

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-207-223

**Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоскости<sup>1</sup>**

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

**Толоконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Ефимов Дмитрий Юрьевич** — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

**Аннотация**

В статье рассматриваются прямая и обратная задачи рассеяния гармонической плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с неоднородным анизотропным упругим покрытием в присутствии подстилающей плоской поверхности. Полагается, что материал покрытия цилиндра является радиально-неоднородным и трансверсально-изотропным, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями радиальной координаты, тело помещено в идеальную жидкость, подстилающая поверхность является идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой).

Получено аналитическое решение прямой задачи дифракции. Определены рассеянное акустическое поле и волновые поля в цилиндре и его покрытии.

На основе решения прямой задачи проведено математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука. Определены законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие минимальное рассеяние звука в заданном диапазоне частот при фиксированном угле наблюдения, а также в заданном секторе наблюдения при фиксированной частоте. Построены функционалы, выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука, и осуществлена их минимизация с помощью алгоритма имитации отжига.

Представлены результаты численных расчетов частотных зависимостей интенсивности рассеянного акустического поля при оптимальных параболических законах неоднородности для разных типов трансверсально-изотропных покрытий.

*Ключевые слова:* звуковые волны, рассеяние, однородный упругий цилиндр, неоднородное анизотропное покрытие.

*Библиография:* 18 названий.

**Для цитирования:**

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоскости // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 207–223.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-207-223

**Scattering of a plane sound wave by elastic a cylinder with an inhomogeneous anisotropic coating in the presence of a plane**

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

**Tolokonnikov Lev Alexeevich** — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Efimov Dmitrii Yurevich** — undergraduate student, Tula State University (Tula).

*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

**Abstract**

In the article the direct and inverse problems of scattering of a harmonic plane sound wave by a homogeneous isotropic cylinder with inhomogeneous anisotropic elastic coating in the presence of the underlying flat surface are considered. It is assumed that the coating material of cylinder is radially inhomogeneous and transverse-isotropic, the inhomogeneity laws of the coating material described by continuous radial coordinate functions, the body is placed in an ideal fluid, underlying surface is perfect (absolutely hard or acoustically soft).

An analytical solution of the direct diffraction problem is obtained. The scattered acoustic field and wave fields in the cylinder and its coating are defined.

Based on the solution of the direct problem a mathematical modeling of an inhomogeneous anisotropic coating of a elastic cylinder providing the least sound reflection done.

The inhomogeneity laws of the coating material ensuring the minimum sound scattering in the given frequency range at a fixed angle of observation and also in the given angular sector of observation at a fixed frequency are obtained. The functionals expressing the average intensity of sound scattering are built. Minimization of the functionals are implemented with the help of the burnout simulation algorithm.

The results of numerical calculations of frequency dependencies of intensity of the scatter acoustic field at the optimal parabolic inhomogeneity laws are presented for different types of transverse-isotropic coatings.

*Keywords:* sound waves, scattering, homogeneous elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic coating.

*Bibliography:* 18 titles.

**For citation:**

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2022, "Scattering of a plane sound wave by elastic a cylinder with an inhomogeneous anisotropic coating in the presence of a plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 207–223.

**1. Введение**

Исследованию рассеяния звука цилиндрическими телами с упругими покрытиями посвящен ряд работ. Например, рассеяние плоских волн цилиндром, имеющим упругое покрытие и находящимся в безграничном пространстве, изучено в [1-5]. В [6] решена обратная задача об определении оптимальных законов неоднородности материала покрытия цилиндра, обеспечивающих наименьшее звукоотражение плоской волны. Прямые и обратные задачи рассеяния

звука цилиндрами с неоднородными покрытиями в присутствии ограничивающих поверхностей рассмотрены в [7-11]. Во всех упомянутых выше работах покрытия цилиндрических тел рассматривались как изотропные. Анизотропия материала покрытия не учитывалась. Лишь в работе [12] осуществлено математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука в случае, когда тело находится в свободном пространстве.

В настоящей работе рассматриваются прямая и обратная задачи рассеяния плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием в присутствии идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) подстилающей плоской поверхности.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим изотропный упругий цилиндр бесконечной длины радиусом  $r_0$ , материал которого характеризуется плотностью  $\rho_0$  и упругими постоянными  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного трансверсально-изотропного упругого слоя с внешним радиусом  $r_1$ . Тело находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью с плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c$ . Плоская подстилающая поверхность  $\Gamma$  является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось цилиндра параллельна плоскости  $\Gamma$  и отстоит от неё на расстоянии  $d$ .

Введем прямоугольную декартову систему координат  $x, y, z$  так, чтобы координатная ось  $z$  совпадала с осью вращения цилиндра. В системе координат  $x, y, z$  граница полупространства  $\Gamma$  определяется уравнением  $y = -d$ . С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  (рис. 1). Материал покрытия характеризуется модулями упругости  $\lambda_{ijkl}$ , которые описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r$ , и плотностью  $\rho$ , которая является непрерывной функцией координаты  $r$ . Ось  $z$  является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр перпендикулярно его оси падает плоская монохроматическая звуковая волна, потенциал скорости которой

$$\Psi_0 = A \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - i\omega t],$$

где  $A$  — амплитуда волны;  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}$  — волновой вектор падающей волны;  $\mathbf{r} = \{x, y, 0\}$  — радиус-вектор;  $x = r \cos \varphi$ ;  $y = r \sin \varphi$ ;  $k_x = k \cos \varphi_0$ ;  $k_y = k \sin \varphi_0$ ;  $\varphi_0$  — угол, образованный вектором  $\mathbf{k}$  с положительным направлением оси  $x$ ;  $\omega$  — круговая частота;  $t$  — время. В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное цилиндром с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием в присутствии идеальной плоскости. Осуществим моделирование покрытия, обеспечивающего требуемое звукоотражение.

## 3. Приближенное аналитическое решение прямой задачи

Рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты  $z$ .

Распространение звуковых волн в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [13]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где  $\Psi$  — потенциал скорости полного акустического поля.

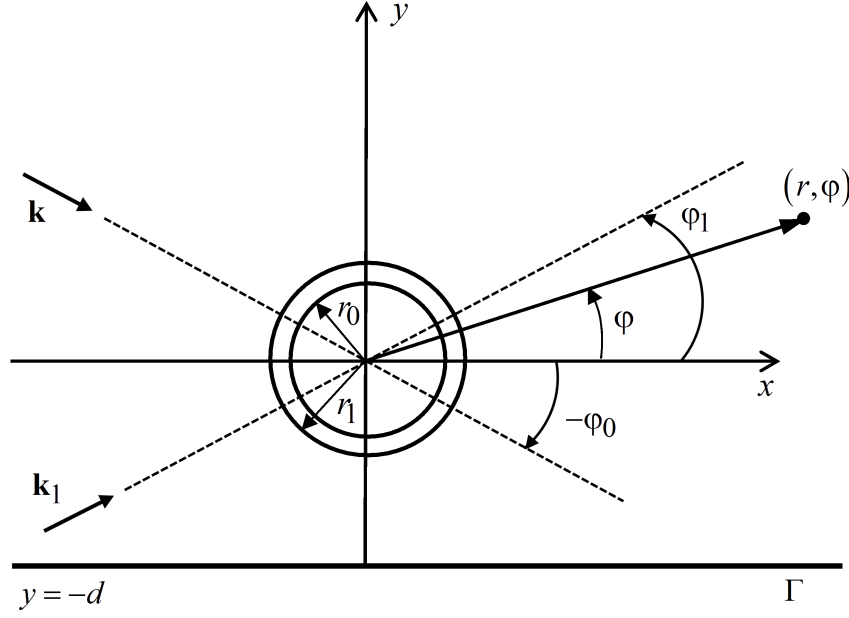


Рис. 1: Геометрия задачи

Скорость частиц  $\mathbf{v}$  и акустическое давление  $p$  в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

В случае установившегося режима колебаний распространение упругих волн в однородном изотропном упругом цилиндре описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [13]

$$\Delta L + k_l^2 L = 0,$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0,$$

где  $L$  и  $\Phi$  — скалярный и векторный потенциалы смещения  $\mathbf{u}_0$ ;

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } L + \text{rot } \Phi;$$

$k_l = \omega/c_l$  и  $k_\tau = \omega/c_\tau$  — волновые числа продольных и поперечных упругих волн;  
 $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$  и  $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$  — скорости продольных и поперечных волн.

Так как  $\Phi = \Phi(r, \varphi) \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор оси  $z$ , то от векторного уравнения относительно потенциала  $\Phi$  переходим к одному скалярному уравнению относительно функции  $\Phi(r, \varphi)$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0.$$

Учитывая условия ограниченности, функции  $L$  и  $\Phi$  будем искать в виде

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (2)$$

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_\tau r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (3)$$

где  $J_n(x)$  — цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ .

Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}_0$ , записанные через функции  $L$  и  $\Phi$ , в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} u_{0r} &= \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\ u_{0\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{0ij}$  и вектора смещения  $u_0$  в однородном изотропном цилиндре имеют вид [14]

$$\begin{aligned} \sigma_{0rr} &= \lambda_0 \left[ \frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) \right] + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \\ \sigma_{0\varphi\varphi} &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{r} \left( \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) + \lambda_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \\ \sigma_{0r\varphi} &= \mu_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r} \right). \end{aligned}$$

Используя соотношения приведенные выше, выразим компоненты тензора напряжений  $\sigma_{0rr}$ ,  $\sigma_{0r\varphi}$  через функции  $L$ ,  $\Phi$

$$\begin{aligned} \sigma_{0rr} &= -\lambda_0 k_l^2 L + 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{0r\varphi} &= \frac{\mu_0}{r} \left( 2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) - \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном покрытии цилиндра описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые для установившегося режима движения в цилиндрической системе координат имеют вид [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $u_r$ ,  $u_\varphi$  и  $\sigma_{ij}$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  и тензора напряжений в покрытии цилиндра.

Для трансверсально-изотропной упругой среды число независимых модулей упругости равно пяти ( $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{23}$ ,  $\lambda_{55}$ ). При такой анизотропии поверхностями изотропии являются концентрические цилиндрические поверхности.

Компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  соотношениями обобщенного закона Гука [14]

$$\sigma_{rr} = \lambda_{11} \varepsilon_{rr} + \lambda_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{22} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\lambda_{55} \varepsilon_{r\varphi}. \tag{5}$$

Здесь использовано двухиндексное обозначение модулей упругости  $\lambda_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, 6$ ). При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора смещений соотношениями

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \tag{6}$$

Получим приближенное решение прямой задачи, пренебрегая отражением от плоскости  $\Gamma$  волн, рассеянных телом, но учитывая рассеяние цилиндром волны, образующейся при отражении падающей плоской волны от плоскости.

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля  $\Psi$  представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (7)$$

где  $\Psi_1$  — потенциал скорости волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости  $\Gamma$ ;  $\Psi_{s1}$  — потенциал скорости волны, возникающей при рассеянии цилиндром падающей плоской волны;  $\Psi_{s2}$  — потенциал скорости волны, возникающей при рассеянии цилиндром отраженной от плоскости волны.

Чтобы отражением от плоскости  $\Gamma$  волн, рассеянных телом можно было пренебречь, следует считать, что  $d \gg r_1$ .

Потенциал  $\Psi_1$  описывает плоскую волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию на поверхности  $\Gamma$ , которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \quad (8)$$

если плоскость  $\Gamma$  является абсолютно жесткой, и в равенстве нулю акустического давления

$$(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \quad (9)$$

если плоскость  $\Gamma$  является акустически мягкой.

Потенциал  $\Psi_1$  имеет вид

$$\Psi_1 = A_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})], \quad (10)$$

где  $A_1$  — амплитуда волны;  $\mathbf{k}_1 = \{k_{1x}, k_{1y}, 0\}$  — волновой вектор отраженной от плоскости волны;  $k_{1x} = k \cos \varphi_1$ ;  $k_{1y} = k \sin \varphi_1$ ;  $\varphi_1$  — угол, образованный вектором  $\mathbf{k}_1$  с положительным направлением оси  $x$ . Согласно закону Снеллиуса [15]  $k_{1x} = k_x$  и  $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$ .

Подставляя (10) в граничные условия (8) и (9), находим

$$A_1 = \pm A \exp(i2kd \sin \varphi_0), \quad (11)$$

где знаки «+» и «-» относятся к случаям жесткой и мягкой подстилающих поверхностей соответственно.

В цилиндрической системе координат падающая плоская волна представляется разложением [16]

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (12).$$

Потенциалы  $\Psi_{s1}$  и  $\Psi_{s2}$  являются решениями уравнения Гельмгольца (1) и должны удовлетворять граничным условиям на внешней стороне покрытия, а также условиям излучения на бесконечности [13].

Чтобы найти  $\Psi_{s1}$  необходимо определить поле смещений в неоднородном покрытии, возникающее в результате падения на шар плоской волны с потенциалом  $\Psi_0$ . Для нахождения  $\Psi_{s2}$  необходимо определить поле смещений, возникающее в покрытии в результате падения на шар плоской волны с потенциалом  $\Psi_1$ .

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной анизотропной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений.

На внешней поверхности покрытия (при  $r = r_1$ ) потенциал  $\Psi_{s1}$  должен удовлетворять граничным условиям

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad \sigma_{rr} = -i\rho_1\omega(\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (13)$$

а потенциал  $\Psi_{s2}$  — условиям

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\Psi_1 + \Psi_{s2}), \quad \sigma_{rr} = -i\rho_1\omega(\Psi_1 + \Psi_{s2}), \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (14)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред (при  $r = r_0$ ) должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}. \quad (15)$$

В случае радиальной неоднородности и трансверсально-изотропности материала покрытия цилиндра волновые поля в жидкости и в покрытии симметричны относительно плоскости  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\varphi_0 + \pi$  и описываются периодическими функциями координаты  $\varphi$ . Поэтому компоненты вектора смещений будем искать в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{1n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \\ u_\varphi(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{2n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем новые неизвестные функции  $U_{1n}(r)$  и  $U_{2n}(r)$  по формулам

$$\tilde{U}_{1n}(r) = AU_{1n}(r), \quad \tilde{U}_{2n}(r) = AU_{2n}(r).$$

Введение новых функций позволит найти вектор смещения неоднородного упругого покрытия  $\mathbf{u}$ , независимый от амплитуды падающей звуковой волны.

Подставляя выражения (16) в уравнения (4), получим с учетом (5) и (6) следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $U_{1n}(r)$  и  $U_{2n}(r)$  для каждого  $n$ :

$$\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (17)$$

где  $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r), U_{2n}(r))^T$ ;  $\hat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{2 \times 2}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{2 \times 2}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{2 \times 2}$  — матрицы второго порядка с элементами

$$\begin{aligned} a_{n11} &= \lambda_{11}r^2, \quad a_{n12} = a_{n21} = 0, \quad a_{n22} = \lambda_{55}r^2, \\ b_{n11} &= \lambda'_{11}r^2 + \lambda_{11}r, \quad b_{n12} = b_{n21} = in(\lambda_{12} + \lambda_{55})r, \quad b_{n22} = \lambda'_{55}r^2 + \lambda_{55}r, \\ c_{n11} &= \omega^2\rho r^2 - n^2\lambda_{55} + \lambda'_{12}r - \lambda_{22}, \quad c_{n12} = in(\lambda'_{22}r - \lambda_{55} - \lambda_{22}), \\ c_{n21} &= in(\lambda'_{55}r + \lambda_{55} + \lambda_{22}), \quad c_{n22} = \omega^2\rho r^2 - n^2\lambda_{22} - \lambda'_{55}r - \lambda_{55}. \end{aligned}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал  $\Psi_{s1}$  будем искать в виде

$$\Psi_{s1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (18)$$

где  $H_n(x)$  – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ .

Подставляя (12), (16) и (18) в первое граничное условие (13), находим

$$A_n = -\frac{A[i^n k J'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)]}{k H'_n(kr_1)}. \quad (19)$$

Подставляя (12), (16) и (18) во второе и третье условия (13), получаем два краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений

$$\left( \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{E}}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_1} = \mathbf{D}_n, \quad (20)$$

где элементы матриц  $\tilde{E}_n = (e_{nij})_{2 \times 2}$  и  $\tilde{D}_n = (d_{ni})_{2 \times 1}$  определяются следующими выражениями:

$$e_{n11} = \frac{\lambda_{12}}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n(kr)}{k H'_n(kr)}, \quad e_{n12} = \frac{in \lambda_{12}}{r}, \quad e_{n21} = \frac{in \lambda_{55}}{r}, \quad e_{n22} = -\frac{\lambda_{55}}{r},$$

$$d_{n1} = \frac{2i^n \omega \rho_1}{\pi k r H'_n(kr)}, \quad d_{n2} = 0.$$

При получении выражения для  $d_{n1}$  было использовано выражение для вронскиана [16]

$$J_n(x) H'_n(x) - J'_n(x) H_n(x) = \frac{2i}{\pi x}.$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при  $r = r_0$  находим неизвестные коэффициенты  $B_n$ ,  $C_n$  разложений (2) и (3), выраженные через величины  $U_{1n}(r_0)$ ,  $U_{2n}(r_0)$ .

Из оставшихся неиспользованными граничных условий (15) находим еще два краевых условия для системы дифференциальных уравнений (17)

$$\left( \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \hat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_0} = 0, \quad (21)$$

где элементы матрицы  $\tilde{F}_n = (f_{nij})_{2 \times 2}$  определяются по формулам

$$f_{n11} = [\gamma_{1n} e_{1n} + \gamma_{3n} e_{2n} + \lambda_{12}/r], \quad f_{n12} = [\gamma_{2n} e_{1n} + \gamma_{4n} e_{2n} + in \lambda_{12}/r],$$

$$f_{n21} = \mu_0 [\gamma_{1n} e_{3n} + \gamma_{3n} e_{4n} + in \lambda_{55}/(\mu_0 r)], \quad f_{n22} = \mu_0 [\gamma_{2n} e_{3n} + \gamma_{4n} e_{4n} - \lambda_{55}/(\mu_0 r)],$$

$$e_{1n} = [\lambda_0 n^2 J_n(k_l r) - k_l^2 r^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) J''_n(k_l r) - \lambda_0 k_l r J'_n(k_l r)],$$

$$e_{2n} = 2\mu_0 in [J_n(k_\tau r) - k_\tau r J'_n(k_\tau r)], \quad e_{3n} = 2in [J_n(k_l r) - k_\eta r J'_n(k_l r)],$$

$$e_{4n} = [k_\tau^2 r^2 J''_n(k_\tau r) - k_\tau r J'_n(k_\tau r) + n^2 J_n(k_\tau r)],$$

$$\gamma_{1n} = k_\tau r J'_n(k_\tau r) / \Delta_n, \quad \gamma_{2n} = in J_n(k_\tau r) / \Delta_n, \quad \gamma_{3n} = in J_n(k_l r) / \Delta_n, \quad \gamma_{4n} = -k_l r J'_n(k_l r) / \Delta_n,$$

$$\Delta_n = r [k_l r^2 J'_n(k_l r) k_\tau J'_n(k_\tau r) - n^2 J_n(k_l r) J_n(k_\tau r)].$$

Таким образом, для нахождения функций  $U_{1n}(r)$  и  $U_{2n}(r)$  следует решить краевую задачу (17), (20), (21). Эта краевая задача может быть решена разными методами, например, методом сведения ее к задачам с начальными условиями или методом сплайн-коллокации.

После нахождения решения краевой задачи вычисляем коэффициенты  $A_n$ . В результате потенциал скорости  $\Psi_{s1}$  определяется выражением (18).

Аналогично можно найти потенциал  $\Psi_{s2}$ . Однако для его определения можно воспользоваться результатом, полученным для  $\Psi_{s1}$ . Для этого достаточно в качестве волны, падающей

на цилиндр, рассматривать плоскую волну с потенциалом  $\Psi_1$ . При этом азимутальный угол падения волны с потенциалом  $\Psi_1$  равен  $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$ , а амплитуда этой волны  $A_1$  определяется выражением (11). Поэтому в выражении (19) для коэффициента  $A_n$  следует сделать замену  $A$  на  $A_1$ , а в разложении (18) заменить  $\varphi_0$  на  $-\varphi_0$ .

Потенциал скорости рассеянного поля  $\Psi_s$  имеет вид

$$\Psi_s = \Psi_1 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}$$

или

$$\Psi_s(\omega, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n H_n(kr) e^{-in\varphi_0} + A_1 (i^n J_n(kr) + A^{-1} A_n H_n(kr)) e^{in\varphi_0}] e^{in\varphi}.$$

#### 4. Решение обратной задачи

Используя полученное решение прямой задачи, определим законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее звукоотражение в заданном диапазоне частот  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  при фиксированном угле наблюдения  $\varphi = \varphi_*$  и в заданном угловом секторе наблюдения  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  при фиксированной частоте  $\omega = \omega_*$ .

Будем считать, что функции  $\rho$ ,  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{55}$  аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной  $r$

$$\eta(r) = \eta^* \bar{\eta}(r), \quad (22)$$

где

$$\bar{\eta}(r) = \eta^{(0)} + \eta^{(1)}r + \eta^{(2)}r^2. \quad (23)$$

Здесь и далее под символом  $\eta$  подразумевается каждая из величин  $\rho$ ,  $\lambda_{ij}$ , а под символом  $\eta^*$  — соответствующие характерные величины для механических свойств материала покрытия. Модуль упругости  $\lambda_{23}$  не рассматривается, так как он не присутствует в математической модели задачи.

Введем в качестве меры рассеяния звука величину интенсивности звукового рассеяния  $I(\omega, \varphi) = |\Psi_s(\omega, \varphi)|^2$  и построим функционалы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  вида

$$\Phi_1[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega, \varphi_*) d\omega, \quad (24)$$

$$\Phi_2[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I(\omega_*, \varphi) d\varphi, \quad (25)$$

определенные на классе параболических функций (23) и выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов  $\eta^{(i)}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) в (23), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (23), определенных на отрезке  $[r_0, r_1]$ , введем ограничения

$$C_{1\eta} \leq \bar{\eta}(r) \leq C_{2\eta}, \quad (26)$$

где  $C_{1\eta}$ ,  $C_{2\eta}$  — некоторые положительные константы.

Каждое из неравенств (26) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс  $r$  и осью ординат  $\bar{\eta}(r)$  бесконечное множество парабол, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega\left(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}\right) = \{(r, f) : r_0 \leq r \leq r_1, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\}.$$

В области  $\Omega$  каждая парабола  $\bar{\eta}(r)$  единственным образом определяется тремя точками  $G_{0\eta}(r_0, f_{0\eta})$ ,  $G_{1\eta}(\bar{r}, f_{1\eta})$ ,  $G_{2\eta}(r_1, f_{2\eta})$ , где  $\bar{r} = (r_0 + r_1)/2$ ,  $f_{q\eta} \in [C_{1\eta}, C_{2\eta}]$  ( $q = 0, 1, 2$ ).

Подставляя координаты точек  $G_{0\eta}$ ,  $G_{1\eta}$ ,  $G_{2\eta}$  в (23), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений, из которой находим

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= [f_{0\eta} r_1 \bar{r} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} r_1 r_0 (r_1 - r_0) + f_{2\eta} \bar{r} r_0 (r_0 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(1)} &= [f_{0\eta} (r_1^2 - \bar{r}^2) + f_{1\eta} (r_0^2 - r_1^2) + f_{2\eta} (\bar{r}^2 - r_0^2)] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(2)} &= [f_{0\eta} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} (r_1 - r_0) + f_{2\eta} (r_0 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\Delta_\eta = (r_1 - r_0) (r_1 r_0 - r_1 \bar{r} - r_0 \bar{r} + \bar{r}^2).$$

Выбирая из отрезка  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$  значения ординат  $f_{0\eta}$ ,  $f_{1\eta}$ ,  $f_{2\eta}$  и вычисляя с помощью соотношений (27) значения коэффициентов  $\eta^{(0)}$ ,  $\eta^{(1)}$ ,  $\eta^{(2)}$ , получаем параболические законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы являются допустимыми.

Если выполняется условие

$$r_0 \leq -\eta^{(1)} / (2\eta^{(2)}) \leq r_1,$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку  $[r_0, r_1]$ . В этом случае параболу следует рассматривать только тогда, когда ордината ее вершины принадлежит отрезку  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ , то есть при выполнении условия

$$C_{1\eta} \leq \eta^{(0)} - \eta^{(1)2} / (4\eta^{(2)}) \leq C_{2\eta}.$$

Нахождение значений коэффициентов  $\eta^{(0)}$ ,  $\eta^{(1)}$ ,  $\eta^{(2)}$  функций (23), удовлетворяющих условиям (26) и минимизирующих функцию пятнадцати переменных

$$\Phi_m(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \lambda_{55}^{(0)}, \lambda_{55}^{(1)}, \lambda_{55}^{(2)}) \rightarrow \min \quad (m = 1, 2),$$

осуществим с помощью алгоритма имитации отжига [17].

Введем для ординаты  $f_{q\eta}$  ( $q = 0, 1, 2$ ) точки  $G_{q\eta}$  на отрезке  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$  равномерную сетку  $f_{q\eta}^{(l_{q\eta})} = C_{1\eta} + l_{q\eta} h$ . Здесь  $l_{q\eta}$  — номер узла сетки,  $h = (C_{2\eta} - C_{1\eta}) / \tilde{n}$  — шаг сетки,  $\tilde{n}$  — количество равных частей, на которые разбит отрезок  $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ .

Алгоритм имитации отжига относится к алгоритмам типа случайного поиска и представляет собой метод решения задачи глобальной оптимизации [17]. На первом этапе из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной сетке случайным образом выбирается начальная точка — совокупность пятнадцати значений

$$f^{(0)} = (f_{0\rho}, f_{1\rho}, f_{2\rho}, \dots, f_{0\lambda_{55}}, f_{1\lambda_{55}}, f_{2\lambda_{55}}),$$

а также устанавливаются параметры  $T_{\max}$  и  $T_{\min}$  — наибольшая и наименьшая температура системы. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества. На каждом последующем шаге итерационного процесса происходит генерация нового допустимого решения и понижение температуры в соответствии с правилами

$$f^{(j)} = f^{(j-1)} + T(j) \cdot X, \quad X \sim C(0, 1),$$

$$T(j) = T_{\max}/j^{(1/w)},$$

где  $C(0, 1)$  — стандартное распределение Коши размерности  $w$ ;  $j$  — номер шага. Решение  $f^{(j)}$  принимается как оптимальное, если  $\Phi_m(f^{(j)})$  меньше наименьшего значения  $\Phi_m^{(\min)}$ , найденного к текущему моменту. Преимуществом метода отжига является возможность избежать «ловушки» в локальных минимумах функции. Это достигается за счет не только принятия изменений параметров, уменьшающих значение функции  $\Phi_m$ , но и некоторых изменений, увеличивающих ее. Решение  $f^{(j)}$  может быть принято оптимальным, если

$$\tilde{\alpha} < P \left[ \Phi_m^{(\min)} - \Phi_m(f^{(j)}), T(j) \right],$$

где  $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$  — случайная равномерно распределенная величина;  $P$  — функция плотности вероятности распределения Гиббса [17]. Алгоритм продолжает свою работу до тех пор, пока  $T(j) > T_{\min}$ .

Найденный таким образом локальный минимум функции  $\Phi_m$  и соответствующий ему набор коэффициентов зависит от выбора начальной точки, от значения шага  $h$ , вектора  $X$ , а также значений  $\tilde{\alpha}$ ,  $P$ , которые за одну полную процедуру поиска могут вычисляться достаточно большое количество раз. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется  $M$  раз, а в качестве конечного решения выбирается наилучший найденный результат.

Применение метода отжига для минимизации функционалов вида (24) и (25) подробно описано в [12].

## 5. Численные исследования

Были проведены расчеты параметров неоднородности покрытия цилиндра, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука в дальней зоне акустического поля при  $r/r_0 = 100$ .

Полагалось, что магниевый цилиндр ( $\rho_0 = 1,74 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu_0 = 1,6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>) радиуса  $r_0 = 1$  м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0,2 м располагается в полупространстве, заполненном водой ( $\rho_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с). Расстояние от оси цилиндра до границы полупространства  $d = 20r_0$ . При расчетах рассматривались два типа материала неоднородного transversально-изотропного цилиндрического слоя, а также случай изотропного неоднородного покрытия. Изотропной базой всех материалов был выбран алюминий с характерной плотностью  $\rho^* = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Характерные значения модулей упругости приведены в таблице.

Характерные величины модулей упругости ( $\times 10^{10}$ ) Н/м<sup>2</sup>

| Материал   | $\lambda_{11}^*$ | $\lambda_{12}^*$ | $\lambda_{22}^*$ | $\lambda_{55}^*$ |
|------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Тип 1      | 5,74             | 3,28             | 16,4             | 2,54             |
| Тип 2      | 16,4             | 0,82             | 5,74             | 2,95             |
| Изотропный | 10,5             | 5,3              | 10,5             | 2,6              |

Полагалось, что плоская звуковая волна единичной амплитуды падает на цилиндр с покрытием в присутствии абсолютно жесткой плоскости под углом  $\varphi_0$ .

Решение краевой задачи (17), (20), (21) получено методом сплайн-коллокации [18].

В ограничениях (26) полагалось  $C_{1\eta} = 0,5$ ,  $C_{2\eta} = 1,5$ . При применении алгоритма отжига шаг сетки выбирался равным  $h = 0.125$ , размерность пространства параметров  $w = 15$ . Для каждого типа покрытия цилиндра эксперимент по поиску оптимальных значений параметров неоднородности проводился  $M = 10$  раз, а каждый эксперимент обеспечивал 32768 итераций за одну полную процедуру поиска оптимальных значений при  $5 \leq T(j) \leq 10$ .

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием при фиксированном угле  $\varphi_* = 2\pi/3$  и  $\varphi_0 = -\pi/3$  в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке  $5 \leq kr_0 \leq 7$  имеют следующий вид:

тип 1

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\ \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119,5), \\ \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} (-87,5r^2 + 192,5r - 104,5), \\ \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119,5), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (12,5r^2 - 28,75r + 17,75); \end{aligned} \quad (28)$$

тип 2

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\ \lambda_{11} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-37,5r^2 + 82,5r - 44,5), \\ \lambda_{12} &= 0,82 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119,5), \\ \lambda_{22} &= 5,74 \cdot 10^{10} (12,5r^2 - 22,5r + 10,5), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (62,5r^2 - 140r + 79); \end{aligned} \quad (29)$$

изотропный

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 \cdot (-12,5r^2 + 23,75r - 9,75), \\ \lambda_{11} &= 10,5 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\ \lambda_{12} &= 5,3 \cdot 10^{10} (50r^2 - 110r + 61,5), \\ \lambda_{22} &= 10,5 \cdot 10^{10} (25r^2 - 55r + 30,75), \\ \lambda_{55} &= 2,6 \cdot 10^{10} (68,75r^2 - 153,125r + 85,875). \end{aligned} \quad (30)$$

Значения функционала  $\Phi_1$ , соответствующие оптимальным законам (28) и (29) для анизотропного неоднородного покрытия, равны  $\Phi_1 = 0,66 \cdot 10^{-2}$  и  $\Phi_1 = 0,59 \cdot 10^{-2}$ . Для изотропного случая с законами неоднородности (30) получили значение  $\Phi_1 = 0,57 \cdot 10^{-2}$ .

Для оценки эффективности покрытий с оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала для упругого цилиндра без покрытия, которое составило  $\Phi_1 = 1,14 \cdot 10^{-2}$ .

Для случая фиксированной частоты, которой соответствует волновой размер цилиндра  $kr_0 = 6$ , в угловом секторе  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$  при угле падения плоской волны  $\varphi_0 = -\pi/6$  получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

тип 1

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\ \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} (-6,25r^2 + 15,625r - 8,25), \\ \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} (-62,5r^2 + 137,5r - 74,5), \\ \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (50r^2 - 108,75r + 60); \end{aligned} \quad (31)$$

тип 2

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\ \lambda_{11} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-6,25r^2 + 15,625r - 8,25), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= 0,82 \cdot 10^{10} (-62,5r^2 + 137,5r - 74,5), \\ \lambda_{22} &= 5,74 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (50r^2 - 108,75r + 60); \end{aligned} \quad (32)$$

изотропный

$$\begin{aligned}\rho &= 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\ \lambda_{11} &= 10,5 \cdot 10^{10} (-12,5r^2 + 22,5r - 8,5), \\ \lambda_{12} &= 5,3 \cdot 10^{10} (-25r^2 + 60r - 34,5), \\ \lambda_{22} &= 10,5 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\ \lambda_{55} &= 2,6 \cdot 10^{10} (-62,5r^2 + 135r - 71,5). \end{aligned} \quad (33)$$

Наименьшие значения функционала  $\Phi_2$  при оптимальных законах (31) и (32) для покрытий из материалов типов 1 и 2 равны  $\Phi_2 = 0,54 \cdot 10^{-2}$  и  $\Phi_2 = 0,27 \cdot 10^{-2}$ , а для изотропного покрытия при оптимальных законах (33)  $\Phi_2 = 0,4 \cdot 10^{-2}$ . Значение функционала для упругого цилиндра без покрытия составило  $\Phi_2 = 0,85 \cdot 10^{-2}$ .

На рис. 2, 3, 4 приведены зависимости интенсивности звукоотражения  $I(\omega, \varphi)$  от волнового размера  $kr_0$  при  $\varphi = 2\pi/3$  в диапазоне  $5 \leq kr_0 \leq 7$ . Сплошными линиями изображены частотные зависимости для цилиндров, имеющих покрытия с оптимальными законами неоднородности (28) (рис. 2), (29) (рис. 3) и (30) (рис. 4). Пунктирными линиями обозначены зависимости для цилиндра без покрытия.

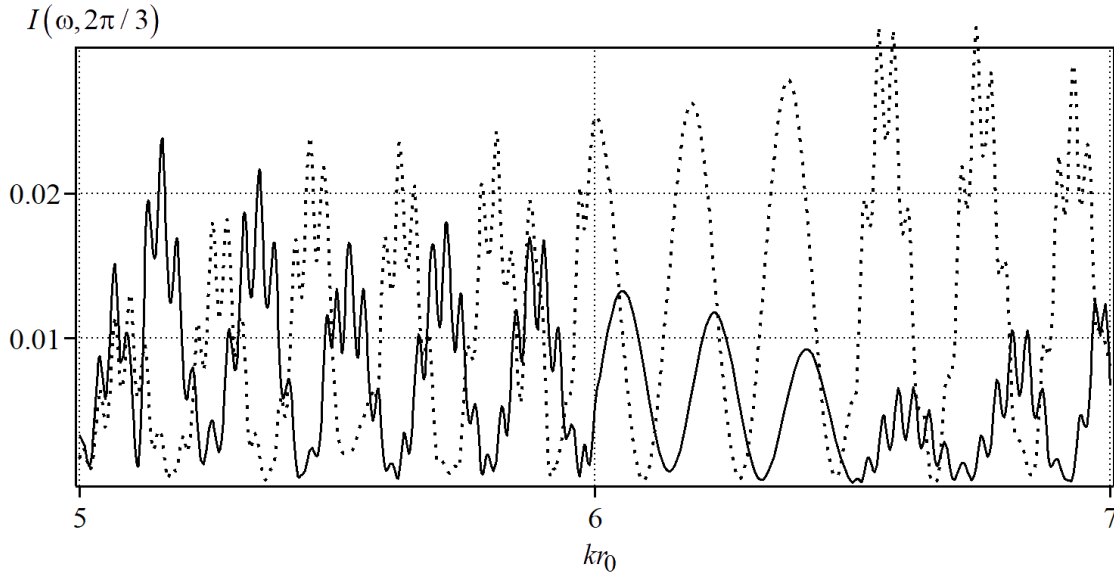


Рис. 2: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с покрытием типа 1

Чтобы выявить влияние свойств подстилающей поверхности  $\Gamma$  на рассеянное акустическое поле, была осуществлена процедура минимизации функционала  $\Phi_1$  в частотном диапазоне, соответствующем изменению волнового размера в промежутке  $5 \leq kr_0 \leq 7$  при фиксированном значении угла  $\varphi_* = 2\pi/3$  и азимутальном угле падающей волны  $\varphi_0 = -\pi/3$  в случае акустически мягкой границы полупространства для цилиндра с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием типа 1. Минимальному значению  $\Phi_1 = 0,63 \cdot 10^{-2}$  соответствует покрытие со следующими параметрами

$$\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5,$$

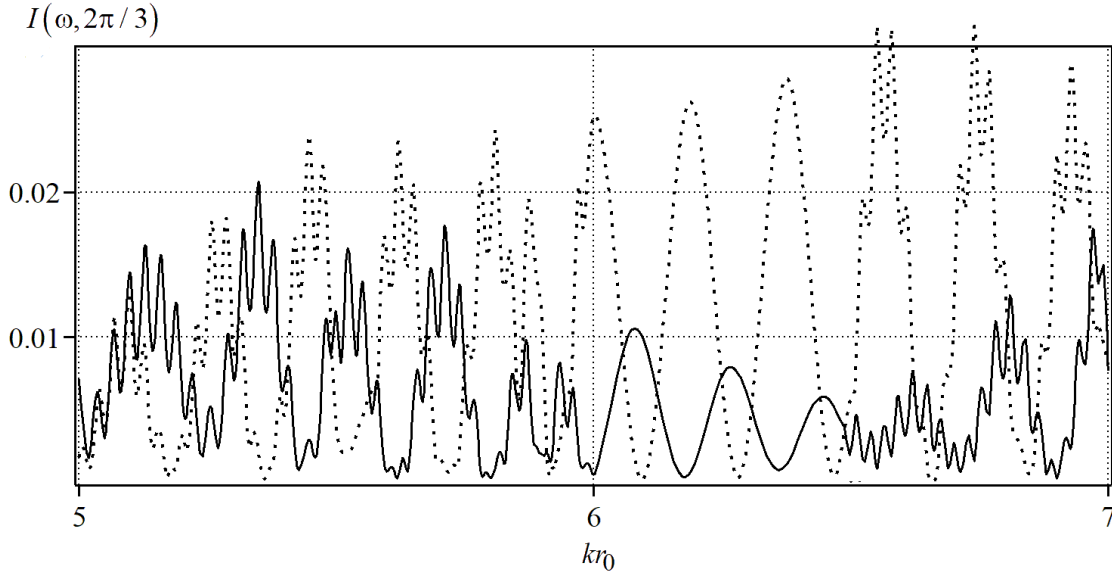


Рис. 3: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с покрытием типа 2

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119,5), \\
 \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119,5), \\
 \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} (-25r^2 + 56,25r - 30,75), \\
 \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} \cdot 1,5.
 \end{aligned} \tag{34}$$

При этом значение функционала для цилиндра без покрытия составило  $\Phi_1 = 1,12 \cdot 10^{-2}$ .

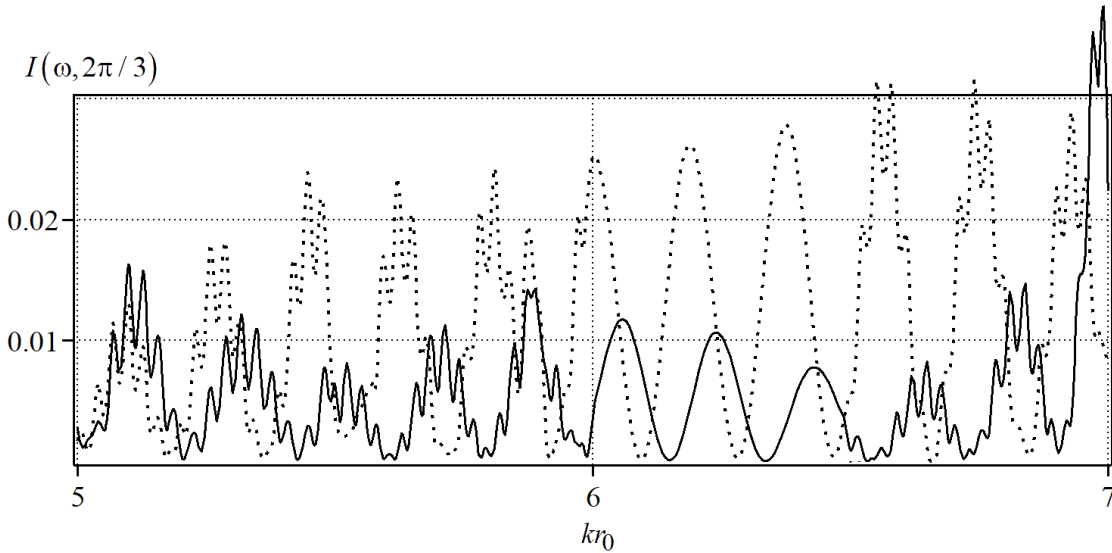


Рис. 4: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с изотропным покрытием

На рис. 5 приведены частотные характеристики для цилиндра с оптимальным покрытием (34) (сплошная линия) и без покрытия (пунктирная линия) при  $\varphi = 2\pi/3$  в случае акустически мягкой границы  $\Gamma$ .

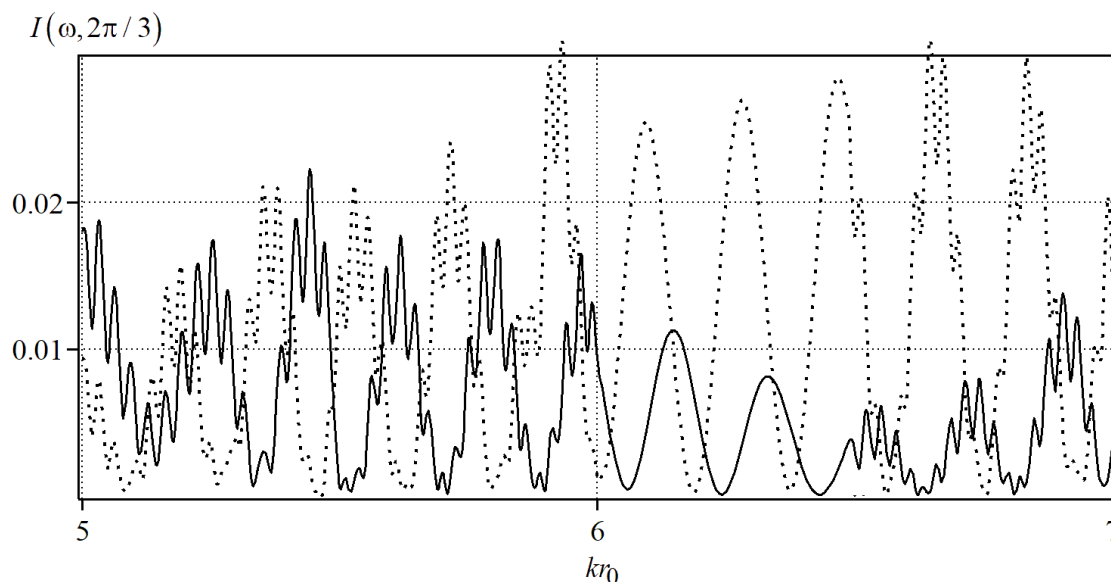


Рис. 5: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния в случае акустически мягкой поверхности  $\Gamma$

## 6. Заключение

В настоящей работе получены аналитические решения прямой и обратной задач дифракции плоских звуковых волн на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным покрытием в присутствии плоской подстилающей поверхности. Осуществлено математическое моделирование покрытия, позволяющего обеспечивать минимальное звукоотражение в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения.

Результаты расчетов показали, что с помощью неоднородных покрытий возможно существенно изменять дифракционную картину и достигать требуемое звукоотражение тел.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Honarvar F., Sinclair A. Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod. // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102. No. 1. P. 41–48.
2. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34–37.
3. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.
4. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
5. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.

6. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189–199.
7. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276–289.
8. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.
9. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270–281.
10. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Рассеяние цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 8. С. 97–113.
11. Толоконников Л. А., Белкин А. Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 4. С. 354–368.
12. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. № 1. С. 293–311.
13. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
15. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
16. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
17. Лопатин А. С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Вып. 1. С. 133–149. СПб.: Изд-во СПбГУ.
18. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошников В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

## REFERENCES

1. Honarvar, F. & Sinclair, A. 1997, “Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102, no. 1, pp. 41–48.
2. Kosarev, O. I. 2012, “Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating”, *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34–37, [in Russian].
3. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.

4. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265–274, [in Russian].
5. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, “The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no 2, pp. 164–169.
6. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, “Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733–742.
7. Tolokonnikov, L. A. 2018, “Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 276–289, [in Russian].
8. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, “Diffraction of Sound Waves at an Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating in the Vicinity of the Boundary of an Elastic Half-Space”, *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1641–1648.
9. Tolokonnikov, L. A. 2019, “Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 270–281, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021, “Scattering by a cylinder with a inhomogeneous coating of sound waves radiated linear source in a flat waveguide”, *Mathematical modelling*, vol. 33, no. 8, pp. 97–113, [in Russian].
11. Tolokonnikov, L. A. & Belkin A. E. 2020, “Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 354–368, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2022, “Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293–311, [in Russian].
13. Shenderov, E. L. 1972, “*Wave problems of underwater acoustics*”, Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
14. Nowacki, W. 1973, “*Teoria sprężystości*”, PWN, Warszawa.
15. Brekhovskikh, L. M. 1973, “*Waves in Layered Media*”, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
16. Ivanov, E. A. 1968, “*Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*”, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
17. Lopatin, A. S. 2005, “Annealing method”, *Stochastic optimization in computer science*, SPt.b. Gos. Univ., no. 1, pp. 133–149, [in Russian].
18. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, “*Spline function methods*”, Nauka, Moscow, 352 p., [in Russian].

Получено 26.08.2022

Принято в печать 14.09.2022