-2}$	$\mu_{32}^- = 9,0167 \cdot 10^{-5}$
Сдвиг в главных плоскостях ортотропии	$G_{km}(\sigma_i)$, Па	$g_{12} = 4,07 \cdot 10^9$	$p_{12} = -1,6$	$q_{12} = -8,38 \cdot 10^{-6}$
		$g_{23} = 1,723 \cdot 10^9$	$p_{23} = 16,899$	$q_{23} = -1,1 \cdot 10^{-5}$
		$g_{31} = 2,43 \cdot 10^9$	$p_{31} = -54,455$	$q_{31} = -1,97 \cdot 10^{-5}$

В работе [37] была доказана теорема существования и единственности решений для квазилинейного потенциала деформаций, определяющего приближенные связи тензоров деформаций и напряжений для композитных ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией. Там же и в работах [14, 33, 34, 38] показано, что доказательство этой теоремы для любых определяющих соотношений сводится к проверке постулата Друкера

$$\delta e_{ij} \delta \sigma_{ij} \geq 0, \quad (4)$$

в рамках, которого определяются ограничения, накладываемые на материальные функции. Эти ограничения в данном нелинейном варианте модели (1) также как для квазилинейного потенциала [37] определены положительной определенностью квадратичной формы по критерию Сильвестра.

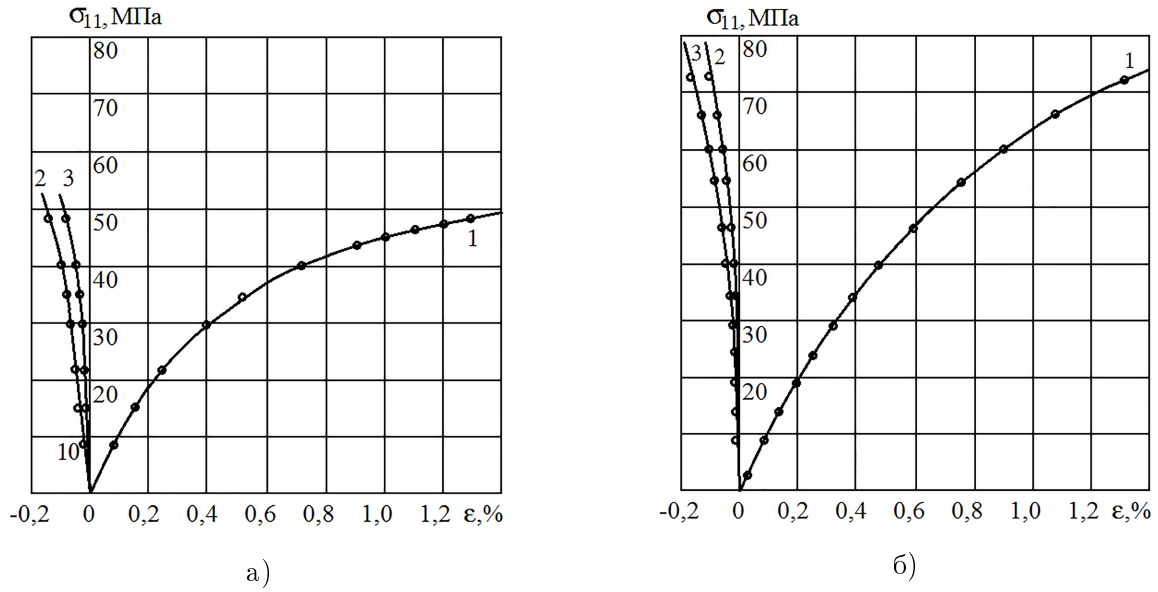


Рис. 1: Диаграммы деформирования вдоль оси x_1 : а) растяжение; б) сжатие; 1 – продольная деформация ϵ_{11} ; 2, 3 – поперечные деформации ϵ_{22} и ϵ_{33} ; $\circ$ – экспериментальные данные; ——— – нелинейные аппроксимации

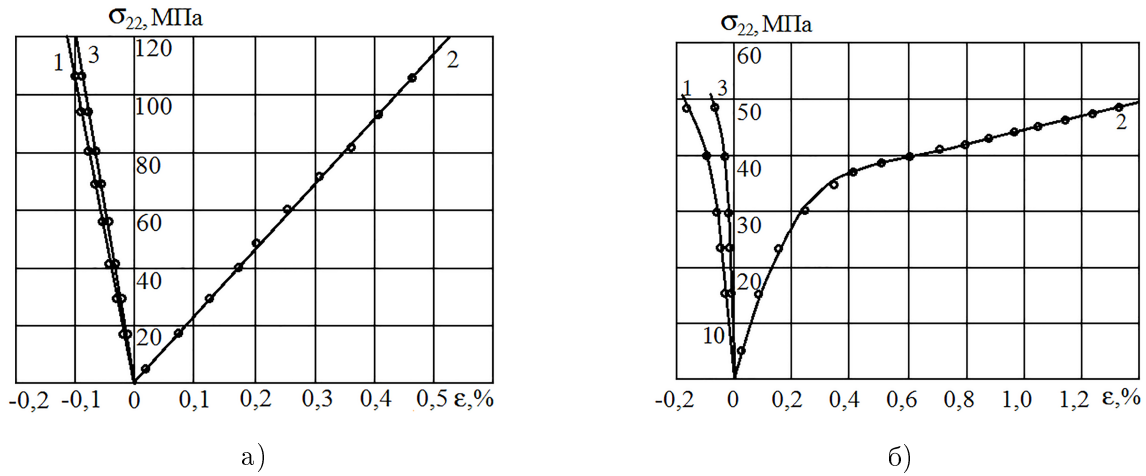


Рис. 2: Диаграммы деформирования вдоль оси x_2 : а) растяжение; б) сжатие; 1, 3 – поперечные деформации ϵ_{11} и ϵ_{33} ; 2 – продольная деформация ϵ_{22} ; $\circ$ – экспериментальные данные; ——— – нелинейные аппроксимации

Для принятых нелинейных уравнений состояния (1) компоненты полной матрицы Сильвестра принимают вид:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{11}}; D_{12} = \frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{22}}; D_{13} = \frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{33}}; D_{14} = \frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{13}}; D_{15} = \frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{23}}; D_{16} = \frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{12}}; \\
 D_{22} &= \frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{22}}; D_{23} = \frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{33}}; D_{24} = \frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{13}}; D_{25} = \frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{23}}; D_{26} = \frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{12}}; D_{33} = \frac{\partial e_{33}}{\partial \sigma_{33}}; \\
 D_{34} &= \frac{\partial e_{33}}{\partial \tau_{13}}; D_{35} = \frac{\partial e_{33}}{\partial \tau_{23}}; D_{36} = \frac{\partial e_{33}}{\partial \tau_{12}}; D_{44} = \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial \tau_{13}}; D_{45} = \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial \tau_{23}}; D_{46} = \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial \tau_{12}};
 \end{aligned}$$

$$D_{55} = \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial \tau_{23}}; D_{56} = \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial \tau_{12}}; D_{66} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \tau_{12}}; D_{ij} = D_{ji}. \quad (5)$$

Установлено, что константы материальных функций для композита AVCOMod 3a [11, 27], приведенные в табл. 1 с учетом квадратичных форм (5) удовлетворяют критерию Сильвестра, вытекающего из требований постулата Друкера [14, 33, 34, 38].

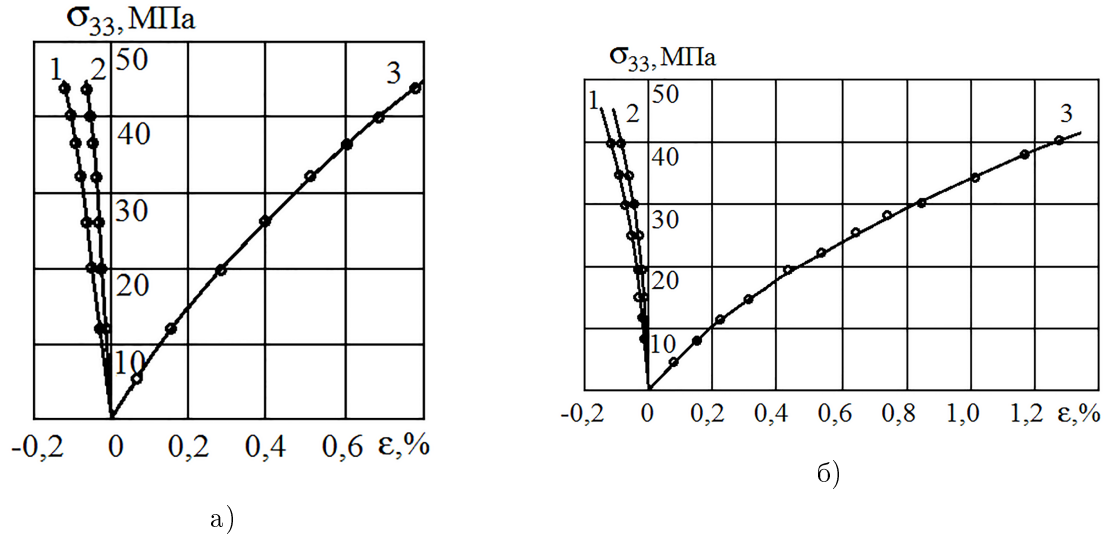


Рис. 3: Диаграммы деформирования вдоль оси x_3 : а) растяжение; б) сжатие; 1, 2 – поперечная деформация ϵ_{11} и ϵ_{22} ; 3 – продольная деформация ϵ_{33} ; $\circ$ – экспериментальные данные; ——— – нелинейные аппроксимации

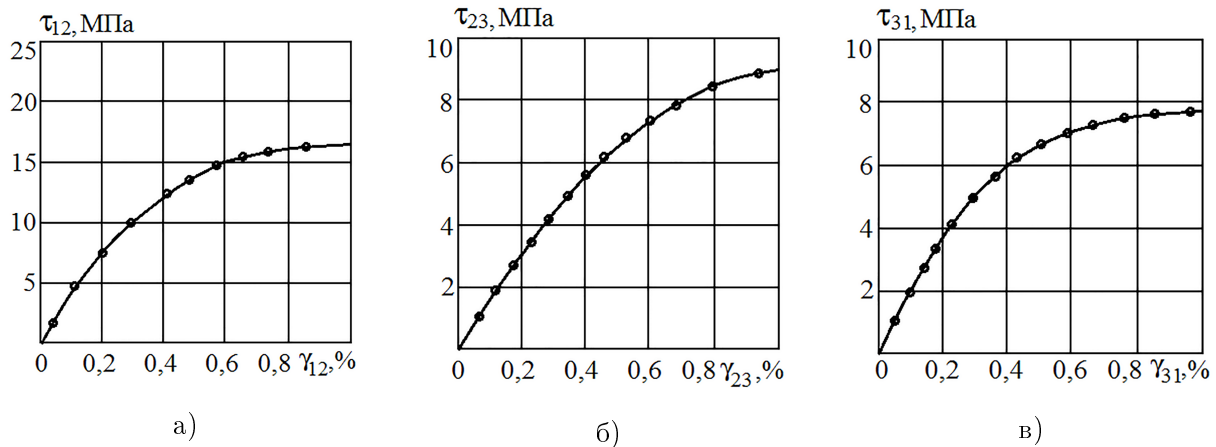


Рис. 4: Диаграммы деформирования на чистый сдвиг в главных плоскостях ортотропии: а) в плоскости x_1x_2 ; б) в плоскости x_2x_3 ; в) в плоскости x_1x_3 ; $\circ$ – экспериментальные данные; ——— – нелинейные аппроксимации

4. Подтверждение адекватности введенных уравнений состояния экспериментальным данным

На рис. 1 – 4 подтверждена адекватность постулированных уравнений состояния (1) экспериментально установленным диаграммам при растяжениях, сжатиях в главных осях ортотропии

и сдвигов в соответствующих плоскостях для эталонных образцов композита AVCOMod 3a [11, 27]. При этом отметим, что нелинейная модель (1) имеет ряд преимуществ по сравнению с известными уравнениями, сформулированными другими авторами, такими как С.А.Амбарцумян [31], С.W.Bert – L.N.Reddy [2, 27], R.M.Jones – D.A.R.Nelson [3 – 5, 11, 12] и А.А.Золочевский [13] применительно к расчетам, особенно, пространственных конструкций, выполненных из ортотропного композита AVCOMod 3a [11, 27]. В частности, модель (1) свободна от физически неоправданных ограничений, накладываемых на коэффициенты материальных функций, отсутствие кусочности уравнений состояния. Кроме того, погрешность теоретических аппроксимаций (1) эталонных экспериментальных диаграмм по сравнению с другими теориями [2 – 5, 11 – 13, 27], судя по рис. 1 – 4, минимальна, а при поворотах системы координат обладает более высокой точностью.

5. Заключение

Предложенная нелинейная математическая модель связи двух тензоров второго ранга, определяющая деформированное и напряженное состояния ортотропного композитного материала марки AVCOMod 3a [11, 27] позволяет максимально точно предсказывать поведение подобных структур. Для идентификации модели разработана классическая методика определения материальных функций путем обработки экспериментальных диаграмм с использованием процедуры наименьших квадратов. В качестве эталонных диаграмм рекомендуется использовать данные опытов по одноосному растяжению, одноосному сжатию по направлениям главных материальных осей ортотропного композита и на сдвиг в трех взаимно ортогональных плоскостях. Подтверждена энергетическая непротиворечивость нелинейных уравнений состояния с учетом определенных констант материальных полиномов для ортотропного композита [11, 27], которая устанавливается постулатом Друкера. Хотя предложенная модель является упрощенной, но она обладает большей точностью, по сравнению с математически строгими квазилинейными уравнениями и может быть рекомендована для применения в расчетах пространственных конструкций по деформациям и прочности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmueser, D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W.Schmueser // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – №12. – pp. 1742 – 1747.
2. Reddy, L.N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N.Reddy, C.W.Bert // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – № 6. – pp. 213 – 219.
3. Jones, R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – № 10. – pp. 1436 – 1443.
4. Jones, R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. - № 8. – pp. 995 – 1001.
5. Jones, R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9. – № 5. – pp. 917 – 923.
6. Крегерс, А.Ф. Нелинейная ползучесть тканевого стеклопластика при некоторых видах сложного напряженного состояния / А.Ф.Крегерс, Р.Д.Максимов, Р.П.Турциныш // Механика полимеров. – 1973. – №2. – С. 212 – 218.

7. Амелина, Е.В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В.Амелина [и др.] // ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20. – №5. – С. 27–52.
8. Каюмов, Р.А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов / Р.А.Каюмов, С.А.Луканкин, В.Н.Паймушин, С.А.Холмогоров // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157. – кн. 4. – С. 112–132.
9. Shafigullin, L.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts / L.N.Shafigullin, A.A.Bobrishev, V.T.Erofeev, A.A.Treshchev, A.N.Shafigullina // International Journal of Applied Engineering Research. – 2015. – Vol. 10. – №23. – pp. 43758-43762.
10. Розе, А.В. Трехармированные тканые материалы / А.В.Розе, И.Г.Жигун, М.Н.Душин // Механика полимеров. – 1970. – №3. – С. 471–476.
11. Jones, R.M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14 – №10. – pp. 1427–1435.
12. Jones, R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – pp. 16–25.
13. Золочевский, А.А. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении / А.А.Золочевский, В.Н.Кузнецов // Динамика и прочность тяжелых машин. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 84–92.
14. Трещев, А.А. Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещев // Тула: ТулГУ, 2020. – 359 с.
15. Bazant, Z.P. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete / Z.P.Bazant, P.D.Bhat // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. – 1976. – Vol. 102. – № EM4. – pp. 701–722.
16. Kupfer, H.B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung / H.B.Kupfer // Beton und Stahlbetonbau. – 1973. – №11. – pp. 269–274.
17. Tasuji, M.E. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading / M.E.Tasuji, F.O.Slate, A.H.Nilson // ACI Journal. – 1979. – №7. – pp. 806–812.
18. Леонов, М.Я. О механизме деформаций полухрупкого тела / М.Я.Леонов, К.Н.Русинко // Пластичность и хрупкость. – Фрунзе: ИЛИМ, 1967. – С. 86–102.
19. Леонов, М.Я. Зависимости между деформациями и напряжениями для полухрупких тел / М.Я.Леонов, В.А.Паняев, К.Н.Русинко // Инж. журн. МГТ. – 1967. – № 6. – С. 26 – 32.
20. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С.Писаренко, А.А.Лебедев. – Киев: Наукова думка, 1976. – 416 с.
21. Елсуфьев, С.А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состояниях / С.А.Елсуфьев // Механика полимеров. – 1968. – №4. – С. 742–746.

22. Елсуфьев, С.А. Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния / С.А.Елсуфьев, В.М.Чебанов // Исслед. по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. – Вып. 8. – С. 209–213.
23. Айнбиндер, С.Б. Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов / С.Б.Айнбиндер, М.Г.Лака, И.Ю.Майорс // Механика полимеров. – 1965. – № 1. – С. 65 – 75.
24. Айнбиндер, С.Б. Свойства полимеров при высоких давлениях / С. Б. Айнбиндер, К. И. Алксне, Э. Л. Тюпина, М. Г. Лака. – М.: Наука, 1973. – 118 с.
25. Деревянко, Н.И. Свойства армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатию и изгибе / Н.И.Деревянко // Механика полимеров. – 1968. – №6. – С. 1059–1064.
26. Божанов, П.В. Определение прочностных критериев при возникновении пластических деформаций в поликарбонате / П.В.Божанов, А.А.Трещев // Инновации и инвестиции. – 2018. – №12. – С. 323–326.
27. Bert, C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression / C.W.Bert // Transaction of the ASME. – 1977. – Vol. 99 Н. – Ser. D. – No. 4. – pp. 344–349.
28. Матченко, Н.М. Определяющие соотношения изотропных разнсопротивляющихся сред. Ч. 1. Квазилинейные соотношения / Н.М.Матченко, Л.А.Толоконников, А.А.Трещев // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – №1. – С. 73–78.
29. Матченко, Н.М. Определяющие соотношения изотропных разнсопротивляющихся сред. Ч. 2. Нелинейные соотношения / Н.М.Матченко, Л.А.Толоконников, А.А.Трещев // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – №4. – С. 87–95.
30. Treshchev, A.A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law / A.A.Treshchev, A.A. Bobrishev, L.N. Shafigullin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 481 (2019) UNSP012014. - Doi: 10.1088/ 1757-899X/481/1/ 012014. – pp. 1 – 7.
31. Амбарцумян, С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела / С.А.Амбарцумян // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – №3. – С. 51–61.
32. Ломакин, Е.В. Соотношения теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния / Е.В.Ломакин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – №3. – С. 63–69.
33. Трещев, А.А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов / А.А.Трещев // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 4-1 (324). – С. 71 – 74.
34. Трещев, А.А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов / А.А.Трещев, Ю.А.Завьялова, М.А.Лапшина // Эксперт: Теория и практика (Научно-практический журнал). – Тольятти: АНО «Институт судебной строительно-технической экспертизы» – 2020. – №3 (6). – С. 62 – 68. DOI 10.24411/2686-7818-2020-10027.
35. Грин, А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А.Грин, Дж.Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
36. Каудерер, Г. Нелинейная механика / Г.Каудерер. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 779 с.

37. Трещев, А.А. Математические определяющие уравнения деформирования материалов с двойной анизотропией / А.А.Трещев, Ю.А.Завьялова, М.А.Лапшина, А.Е.Гвоздев, О.В.Кузовлева, Е.С.Крупичин // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22. – №4 (80). – С. 369 – 383.
38. Турсунов, Б.С. О свойствах потенциала напряжений упругих тел / Б.С.Турсунов // ПММ. – 1970. – Т. 34. – Вып. 1. – С. 15–22.

REFERENCES

1. Schmueser, D.W., 1983, “Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells“, *AIAA Journal*, vol. 21, no. 12, pp. 1742-1747.
2. Reddy, L.N., Bert, C.W., 1982, “On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials“, *ZAMM*, vol. 62, no. 6, pp. 213-219.
3. Jones, R.M., 1977, “A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials“, *AIAA Journal*, vol. 15, no. 10, pp. 1436-1443.
4. Jones, R.M., 1980, “Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material“, *AIAA Journal*, vol. 18, no. 8, pp. 995-1001.
5. Jones, R.M., 1971, “Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression“, *AIAA Journal*, vol. 9, no. 5, pp. 917-923.
6. Kreger, A.F., Maksimov, R.D., Turtsinysh, R.P., “Nonlinear creep of fabric fiberglass under some types of complex stress state“, *Mechanics of polymers*, no. 2, pp. 212-218. (In Russian)
7. Amelina, E.V. [et al.], 2015, “On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation“, *IVT SB RAS: Computational Technologies*, vol. 20, no. 5, pp. 27-52. (In Russian)
8. Kayumov, R.A., Lukankin, S.A., Paimushin, V.N., Kholmogorov, S.A., 2015, “Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites“, *Scientific Notes of the Kazan University. Physical and mathematical sciences*, vol. 157, book 4, pp. 112-132. (In Russian)
9. Shafigullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafigullina A.N., 2015, “Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts“, *International Journal of Applied Engineering Research*, vol. 10, no. 23, pp. 43758-43762.
10. Rose A.V., Zhigun I.G., Dushin M.N., 1970, “Three-reinforced woven materials“, *Mechanics of polymers*, no. 3, pp. 471-476. (In Russian)
11. Jones R.M., Nelson D.A.R., 1976, “Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite“, *AIAA Journal*, vol. 14, no. 10, pp. 1427-1435.
12. Jones, R.M., 1977, “Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression“, *AIAA Journal*, vol. 15, no. 1, pp. 16-25.
13. Zolochovsky A.A., Kuznetsov V.N., 1989, “Calculation of anisotropic shells made of different-modulus materials under non-axisymmetric loading“, *Dynamics and strength of heavy machines*, Dnepropetrovsk: DSU, pp. 84-92. (In Russian)

14. Treschev, A.A., 2020, "Theory of deformation and strength of different resistant materials", Tula: TulSU, 359 p. (In Russian)
15. Bazant Z.P., Bhat P.D., 1976, "Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 102, no. EM4, pp. 701-722.
16. Kupfer, H.B., 1973, "Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung", *Beton und Stahlbetonbau*, no. 11, pp. 269-274.
17. Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H., 1979, "Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading", *ACI Journal*, no. 7, pp. 806-812.
18. Leonov M.Ya., Rusinko K.N., 1967, "On the mechanism of deformations of a semi-brittle body", *Plasticity and fragility*, Frunze: ILIM, pp. 86-102. (In Russian)
19. Leonov M.Y., Pinaev V.A., Rusinko K.N., 1967, "Dependencies between deformations and stresses for semi-fragile bodies", *Engineering Journal of Solid state mechanics*, no. 6, pp. 26-32. (In Russian)
20. Pisarenko G.S., Lebedev A.A., 1976, "Deformation and strength of materials under complex stress state", Kiev: Naukova dumka, 416 p. (In Russian)
21. Alsufiev, S.A., 1968, "Investigation of the deformation of fluoroplast-4, with linear and plane stress conditions", *Mechanics of polymers*, no. 4, pp. 742-746. (In Russian)
22. Alsufyev S.A., Chebanov V.M., 1971, "The study of the deformation of fluoroplast under conditions of plane stress state", *Studies in elasticity and plasticity*, L.: Publishing house of Leningrad state University, vol. 8, pp. 209-213. (In Russian)
23. Ainbinder S.B., Varnish M.G., Majors I.Y., 1965, "The Influence of hydrostatic pressure on the mechanical properties of polymeric materials", *Mechanics of polymers*, no. 1, P. 65-75.
24. Ainbinder S.B., Alksne K.I., Tyurin A.L., Varnish M.G., 1973, "Properties of polymers at high pressures", M.: Science, 118 p. (In Russian)
25. Derevyanko, N.I., 1968, "Properties of reinforced polystyrene under short-term stretching, compression and bending", *Mechanics of polymers*, no.6, pp. 1059-1064. (In Russian)
26. Bozhanov P.V., Treshchev A.A., 2018, "Determination of strength criteria in the occurrence of plastic deformations in polycarbonate", *Innovations and investments*, no. 12, pp. 323-326. (In Russian)
27. Bert C.W., 1977, "Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression", *Transaction of the ASME*, vol. 99 H, Ser. D. №4, P. 344-349. (In Russian)
28. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treshchev A.A., 1995, "Determining ratios of isotropic multi-resisting media. Part 1. Quasi-linear ratios", *News of the Academy of Sciences. Solid state mechanics*, no. 1, pp. 73-78. (In Russian)
29. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treshchev A.A., 1999, "Determining ratios of isotropic multi-resistive media. Part 2. Nonlinear ratios", *News of the Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no. 4, pp. 87-95. (In Russian)
30. Treschev A.A., Bobrishev A.A., Shafigullin L.N., 2019, "Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 481, UNSP012014, Doi: 10.1088/1757-899X/481/1/012014. pp. 1-7.

31. Ambartsumyan, S.A., 1969, "Basic equations and of the ratio of the heterogeneous theory of elasticity of an anisotropic body", *News USSR Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no. 3, pp. 51-61. (In Russian)
32. Lomakin, E.V., 1983, "Relations of the theory of elasticity for an anisotropic body, the deformation characteristics of which depend on the type of stress state", *News USSR Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no. 3, pp. 63-69. (In Russian)
33. Treshchev, A.A., 2017, "Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials", *Fundamental and applied problems of engineering and technology*, no. 4-1 (324), pp. 71-74. (In Russian)
34. Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., 2020, "A variant of the deformation model of orthotropic composite materials", *Expert: Theory and Practice (Scientific and Practical journal, Togliatti: ANO "Institute of Forensic Construction and Technical Expertise* no. 3 (6), pp. 62-68, DOI 10.24411/2686-7818-2020-10027. (In Russian)
35. Green A., Adkins J., 1965, "Large elastic deformations and nonlinear mechanics of a continuous medium", M.: Mir, 456 p. (In Russian)
36. Kauderer, G., 1961, "Nonlinear mechanics", M.: Publishing house of foreign literature, 779 p. (In Russian)
37. Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Krupitsyn E.S., 2021, "Mathematical defining equations of deformation of materials with double anisotropy", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4 (80), pp. 369-383. (In Russian)
38. Tursunov, B.S., 1970, "On the properties of the stress potential of elastic bodies", *AMM*, vol. 34, Issue 1, pp. 15-22. (In Russian)

Получено 03.01.2022

Принято в печать 14.09.2022