ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.1;539.4:624.07 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-194-206

Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов[1]

В. И. Горбачев

Горбачев Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vigorby@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается первая специальная краевая задача механики неоднородного деформируемого твердого тела, когда определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений с тензором деформаций, представляют собой нелинейный оператор от тензора деформаций. Вид определяющего оператора в неоднородном теле зависит от того в какой точке определяются напряжения. На границе тела, в каждой граничной точке, перемещения определяются как свертка произвольного постоянного симметричного тензора второго ранга с координатами этой точки. В нашем исследовании предполагается, что деформации, возникающие в теле от такого граничного воздействия, малы. Как следствие, среднее значение тензора деформаций в теле совпадает с постоянным тензором, определенным на границе, независимо от вида определяющих соотношений. Смещение точки внутри тела представляется в виде суммы двух членов. Первый член - это свертка граничного тензора с координатами точки, а второй член - неизвестная векторная функция (структурная функция), которая зависит от координат точки и граничного тензора. Эта функция равна нулю на границе тела. Для структурной функции в общем случае получено нелинейное операторное дифференциальное уравнение. Для решения этого уравнения применяется метод последовательных приближений и находятся приближенные выражения для структурных функций, а через них деформации и напряжения в каждой точке тела. Затем напряжения усредняют по объему тела и сравнивают со средними деформациями, т.е. определяют вид эффективных определяющих соотношений, выражающих средние напряжения через средние деформации. Подробно рассматривается случай неоднородной по толщине, бесконечной в плане плиты.

Ключевые слова: неоднородная среда, неупругие определяющие соотношения, эффективные определяющие соотношения, неоднородная по толщине плита.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
В. И. Горбачев. Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 194–206.

[1]Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 539.3:534.1;539.4:624.07 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-194-206

Effective defining relations of inelastic composites

V. I. Gorbachev

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vigorby@mail.ru

Abstract

In this paper we consider the first special boundary value problem in the mechanics of inhomogeneous deformable solids, when the defining relations connecting the stress tensor with the strain tensor are a nonlinear operator from the strain tensor. The type of the defining operator in an inhomogeneous body depends on at which point the stresses are determined. At the boundary of the body, at each boundary point, the displacements are defined as a convolution of an arbitrary constant symmetric tensor of rank 2 with the coordinates of this point. In our study, it is assumed that the deformations, arising in the body from such a boundary action are small. As a consequence, the average value of the strain tensor in the body coincides with the constant tensor defined at the boundary, independently of type of the defining relations. The displacement of a point inside the body is represented as a sum of two terms. The first term is the convolution of the boundary tensor with the point coordinates, and the second term is an unknown vector function (structural function) that depends on the coordinates of the point and the boundary tensor. This function is zero at the boundary of the body. A nonlinear operator differential equation is obtained for the structural function in the general case. To solve this equation, the method of successive approximations is applied and approximate expressions for the structural functions and, through them, the strains and stresses at each point of the body are found. Stresses are then averaged over the body volume and compared with average strains, i.e., the type of effective defining relations expressing average stresses through average strains is determined. The case of an inhomogeneous in thickness, infinite in plan, plate is considered in detail.

Keywords: inhomogeneous medium, inelastic defining relations, effective defining relations, inhomogeneous plate thickness.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
V. I. Gorbachev, 2022, “Effective defining relations of inelastic composites” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 194–206.

1. Введение

Пусть тело из композитного материала состоит из большого числа приблизительно одинаковых (представительных) разнородных объемов вещества. Под нагрузкой такое тело ведет себя как некоторое однородное тело, свойства которого отличаются от свойств элементов представительного объема. Свойства однородного тела называются эффективными свойствами. Напомним, что представительный объем - это такой минимальный объем вещества, теоретическое или экспериментальное исследование которого позволяет судить о свойствах композита как однородного тела. Для теоретического расчета эффективных свойств необходимо, чтобы внешние факторы (объемные и поверхностные силы, поверхностные смещения), действующие на тело, были такими, чтобы средние значения напряжений и деформаций в каждом представительном объеме совпадали со средними значениями во всем теле композита. Очевидно, что это возможно только при определенном типе нагружения тела. В работе [1] Хашин и Розен приводят два набора исходных данных, при которых эти условия выполняются. В обоих случаях объемные нагрузки отсутствуют. В первом случае смещения граничных точек специальной формы заданы на всей границе тела. В результате необходимо решить первую специальную краевую задачу (СКЗ). Из этого решения следуют определяющие соотношения, позволяющие выразить средние объемные напряжения тела через средние деформации (прямые определяющие соотношения). Во втором случае на всей границе тела задается распределенная нагрузка специального вида, и решается вторая специальная краевая задача. Это решение позволяет получить определяющие соотношения, выражающие средние деформации через средние напряжения (обратные определяющие соотношения). Следует отметить, что в общем случае неоднородности первая и вторая СКЗ не дают взаимно обратных определяющих соотношений. Однако, если тело периодически неоднородно, то при дроблении структуры эффективные определяющие соотношения стремятся к взаимно обратным соотношениям [2].

2. Постановка задачи об эффективных свойствах типа $<\underset{\sim}{\sigma}>\sim<\underset{\sim}{\varepsilon}>$

Угловые скобки здесь и в дальнейшем обозначают среднее значение функции в области определения. Пусть неоднородное тело, занимающее объем V, ограничено поверхностью Σ. Тело находится в равновесии под действием распределенных перемещений, заданных на его поверхности. Отнесём тело к декартовым координатам. Будем рассматривать случай малых деформаций. В этом случае напряженно-деформированное состояние тела описывается следующими уравнениями:

$$\sigma_{ij,j}=0\,,\quad \sigma_{ij}=\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})\,,\quad \varepsilon_{kl}=\Delta_{klmn}u_{m,n}\,,\quad (x\in \text{в}V). \tag{1}$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij}, u_i — компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и вектора перемещений. $\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})$ обозначают компоненты оператора прямых определяющих соотношений [3, стр. 65]. В этой записи первый аргумент $x\equiv(x_1,x_2,x_3)$ обозначает то, что определяющие соотношения явно зависят от координат, второй аргумент — тензор деформаций (помечен волной снизу). Галочка сверху обозначает оператор по времени. Определяющие операторы, в общем случае, нелинейно зависят от компонент тензора деформаций. Пусть на всей границе тела заданы перемещения специального вида [1]

$$u_i|_\Sigma=\gamma_{ij}y_j\,,\qquad y\in\Sigma\,,\qquad \gamma_{ij}=\gamma_{ji}=\text{const}. \tag{2}$$

Задача (1), (2) называется первой специальной краевой задачей, из решения которой находятся прямые эффективные определяющие соотношения неоднородного тела, представляющие средние напряжения через средние деформации. Легко показать, что в случае первой СКЗ, при малых деформациях $<\varepsilon_{ij}>=\gamma_{ij}$.

Решим далее первую СКЗ, найдем перемещения $u_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$, деформации $\varepsilon_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma})$, напряжения $\sigma_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})$ и усредним напряжения по объему:

$$<\sigma_{ij}>=\frac{1}{V}\int\limits_V \check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma}))dV=\check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma})=\check{F}^{eff}_{ij}(\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle)\,. \tag{3}$$

Операторы $\check{F}^{eff}_{ij}$ — компоненты тензора-оператора второго ранга $\underset{\sim}{\check{F}}^{eff}$, называемого эффективным оператором, а соотношения (3), позволяющие выразить средние по объему напряжения через средние по объему деформации, называются эффективными определяющими соотношениями типа $<\underset{\sim}{\sigma}>\sim<\underset{\sim}{\varepsilon}>$ (прямые эффективные определяющие соотношения).

Сложность решения первой СКЗ существенно зависит от типа исходных определяющих соотношений. Относительно просто решается первая СКЗ для линейно-упругого неоднородного тела, когда

$$\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}\,, \tag{4}$$

где $C_{ijkl}(x)$ — компоненты тензора модулей упругости анизотропного и неоднородного материала тела.

Определяющие соотношения для линейного вязкоупругого неоднородного материала имеют вид:

$$\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,t)) = \int\limits_0^t \Gamma_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(t) - \int\limits_0^t \Gamma^*_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где $\Gamma_{ijkl}(x,t,\tau)$ — сингулярные, а $\Gamma^*_{ijkl}(x,t,\tau)$ — регулярные ядра релаксации. Для нестареющих материалов определяющие соотношения записываются в виде интегралов Стилтьеса [3, стр. 79], [7, стр. 17]

$$\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \int\limits_0^t R_{ijkl}(x,t-\tau)d\varepsilon_{kl}(\tau) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(t) - \int\limits_0^t \Gamma^*_{ijkl}(x,t-\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau\,, \tag{6}$$

где $R_{ijkl}(x,t)$ — компоненты тензора функций ползучести неоднородного вязкоупругого материала, который в начальный момент нагружения $t=0$ ведёт себя как упругий материал с компонентами тензора модулей упругости

$$C_{ijkl}(x) = R_{ijkl}(x,0)\,, \qquad \Gamma^*_{ijkl}(x,t-\tau) = -\frac{\partial R_{ijkl}(x,t-\tau)}{\partial(t-\tau)}\,.$$

Нелинейных определяющих соотношений для вязкоупругих материалов существует гораздо большее количество. Многие из этих соотношений разобраны в работах [3, 4, 5, 6].

В случае теории малых упруго-пластических деформаций (ТМУПД) [8]

$$\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - C_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})\,, \tag{7}$$

где $C_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})$ — компоненты тензора второго ранга, нелинейно зависящие от компонент тензора деформаций. В частности, для пластически несжимаемого изотропного материала

$$C_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = 2\mu(x)\omega(x,\varepsilon_u)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,, \tag{8}$$

где $\mu(x)$ — упругий модуль сдвига, $\varepsilon_u = \sqrt{2D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}/3}$ — интенсивность деформаций, $D_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})/2 - \delta_{ij}\delta_{kl}/3\,,\quad \omega(x,\varepsilon_u) = 1-\sigma_u(x,\varepsilon_u)/(3\mu\varepsilon_u)$ — функция пластичности Ильюшина [9]. Здесь $\sigma_u(x,\varepsilon_u)$ — интенсивность напряжений $\sigma_u = \sqrt{3D_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}/2}$. Функция пластичности — это характеристика материала, определяемая из эксперимента на простое растяжение.

В дальнейшем ограничимся определяющими соотношениями, которые могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})\,, \tag{9}$$

где

$$\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) \equiv 0\,, \qquad \text{— линейная упругость}$$

$$\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \int\limits_0^t \Gamma^*_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(x,\tau)d\tau\,, \qquad \text{— линейная вязкоупругость}$$

$$\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = 2\mu(x)\omega(x,\varepsilon_u)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,, \qquad \text{— ТМУПД}$$

3. Случай линейно-упругого неоднородного тела.

Решение краевой задачи (1), (2) при линейном упругом определяющем операторе (4) будем искать в виде:

$$u_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + N_{ikl}(x)\gamma_{kl}\,, \tag{10}$$

где $N_{ikl}(x)$ — непрерывные функции, симметричные по двум последним индексам (искомые структурные функции). По перемещениям находим деформации, а потом напряжения:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n}\gamma_{kl}\,, \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\gamma_{kl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\gamma_{kl}\,,\\ \sigma_{ij,j} = (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j}\gamma_{kl} = 0\,.\end{gathered} \tag{11}$$

Из уравнения равновесия (1), граничных условий (2) и из произвольности γ_{kl} следуют уравнения и граничные условия для N_{ikl}-функций

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j} = 0; \qquad N_{mkl}|_{\Sigma} = 0. \tag{12}$$

Усредняя напряжения по объему тела и учитывая, что $\gamma_{kl} =< \varepsilon_{kl} >$, получаем выражения для эффективных модулей упругости через N_{ikl}-функции:

$$\begin{gathered}\big\langle\sigma_{ij}\big\rangle = \Big\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\Big\rangle\gamma_{kl} = \Big\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\Big\rangle\big\langle\varepsilon_{kl}\big\rangle \;\;\Rightarrow\\ \big\langle\sigma_{ij}\big\rangle = h_{ijkl}\big\langle\varepsilon_{kl}\big\rangle\,, \qquad h_{ijkl} = \big\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\big\rangle.\end{gathered} \tag{13}$$

Довольно просто можно показать, что эффективные модули упругости, получаемые по формуле (13) из решения краевой задачи (12) удовлетворяют всем условиям симметрии и положительной определенности [11]:

$$h_{ijkl} = h_{jikl} = h_{jilk} = h_{klij}\,; \qquad h_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} > m\varkappa_{ij}\varkappa_{ij}\,,\; m > 0\,, \forall\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji} \neq 0\,.$$

4. Случай неупругих операторных определяющих соотношений.

Рассмотрим далее случай более общих определяющих соотношений (9). Решение первой СКЗ по аналогии с упругим решением будем искать в следующем виде:

$$u_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \tag{14}$$

где $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$ — непрерывные по координатам нелинейные операторы (искомые структурные операторы). В вязкоупругом случае $\check{N}_i$ являются операторами по времени, принимающие нулевые значения на границе тела: $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0$. Далее находим деформации:

$$\varepsilon_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}). \tag{15}$$

По формуле (9) определим напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) &= C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\big[\gamma_{kl} + \Delta_{klmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}\big] - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \\ &= C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,,\end{aligned} \tag{16}$$

где, для сокращения записи, введены новые операторы

$$\check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})) \equiv C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\,. \tag{17}$$

Подстановка напряжений (16) в уравнения равновесия (1) приводит к нелинейной краевой задаче для операторов $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$:

$$\begin{aligned}&\Big[\check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} = 0\,; \\ &\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Решив задачу (18) находим $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$. После этого усредняем напряжения (16) по объему тела и находим эффективные определяющие соотношения неупругого неоднородного тела:

$$\big\langle\sigma_{ij}\big\rangle = \check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \Big\langle\check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big\rangle = \check{F}^{eff}_{ij}(\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle)\,. \tag{19}$$

4.1. Метод последовательных приближений для решения операторных уравнений.

Формула (16) для компонент тензора напряжений состоит из линейных и нелинейных слагаемых. Это обстоятельство позволяет, для конкретных вычислений, организовать метод последовательных приближений, положив

$$\begin{aligned}&\sigma^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}^{\{s\}}_{ij} + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ &\check{\Phi}^{\{s\}}_{ij} = C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\,, \qquad s = 0,1,2,\ldots\end{aligned} \tag{20}$$

При этом полагаем, что $\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s\}}(x,\underset{\sim}{\gamma})) \equiv 0$ при $s < 0$. Тогда нелинейные дифференциальные уравнения (18) можем записать в виде системы рекуррентных линейных дифференциальных уравнений в частых производных:

$$\begin{cases}\Big[\check{\Phi}^{\{s\}}_{ij} + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} = 0\,, \\ \check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,, \qquad s = 0,1,2,\ldots\end{cases} \tag{21}$$

После решения задачи (21) по найденным $\check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$ определяем перемещения, деформации и напряжения по формулам:

$$\begin{cases}u^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ \varepsilon^{\{s\}}_{ij} = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,; \\ \sigma^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \qquad s = 0,1,2,\ldots\end{cases} \tag{22}$$

Уравнения (21) для $\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})$ можно переписать в виде уравнений линейной упругости для неоднородного тела с заданной фиктивной объёмной нагрузкой

$$\left\{\begin{array}{ll} \Big[C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}\Big]_{,j} + \check{X}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = 0\,, \qquad \check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,, & \\ \check{X}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}^{\{s\}}_{ij,j} = \Big[C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\Big]_{,j}\,, & s = 0,1,2,\ldots \end{array}\right. \tag{23}$$

Начало рекурсии соответствует случаю $s = 0$. В этом случае $\check{X}^{\{0\}}_i = \check{\Phi}^{\{0\}}_{ij,j} = C_{ijkl,j}(x)\gamma_{kl}$. Тогда из (23) получаем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных для функции $N^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$

$$\Big[C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{0\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} = 0\,, \quad \check{N}^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,. \tag{24}$$

Из краевой задачи (24) видно, что $\check{N}^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$ на самом деле является функцией координат линейно зависящей от произвольного симметричного постоянного тензора второго ранга $\underset{\sim}{\gamma}$, то есть $\boldsymbol{\check{N}^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma}) \equiv N^{\{0\}}_{mkl}(x)\gamma_{kl}}$. Следовательно, получаем начальную задачу полностью тождественную задаче (12)

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N^{\{0\}}_{mkl,n})_{,j} = 0; \qquad N^{\{0\}}_{mkl}|_{\Sigma} = 0\,, \tag{25}$$

и находим функции $N^{\{0\}}_{mkl}(x)$. По формулам (22) вычисляем $u^{\{0\}}_i$, $\varepsilon^{\{0\}}_{ij}$ и $\sigma^{\{0\}}_{ij}$

$$\begin{gathered} u^{\{0\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}^{\{0\}}_{ikl}(x)\gamma_{kl}\,, \qquad \varepsilon^{\{0\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}N^{\{0\}}_{mkl,n}(x)\gamma_{kl}\,, \\ \sigma^{\{0\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \Big[C_{ijkl}(x) + C_{ijmn}(x)N^{\{0\}}_{mkl,n}(x)\Big]\gamma_{kl}\,. \end{gathered} \tag{26}$$

После этого деформацию $\varepsilon^{\{0\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma})$ подставляем в заданный нелинейный оператор $\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}})$ при $s = 1$. В итоге получаем вполне определенное выражение $\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))$, соответственно по формуле (23) находим фиктивную объёмную нагрузку $\check{X}^{\{1\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) =$ $= \big[C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\big]_{,j}$. Далее переходим к вычислению первого приближения по формулам (21), или же (23), при $s = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \Big[C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{1\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} + \check{X}^{\{1\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = 0\,, \\ \check{N}^{\{1\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,. \end{array}\right. \tag{27}$$

Оператор-функция $\check{N}^{\{1\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$ находится из системы линейных дифференциальных уравнений неоднородной теории упругости (27) с заданными "объёмными нагрузками" и однородными граничными условиями. В отличие от нулевого приближения функция $\check{N}^{\{1\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$, и все последующие функции при $s > 1$, в общем случае, являются операторами по времени и нелинейно зависят от $\underset{\sim}{\gamma}$.

Эффективные определяющие соотношения в s-м приближении находятся по формуле (19)

$$\begin{aligned} \check{F}^{eff\{s\}}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \langle \sigma^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) \rangle = \left\langle \check{\Phi}^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x) N^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}) \right\rangle = \\ = \left\langle C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijmn}(x) N^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}) \right\rangle . \end{aligned} \tag{28}$$

В частности, в нулевом приближении, то есть при $s = 0$, из (28) следует формула для эффективных модулей упругости (13).

5. Неоднородная по толщине, бесконечная в плане плита.

Пусть h — толщина плиты, а $-h/2 \leqslant x_3 \leqslant h/2$, $-\infty < x_I < +\infty$, $I = 1,2$. В этом случае определяющие соотношения будут явно зависеть от координаты x_3, и от деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})$):

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x_3)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}). \tag{29}$$

В случае неограниченной в плане плиты предполагается, что искомые операторы $\check{N}_i$ также зависят только от координаты x_3 и находятся из решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, вытекающих из трехмерных уравнений (14)-(18):

$$\begin{cases} u_i(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}_i(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ \varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijm3}\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ \sigma_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijm3}(x_3)\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ \Big[\check{\Phi}_{i3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) + C_{i3m3}(x_3)\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\Big]' = 0\,, \\ \check{N}_i|_{x_3=-h/2} = \check{N}_i|_{x_3=h/2} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Здесь штрих обозначает производную по координате x_3, а

$$\check{\Phi}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})) \equiv C_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}))\,. \tag{31}$$

Из четвертого уравнения (30) следует, что выражение в квадратной скобке является постоянной величиной независящей от координаты, то есть

$$C_{i3m3}(x_3)\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) + \check{\Phi}_{i3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{K}_i = \mathrm{const}.$$

Отсюда выразим функцию $\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$. Учтём то, что $\big\langle \check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big\rangle = 0$ и найдем константы $\check{K}_i$

$$\check{K}_i = \left\langle C^{-1}_{i3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{p3q3} \right\rangle \left\langle C^{-1}_{q3r3}\check{\Phi}_{r3} \right\rangle .$$

В результате для $\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})$ получим следующее выражение:

$$\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = C^{-1}_{m3n3}\left\langle C^{-1}_{n3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3} \right\rangle - C^{-1}_{m3n3}\check{\Phi}_{n3}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}))\,. \tag{32}$$

Здесь и ниже, в отличие от общего случая, угловые скобки означают среднее значение по толщине плиты

$$\langle f \rangle = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x_3)dx_3 \equiv \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(y)dy\,.$$

5.1. Интегральное уравнение для деформаций в плите.

Подставим найденное выражение для $\check{N}'$ в формулу (30) для деформаций и получим следующую формулу:

$$\varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\right\rangle - \check{\Phi}_{n3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right]. \qquad (33)$$

Это выражение представляет собой сложнейшее нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода [11, стр. 77], [12], из решения которого находятся компоненты тензора деформаций. Удобно представить уравнение (33) следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\,, \qquad (34)$$

где

$$K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3) \equiv \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\right\rangle - C_{n3kl}(x_3)\right], \qquad (35)$$

$$\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big) \equiv \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}\right\rangle - \check{C}_{n3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right]. \qquad (36)$$

Коэффициенты $K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)$ представляют собой *компоненты тензора концентрации упругих деформаций* [13], вызванных неоднородностью материала. Другие коэффициенты $\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$ отражают влияние на концентрацию деформаций нелинейных операторных добавок в определяющих соотношениях. Отметим, что

$$\left\langle K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\right\rangle = \Delta_{ijkl}\,, \qquad \left\langle \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right\rangle = 0\,.$$

5.2. Метод последовательных приближений для вычисления деформаций.

Для практических расчетов эффективных определяющих соотношений необходимо знать распределение деформаций $\varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})$ по толщине плиты, а для этого нужно решить нелинейное интегральное уравнение для компонент тензора деформаций. Это уравнение записано в двух эквивалентных формах: (33) и (34). Воспользуемся второй формой интегрального уравнения и применим для его решения метод последовательных приближений [11, 12, 14, 15]. Запишем уравнение (34) следующим образом:

$$\varepsilon^{\{s\}}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\,, \qquad s = 0,1,2,\dots\,,$$

$$\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}})\big) = \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} C^{-1}_{p3q3}(y)\check{C}_{q3}\big(y,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(y,\underset{\sim}{\gamma})\big)dy - \right. \qquad (37)$$

$$\left. -\check{C}_{n3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right].$$

В качестве нулевого приближения выбираем $\varepsilon^{\{0\}}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl}$. Тогда

$$\varepsilon^{\{1\}}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\,, \qquad s = 0,1,2,\dots\,, \qquad (38)$$

где $\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$ — вполне определенная величина (36) при заданном виде неупругих операторов $\check{C}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$

5.3. Вычисление структурных функций.

Структурные функции $N_m(x_3, \underset{\sim}{\gamma})$ находятся *по известным деформациям* в результате интегрирования второй из формул (30)

$$\check{N}_m(x_3, \underset{\sim}{\gamma}) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} C^{-1}_{m3n3}(y)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\right\rangle - \check{\Phi}_{n3}\big(y, \underset{\sim}{\varepsilon}(y, \underset{\sim}{\gamma})\big)\right]dy\,. \tag{39}$$

Очевидно, что функции $\check{N}_m(x_3, \underset{\sim}{\gamma})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям (четвертая и пятая строки формул (30)).

5.4. Формулы для напряжений в неоднородной плите.

Далее по третьей из формул (30) найдем напряжения, для чего воспользуемся формулой (32) и получим следующее выражение:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma})) = \check{\Phi}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\right\rangle - \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\check{\Phi}_{n3}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}))\,.\end{gathered} \tag{40}$$

Подставив сюда $\check{\Phi}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon})$ из (31), получим другое, эквивалентное, представление для напряжений

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma})) = \tilde{C}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \tilde{\check{C}}_{ij}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big)\,, \tag{41}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{ijkl}(x_3) \equiv C_{ijkl}(x_3) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\right\rangle - \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)C_{n3kl}(x_3)\,;\end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\check{C}}_{ij}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big) \equiv \check{C}_{ij}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}\right\rangle - \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\check{C}_{n3}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big)\,.\end{gathered} \tag{43}$$

5.5. Эффективные определяющие соотношения.

Усредним теперь напряжения, представленные формулами (40), по толщине плиты и получим аналитическую формулу для эффективных определяющих соотношений неупругой неоднородной по толщине плиты

$$\begin{gathered}\left\langle\sigma_{ij}\right\rangle = \left\langle \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}))\right\rangle \equiv \check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \\ = \left\langle\check{\Phi}_{ij}\right\rangle + \left\langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\right\rangle - \left\langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\check{\Phi}_{n3}\right\rangle.\end{gathered} \tag{44}$$

При осреднении выражений (41) получим эффективные определяющие соотношения, записанные в другой форме

$$\left\langle\sigma_{ij}\right\rangle = \check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = h_{ijkl}\gamma_{kl} - \check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma})\,, \tag{45}$$

где h_{ijkl} — компоненты эффективного тензора упругости, а $\check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma})$ — неупругие составляющие эффективных определяющих соотношений неоднородной плиты:

$$h_{ijkl} = \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle = \langle C_{ijkl} \rangle + \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3} \rangle \langle C^{-1}_{n3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3kl} \rangle - \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3} C_{n3kl} \rangle, \qquad (46)$$

$$\check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \left\langle \tilde{\check{C}}_{ij} \right\rangle = \left\langle \check{C}_{ij} \right\rangle + \left\langle C_{ijm3} C^{-1}_{i3n3} \right\rangle \left\langle C^{-1}_{n3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{p3q3} \check{C}_{q3} \right\rangle - \left\langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3} \check{C}_{n3} \right\rangle. \qquad (47)$$

6. Заключение

Рассмотрена первая специальная краевая задача механики деформируемого твердого тела, из решения которой вытекают эффективные определяющие соотношения вида $< \sigma > \sim < \varepsilon >$. Задача сводится к серии вспомогательных краевых задач для структурных функций, зависящих от формы тела и вида определяющих соотношений. В случае неоднородной по толщине бесконечной в плане плиты задача вычисления эффективных определяющих соотношений сводится к операторному уравнению для компонент тензора деформаций. Для решения этого уравнения также предлагается итерационный метод последовательных приближений. Получена приближенная аналитическая формула, позволяющая достаточно просто находить эффективные определяющие соотношения неоднородной по толщине плиты из неупругого материала. Приближенная формула отражает характер структурной анизотропии материала плиты и, в упругом случае, дает точные значения эффективных модулей упругости.

Эффективные определяющие соотношения для композитного материала с периодической структурой следуют из приведенных выше формул как частный случай. Это возможно, если заменить средние значения по объему тела на средние значения по любому из периодов. При этом, прямые эффективные характеристики не зависят от объема всего тела, а зависят только от формы ячейки периодичности, а также от расположения и формы компонентов и их объемных долей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials// Перев. Прикл. мех., серия E (США), №2, 1964, с. 223–232.

2. Горбачев В. И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости. Диссертация доктора физико-математических наук// PhD thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 1991. 395 с.

3. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов// М.: МГУ, 1984. 336 с.

4. Ильюшин А. А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости// М.: Наука, 1970. 280 с.

5. Победря Б.Е. Математическая теория нелинейной вязкоупругости// Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 417-428.

6. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов// М.: Наука, 1970. 328 с.

7. Кристенсен Р. Введнение в теорию вязкоупругости// М.: Мир, 1974. 338 с.

8. Ильюшин А. А. Пластичность// М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

9. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории// М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

10. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненние процессов в периодических среда// М.: Наука, 1984, 352 с.

11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа// М.: Наука, 1972. 496 с.

12. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения// М.: Наука, 1968. 448 с.

13. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений// М.: Наука, 1969. 456 с.

14. Победря Б. Е., Горбачев В. И. Концентрация напряжений и деформаций в композитах// Механика композитных материалов. — 1984. — № 2. — С. 207—214.

15. Обен Ж. П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. Перевод с английского// М.: Мир, 1977. 384 с.

REFERENCES

1. Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials// Transl. Applied Mechanics, Series E (USA), No. 2, 1964, pp. 223–232.

2. Gorbachev V. I. Variant metoda osredneniya dlya resheniya kraevyh zadach neodnorodnoj uprugosti. Dissertaciya doktora fiziko-matematicheskih nauk// PhD thesis, MGU im. M.V. Lomonosova, Mekhaniko-matematicheskij fakul'tet, 1991. 395 s.

3. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov// M.: MGU, 1984. 336 s.

4. Il'yushin A. A., Pobedrya B.E. Osnovy matematicheskoj teorii termovyazkouprugosti// M.: Nauka, 1970. 280 c.

5. Pobedrya B.E. Matematicheskaya teoriya nelinejnoj vyazkouprugosti// Uprugost' i neuprugost'. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1973. Vyp. 3. S. 417-428.

6. Moskvitin V.V. Soprotivlenie vyazkouprugih materialov// M.: Nauka, 1970. 328 s.

7. Kristensen R. Vvednenie v teoriyu vyazkouprugosti// M.: Mir, 1974. 338 s.

8. Il'yushin A. A. Plastichnost'// M.: Gostekhizdat, 1948. 376 c.

9. Il'yushin A. A. Plastichnost'. Osnovy obshchej matematicheskoj teorii// M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. 272 c.

10. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednennie processov v periodicheskih sreda// M.: Nauka, 1984, 352 s.

11. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza// M.: Nauka, 1972. 496 s.

12. Zabrejko P. P., Koshelev A. I., Krasnosel'skij M. A., Mihlin S. G., Rakovshchik L. S., Stecenko V. YA. Integral'nye uravneniya// M.: Nauka, 1968. 448 s.

13. Krasnosel'skij M. A., Vajnikko G. M., Zabrejko P. P., Rutickij YA. B., Stecenko V. YA. Priblizhennoe reshenie operatornyh uravnenij// M.: Nauka, 1969. 456 s.

14. Pobedrya B. E., Gorbachev V. I. Koncentraciya napryazhenij i deformacij v kompozitah// Mekhanika kompozitnyh materialov. — 1984. — № 2. — S. 207—214.

15. Oben ZH. P. Priblizhennoe reshenie ellipticheskih kraevyh zadach. Perevod s anglijskogo// M.: Mir, 1977. 384 s.

Получено 4.06.2022
Принято в печать 14.09.2022