

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.815.1+512.815.6

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-169-177

Топологические и гомологические свойства пространства орбит простой трёхмерной компактной линейной группы Ли

О. Г. Стырт

Стырт Олег Григорьевич — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (г. Москва).*e-mail: oleg_styrt@mail.ru***Аннотация**

Работа посвящена вопросу о том, является ли пространство орбит компактной линейной группы топологическим многообразием и гомологическим многообразием. В данной работе рассмотрен случай простой трёхмерной группы. Получена верхняя оценка для суммы целых частей половин размерностей неприводимых компонент представления, фактор которого является гомологическим многообразием, что усиливает прежний результат, дающий ту же оценку в случае, если фактор представления является гладким многообразием. Большинство представлений, удовлетворяющих данной оценке, также разобраны ранее. В рассуждениях использованы стандартные соображения линейной алгебры, теории групп и алгебр Ли и их представлений.

Ключевые слова: группа Ли, линейное представление группы, топологический фактор действия, топологическое многообразие, гомологическое многообразие.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

О. Г. Стырт. Топологические и гомологические свойства пространства орбит простой трёхмерной компактной линейной группы Ли // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 169–177.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 512.815.1+512.815.6

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-169-177

Topological and homological properties of the orbit space of a simple three-dimensional compact linear Lie group

O. G. Styrt

Styrt Oleg Grigorievich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).*e-mail: oleg_styrt@mail.ru***Abstract**

The article is devoted to the question whether the orbit space of a compact linear group is a topological manifold and a homological manifold. In the paper, the case of a simple three-dimensional group is considered. An upper bound is obtained for the sum of the half-dimension integral parts of the irreducible components of a representation whose quotient space is a homological manifold, that enhances an earlier result giving the same bound if the quotient space of a representation is a smooth manifold. The most of the representations satisfying this bound are also researched before. In the proofs, standard arguments from linear algebra, theory of Lie groups and algebras and their representations are used.

Keywords: Lie group, linear representation of a group, topological quotient space of an action, topological manifold, homological manifold.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

O. G. Styrt, 2022, “Topological and homological properties of the orbit space of a simple three-dimensional compact linear Lie group”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 169–177.

1. Введение

Рассмотрим точное линейное представление компактной группы Ли G в вещественном векторном пространстве V . Требуется выяснить, является ли топологический фактор V/G этого действия топологическим многообразием, а также является ли он гомологическим многообразием. Далее для краткости будем называть топологическое многообразие просто «многообразие».

Без ограничения общности можно считать, что V — евклидово пространство, G — подгруппа Ли группы $\mathbf{O}(V)$, а представление $G: V$ тавтологическое.

Исследования по данной тематике проводились в работах [1, 2] для конечных групп. Кроме того, в работах автора [3, 4, 5, 6] изучаются как топологические, так и дифференциально-геометрические свойства фактора для различных классов групп: для групп с коммутативной связной компонентой [3] и для простых групп классического типа [4, 5, 6]. В работах автора [7, 8, 9] также рассматриваются группы с коммутативной связной компонентой и усиливается «топологическая» часть результатов работы [3]. Настоящая же работа служит аналогичным усилением результатов работы [4] для простых трёхмерных групп.

Через G^0 будем обозначать связную компоненту единицы группы G , а через $\mathfrak{g}$ — её касательную алгебру.

Допустим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$ — что равносильно, группа G^0 изоморфна одной из групп SU_2 и SO_3 .

Пусть $n_1, \dots, n_L$ — размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V$ с учётом кратностей и в порядке убывания. Поскольку представление $G: V$ точное, имеем

$$n_1 \mathbf{w} \geq \dots \mathbf{w} \geq n_l > 1 = n_{l+1} = \dots = n_L,$$

где $l \in \{1, \dots, N\}$. Обозначим через $q(V)$ число $\sum_{i=1}^L \mathbf{0} \frac{n_i}{2} = \sum_{i=1}^l \mathbf{0} \frac{n_i}{2} \in \mathbb{N}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G — гомологическое многообразие, то $q(V) \leq 4$.*

2. Основной текст статьи

2.1. Обозначения и вспомогательные факты

В этом параграфе приведён ряд вспомогательных обозначений и утверждений, в том числе заимствованных из процитированных работ (все новые утверждения — с доказательствами).

ЛЕММА 1. Пусть X — топологическое пространство, а n — натуральное число.

1. Если X — односвязная гомологическая n сфера, то $X \cong S^n$.
2. Конус над пространством X является гомологическим $(n + 1)$ многообразием тогда и только тогда, когда X — гомологическая n сфера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему 2.3 и лемму 2.6 в [2, § 2]. $\square$

Традиционно будем обозначать через $\mathbb{T}$ группу Ли $\mathfrak{sl} \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1$ по умножению.

Допустим, что имеется евклидово пространство V и компактная группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ с касательной алгеброй $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(V)$. Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Подпространства $\mathfrak{g}v$ и $N_v := (\mathfrak{g}v)^\perp$ пространства V инвариантны относительно стабилизатора G_v вектора v . Стабилизаторная подалгебра $\mathfrak{g}_v$ вектора v совпадает с $\text{Lie } G_v$. Положим $M_v := N_v \cap (N_v^{G_v})^\perp \subset N_v$. Ясно, что $N_v = N_v^{G_v} \oplus M_v \subset V$ и $G_v M_v = M_v$.

Утверждение 1. В любом G^0 инвариантном подпространстве $V' \subset V$ существует вектор v , для которого $M_v \subset (V')^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. утверждение 2.2 в [3, § 2]. $\square$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v \in V$ — некоторый вектор. Если V/G — гомологическое многообразие, то N_v/G_v и M_v/G_v — гомологические многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему 4 и следствие 5 в [8]. $\square$

Определение 1. Линейный оператор в пространстве над некоторым полем называется отражением (соотв. псевдоотражением), если подпространство его неподвижных точек имеет коразмерность 1 (соотв. 2).

Определение 2. Пусть K — группа Ли $\mathfrak{sv} \in \mathbb{H}: \|v\| = 1$ по умножению, а $\Gamma \subset K$ — прообраз группы вращений додекаэдра при накрывающем гомоморфизме $K \rightarrow \mathbf{SO}_3$. Группой Пуанкаре называется линейная группа, полученная ограничением действия $K: \mathbb{H}$ левыми сдвигами на подгруппу $\Gamma \subset K$.

ТЕОРЕМА 3. Если группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ конечна, а V/G — гомологическое многообразие, то имеются разложения $G = G_0 \times G_1 \mathbf{w} \times \dots \mathbf{w} \times G_k$ и $V = V_0 \oplus V_1 \mathbf{w} \oplus \dots \mathbf{w} \oplus V_k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), такие что

- подпространства $V_0, V_1, \dots, V_k \subset V$ попарно ортогональны и G инвариантны;
- для любых $i, j = 0, \dots, k$ линейная группа $(G_i)|_{V_j} \subset \mathbf{O}(V_j)$ тривиальна при $i \neq j$, порождена псевдоотражениями при $i = j = 0$ и изоморфна группе Пуанкаре при $i = j > 0$ (в частности, $\dim V_j = 4$ для всякого $j = 1, \dots, k$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. предложение 3.13 в [2, § 3]. $\square$

На пространстве $\mathfrak{g}$ имеется $\text{Ad}(G)$ инвариантное скалярное умножение, с помощью которого мы в дальнейшем будем отождествлять пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Если $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ — одномерная подалгебра, а $V' \subset V$ — подпространство, то $\mathfrak{g}'V' \subset V$ — подпространство размерности не более $\dim V'$.

Напомним определения q устойчивых ($q \in \mathbb{N}$) и неразложимых множеств векторов конечномерных пространств над полями [3, § 1], необходимые и в данной работе.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты будем называть его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди указанных линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовём *собственным*. Будем говорить, что множество

векторов *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты. Всякое множество векторов разлагается на неразложимые компоненты единственным образом (с точностью до распределения нулевого вектора), причём для любого его разложения на компоненты каждая компонента является объединением некоторых его неразложимых компонент (вновь с точностью до нулевого вектора).

Определение 3. *Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учётом кратностей своих элементов, назовём q устойчивым ($q \in \mathbb{N}$), если его линейная оболочка сохраняется при удалении из него любых векторов в количестве не более q (с учётом кратностей).*

Для произвольного конечного множества P векторов в конечномерном пространстве над некоторым полем, рассматриваемого с учётом кратностей своих элементов, количество ненулевых векторов множества P (с учётом кратностей) будем обозначать через $\|P\|$.

Предположим, что группа G^0 коммутативна, т. е. является тором.

Любое неприводимое представление группы G^0 одномерно либо двумерно. Напомним введённое в [3, § 1] понятие веса её неприводимого представления.

Произвольное двумерное неприводимое представление группы G^0 обладает G^0 инвариантной комплексной структурой, и мы можем рассматривать его как одномерное комплексное представление группы G^0 , сопоставив ему естественным образом вес — гомоморфизм групп Ли $\lambda: G^0 \rightarrow \mathbb{T}$ — и отождествив последний с его дифференциалом — вектором $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Одномерному представлению группы G^0 сопоставим вес $\lambda := 0 \in \mathfrak{g}^*$.

Классы изоморфных неприводимых представлений группы G^0 характеризуются весами $\lambda \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, определёнными с точностью до умножения на (-1) .

Пусть $P \subset \mathfrak{g}$ — множество весов $\lambda \in \mathfrak{g}$, соответствующее разложению представления $G^0: V$ в прямую сумму неприводимых (с учётом кратностей). Множество $P \subset \mathfrak{g}$ не зависит от выбора указанного разложения (с точностью до умножения весов на (-1)). Поскольку представление $G: V$ точное, имеем $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$.

ТЕОРЕМА 4 (см. [9, теорема 4]). *Допустим, что V/G — гомологическое многообразие, а $P \subset \mathfrak{g}$ — 2 устойчивое множество. Тогда представление $G: V$ есть прямое произведение представлений $G_l: V_l$ ($l = 0, \dots, p$), таких что*

1. *для любого $l = 0, \dots, p$ фактор V_l/G_l является гомологическим многообразием;*
2. $|G_0| < \infty$;
3. *для любого $l = 1, \dots, p$ группа G_l бесконечна, а множество весов представления $G_l: V_l$ неразложимо, 2 устойчиво и не содержит нулей.*

ТЕОРЕМА 5. *Допустим, что $\dim G = 1$, а множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 2 устойчивым и не содержит нулей. Если V/G — гомологическое многообразие, то $\|P\| = 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $0 \notin P$, пространство V обладает G^0 инвариантной комплексной структурой. Если группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ не содержит комплексных отражений, то утверждение вытекает из теоремы 6 работы [9]. Произвольный же случай можно свести (см. [3, §§ 3, 7]) к случаю представления одномерной группы без комплексных отражений, множество весов которого получается из P умножением всех весов на ненулевые скаляры. $\square$

Следствие 1. *Допустим, что $\dim G = 1$, а $P \subset \mathfrak{g}$ — 2 устойчивое множество. Если V/G — гомологическое многообразие, то $\|P\| = 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из теорем 4 и 5. $\square$

Следствие 2. Если $\dim G = 1$, а V/G — гомологическое многообразие, то $\|P\| \mathbf{w} \leq 3$ (что равносильно, $\dim(\mathfrak{g}V) \leq 6$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\|P\| > 3$. Тогда $P \subset \mathfrak{g} - 2$ устойчивое множество. Согласно следствию 1, $\|P\| = 3$. Получили противоречие. $\square$

2.2. Доказательства результатов

Данный параграф посвящён доказательству теоремы 1.

На протяжении дальнейшей части работы будем считать, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, т.е. что группа G^0 изоморфна SU_2 либо SO_3 . Положим $V_0 := V^{G^0} \subset V$. В обозначениях и соглашениях § 1, $L - l\mathbf{w} = \dim V_0$, $V_0 \neq V$, а числа $n_1, \dots, n_l$ суть размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V_0^\perp$ (с учётом кратностей), причём каждое из них либо кратно 4, либо нечётно. Если $\mathfrak{g}'\mathbf{w} \subset \mathfrak{g}$ — собственная подалгебра, то $\dim \mathfrak{g}' = 1$, а подпространство $\mathfrak{g}'V \subset V$ имеет размерность $2q(V)$. Стало быть, $2q(V) \leq \dim V$.

Достаточно доказать теорему в случае $V_0 = 0$ (т.е. при отсутствии одномерных неприводимых компонент представления $G^0: V$). В самом деле, найдётся вектор $v \in V_0$, такой что $M_v \subset V_0^\perp$ (см. утверждение 1). Имеем $\mathfrak{g}v = 0$, $N_v = V$, $G_v \supset G^0$, $(G_v)^0\mathbf{w} = G^0$, $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}$. Далее, $M_v = (V^{G_v})^\perp\mathbf{w} \supset (V^{G^0})^\perp = V_0^\perp \supset M_v$, откуда $M_v\mathbf{w} = V_0^\perp$. Согласно теореме 2, если V/G — гомологическое многообразие, то M_v/G_v — гомологическое многообразие. Что касается разложений на неприводимые компоненты представлений группы $G^0\mathbf{w} = (G_v)^0$ в пространствах V и M_v , то второе получается из первого удалением всех одномерных компонент. Значит, $q(V)\mathbf{w} = q(M_v)$.

Далее будем считать, что V/G — гомологическое многообразие, а $V_0 = 0$. Требуется доказать, что $q(V) \leq 4$.

Допустим, что найдётся вектор $v \in V$, для которого $\dim G_v = 1$. Тогда $\dim \mathfrak{g}_v = 1$, $\dim(\mathfrak{g}v) = 2$. Кроме того, в силу теоремы 2, N_v/G_v — гомологическое многообразие. Согласно следствию 2, $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \leq 6$, $2q(V)\mathbf{w} = \dim(\mathfrak{g}_v V) \leq \dim(\mathfrak{g}_v N_v) + \dim(\mathfrak{g}v) \leq 8$, $q(V) \leq 4$.

Далее будем предполагать, что в пространстве V не существует вектора с одномерным стабилизатором, а также что $q(V) > 4$. Как следствие,

- $\dim V \geq 2q(V) > 8$;
- $G^0 \cong SU_2$;
- каждая неприводимая компонента представления $G^0: V$ имеет размерность, кратную 4; то же можно сказать о любом его подпредставлении;
- $(\text{Ker Ad}) \cap G^0 = \mathcal{Z}(G^0) = \{\pm E\} \subset \mathbf{O}(V)$.

Произвольные операторы $g \in G$ и $\xi \in \mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)}$ в пространстве V коммутируют. Значит, для всякого $g \in G$ подпространства $V^g, (E - g)V \subset V$ являются $(\mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)})$ инвариантными; при $\text{Ad}(g) = E$ они $\mathfrak{g}$ инвариантны и потому $\text{rk}(E - g) \leq 4$.

Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Если подалгебра $\mathfrak{g}_v \subset \mathfrak{g}$ собственная, то $\dim \mathfrak{g}_v\mathbf{w} = 1$, что противоречит предположению. Поэтому $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}$ либо $\mathfrak{g}_v = 0$. В первом случае имеем $G_v \supset G^0$, $v \in V^{G^0} = V_0 = 0$. Значит, если $v \neq 0$, то $\mathfrak{g}_v = 0$, $|G_v| < \infty$, отображение $\mathfrak{g}\mathbf{w} \rightarrow (\mathfrak{g}v)$, $\xi \rightarrow (\xi v)$ является линейным изоморфизмом, причём для любых $g \in G_v$ и $\xi \in \mathfrak{g}$ выполнено равенство $g(\xi v) = \mathbf{r}\text{Ad}(g)\xi v$, откуда $(\xi v \in V^g) \Leftrightarrow (\xi \in \mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)})$. Как следствие, если $v \neq 0$ и $g \in G_v$, то $(\mathfrak{g}v)^g = (\mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)}v)$.

Для произвольных $g \in G$ и $\xi \in \mathfrak{g}$ обозначим через $\varphi_{g,\xi}$ линейное отображение пространства V во внешнюю прямую сумму двух копий пространства $(E - g)V$, заданное формулой $v \rightarrow \mathbf{r}(E - g)v, (E - g)\xi v$.

ЛЕММА 2. Для любых $g \in G$ и $\xi \in \mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)})$ имеем $\text{Ker } \varphi_{g,\xi} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v \neq 0$ и $v \in \text{Ker } \varphi_{g,\xi}$, то $(E - g)v = (E - g)\xi v = 0$, т.е. $g \in G_v$ и $\xi v \in V^g$, откуда $\xi \in \mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)}$, что противоречит условию. $\square$

Следствие 3. Если $g \in G$ и $\text{Ad}(g) \neq E$, то $\dim V \leq 2 \cdot \text{rk}(E - g)$.

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Для всякого $v \in V \setminus \{0\}$ имеем $[G_v, G_v] = G_v \subset \text{Ker } \text{Ad}$.

Для доказательства теоремы 6 фиксируем произвольный вектор $v\mathbf{w} \in V \setminus \{0\}$.

Обозначим через π гомоморфизм $G_v \rightarrow \mathbf{O}(N_v)$, $g \rightarrow g|_{N_v}$, а через H_v — подгруппу $\pi(G_v)\mathbf{w} \subset \mathbf{O}(N_v)$. В силу теоремы 2, N_v/G_v — гомотопическое многообразие. Кроме того, $|G_v| < \infty$. Согласно теореме 3, имеются разложения $H_v = H_0 \times H_1\mathbf{w} \times \dots \times H_k\mathbf{w}$ и $N_v = W_0 \oplus W_1\mathbf{w} \oplus \dots \oplus W_k\mathbf{w}$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), такие что

- подпространства $W_0, W_1, \dots, W_k \subset N_v$ попарно ортогональны и G_v инвариантны;
- для любых $i, j = 0, \dots, k$ линейная группа $(H_i)|_{W_j} \subset \mathbf{O}(W_j)$ тривиальна при $i \neq j$, порождена псевдоотражениями при $i = j = 0$ и изоморфна группе Пуанкаре при $i = j\mathbf{w} > 0$ (в частности, $\dim W_j = 4$ для всякого $j = 1, \dots, k$).

Хорошо известно, что группа Пуанкаре совпадает со своим коммутантом; то же можно сказать о каждой из групп H_i , $i = 1, \dots, k$.

Если $g \in G_v$, то $\text{rk}(E - g) - \dim \mathbf{r}(E - g)N_v = \dim \mathbf{r}(E - g)(g\mathbf{v})\mathbf{w} = \text{rk } \mathbf{r}E - \text{Ad}(g)\mathbf{w} \leq 2$; при $\text{Ad}(g) = E$ имеем $\text{rk}(E - g) = \dim \mathbf{r}(E - g)N_v$.

ЛЕММА 3. Если $g \in G_v$ и $\dim \mathbf{r}(E - g)N_v \leq 2$, то $g = E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию, $\text{rk}(E - g) \leq 4$. Если $\text{Ad}(g) \neq E$, то $\dim V\mathbf{w} \leq 2\mathbf{w} \cdot \text{rk}(E\mathbf{w} - g) \leq 8$, в то время как $\dim V > 8$. Значит, $\text{Ad}(g) = E$, вследствие чего, во-первых, $\text{rk}(E - g) \leq 4$, а во-вторых, $\text{rk}(E - g) = \dim \mathbf{r}(E - g)N_v \leq 2$. Таким образом, $\text{rk}(E - g) = 0$, $g = E$. $\square$

В силу леммы 3, $\text{Ker } \pi = \{E\} \subset G_v$, т.е. π есть изоморфизм $G_v \rightarrow H_v$. Отсюда, полагая $G_i := \pi^{-1}(H_i) \subset G_v$ ($i = 0, \dots, k$), получаем, что

- $G_v = G_0 \times G_1\mathbf{w} \times \dots \times G_k\mathbf{w}$;
- группа G_0 порождается элементами $g \in G_v$, такими что $\dim \mathbf{r}(E\mathbf{w} - g)N_v \leq 2$ (и, согласно лемме 3, тривиальна);
- каждая из групп G_i , $i = 1, \dots, k$, совпадает со своим коммутантом;
- если $i \in \{1, \dots, k\}$ и $g \in G_i \setminus \{E\}$, то $N_v^g = N_v \cap W_i^\perp$ и $(E - g)N_v = W_i$ (как следствие, $\dim \mathbf{r}(E - g)N_v = 4$, $\text{rk}(E - g) \leq 6$).

Ввиду вышесказанного, $G_v = G_1\mathbf{w} \times \dots \times G_k\mathbf{w} = [G_v, G_v]$.

ЛЕММА 4. Каждая из групп $\text{Ad}(G_i)$, $i = 1, \dots, k$, коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что найдутся число $i \in \{1, \dots, k\}$ и элементы $g, h \in G_i$, такие что операторы $\text{Ad}(g)$ и $\text{Ad}(h)$ не коммутируют.

Имеем $\text{Ad}(g), \text{Ad}(h) \neq E$, причём $\mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)}, \mathfrak{g}^{\text{Ad}(h)} \subset \mathfrak{g}$ — различные одномерные подпространства. Значит, $\mathfrak{g}^{\text{Ad}(h)} = \mathbb{R}\xi$ ($\xi \in (\mathfrak{g}^{\text{Ad}(h)}) \setminus (\mathfrak{g}^{\text{Ad}(g)})$), и тогда $\xi V^h \subset V^h$, а также

$(gv)^h = (g^{\text{Ad}(h)})v = \mathbb{R}(\xi v)$. Далее, $g, h \in G_i \setminus \{E\}$, и потому, во-первых, $\text{rk}(E - h) \leq 6$, а во-вторых, $N_v^g = N_v^h = N_v \cap W_i^\perp$, $V^h = N_v^g \oplus \mathbb{R}\mathbb{R}(\xi v)$, $(E - g)\xi V^h \subset (E - g)V^h = \mathbb{R}\mathbb{R}(E - g)\xi v$, $\dim(\varphi_{g,\xi} V^h) \leq 2$. В силу леммы 2, $\text{Ker } \varphi_{g,\xi} = 0$, откуда $\dim V^h = \dim(\varphi_{g,\xi} V^h) \leq 2$ и, следовательно, $\dim V = \text{rk}(E - h) + \dim V^h \leq 8$, в то время как $\dim V > 8$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Для любого $i = 1, \dots, k$ имеем $\text{Ad}(G_i)\mathbf{w} = \text{Ad } \mathbf{r}[G_i, G_i]\mathbf{w} = \mathbf{0}\text{Ad}(G_i)$, $\text{Ad}(G_i)\mathbf{w} = \{E\}$, т. е. $G_i \subset \text{Ker Ad}$. Значит, $G_v = G_1\mathbf{w} \times \dots \times G_k\mathbf{w} \subset \text{Ker Ad}$.

Тем самым теорема 6 полностью доказана.

Следствие 4. Для всякого $v \in V \setminus \{0\}$ имеем $G_v \cap G^0 = \{E\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6, $G_v \subset \text{Ker Ad}$, $G_v \cap G^0 \subset (\text{Ker Ad}) \cap G^0 = \{\pm E\}\mathbf{w} \subset \mathbf{O}(V)$. $\square$

Существует вложение $\mathbb{T} \hookrightarrow G^0$, и поэтому группу $\mathbb{T}$ можно отождествить с её образом при данном вложении и понимать как подгруппу группы G^0 . В силу следствия 4, всякое неприводимое подпредставление представления $\mathbb{T}: V$ является точным, а значит, изоморфно представлению $\mathbb{T}: \mathbb{C}$ умножениями. Тем самым пространство V наделяется комплексной структурой, в соответствии с которой действие $\mathbb{T}: V$ осуществляется умножениями на скаляры. Все операторы группы Ker Ad коммутируют со всеми операторами группы $G^0 \supset \mathbb{T}$, причём $(\text{Ker Ad}) \cap G^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{T}$. Значит, Ker Ad — конечная подгруппа группы $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, каждый её оператор g полупрост над полем $\mathbb{C}$ и удовлетворяет соотношению $(\text{Spec}_{\mathbb{C}} g) \subset \mathbb{T} \subset G^0$.

В группе G обозначим через H подгруппу, порождённую объединением всех подгрупп G_v , $v \in V \setminus \{0\}$. Согласно теореме 6, $H \subset \text{Ker Ad}$.

Предложение 1. Для любого $g \in \text{Ker Ad}$ имеем $(\text{Spec}_{\mathbb{C}} g) \subset (gH) \cap \mathbb{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный элемент $\lambda \in (\text{Spec}_{\mathbb{C}} g)$. Существует вектор $v\mathbf{w} \in V \setminus \{0\}$, такой что $gv = \lambda v$, и тогда $\lambda \in gG_v \subset gH$. $\square$

ЛЕММА 5. Для любого $g \in \text{Ker Ad}$ имеем $g^2 = E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось ранее, $H \subset \text{Ker Ad}$. Отсюда $gH \subset g(\text{Ker Ad}) = \text{Ker Ad}$. В силу предложения 1, $(\text{Spec}_{\mathbb{C}} g) \subset (gH) \cap \mathbb{T} \subset (\text{Ker Ad}) \cap \mathbb{T} = \{\pm 1\} \subset \mathbb{T}$. $\square$

Следствие 5. Группа Ker Ad коммутативна.

Следствие 6. Для всякого $v \in V \setminus \{0\}$ имеем $G_v = \{E\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из теоремы 6 и следствия 5. $\square$

Следствие 7. Подгруппа $H \subset G$ тривиальна.

ЛЕММА 6. Имеем $\text{Ker Ad} \subset G^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \text{Ker Ad}$ — произвольный элемент. Из предложения 1 и следствия 7 вытекает, что $(\text{Spec}_{\mathbb{C}} g) \subset \{g\} \cap \mathbb{T}$. В то же время $(\text{Spec}_{\mathbb{C}} g) \neq \emptyset$, откуда $g \in \mathbb{T} \subset G^0$. $\square$

Поскольку $\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{In}(\mathfrak{g})$, имеем $\text{Ad}(G) = \text{Ad}(G^0)$. Отсюда, а также из леммы 6 вытекает, что $G = G^0(\text{Ker Ad}) = G^0 \cong \text{SU}_2$. Значит, $\pi_3(G)\mathbf{w} \cong \pi_3(\text{SU}_2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$.

Пусть $S \subset V$ — единичная сфера, а M — фактор S/G .

Имеем $\dim V > 8$, $\dim S > 7$; значит, S и M — связные топологические пространства, причём $\pi_k(S) = \{e\}$ ($k = 1, \dots, 7$). Согласно следствию 6, действие $G: S$ свободное. Отображение факторизации $S \rightarrow M$ является локально тривиальным расслоением со слоем G . Соответствующая точная гомотопическая последовательность даёт соотношения $\pi_k(M) \cong \pi_{k-1}(G)$ ($k = 2, \dots, 7$) и $\pi_1(M) \cong G/G^0 = \{e\}$. В силу леммы 1, $M \cong S^m$ ($m := \dim S - 3 > 4$); с другой стороны, $\pi_4(M) \cong \pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$. Получили противоречие, которое окончательно доказывает теорему 1.

3. Заключение

В работе получено необходимое условие для того, чтобы фактор линейного представления простой трёхмерной компактной группы Ли был гомологическим многообразием: сумма целых частей половин размерностей неприводимых компонент представления не должна превышать 4. Ранее было доказано, что данное условие необходимо для гладкости фактора и что в большинстве остальных случаев фактор гомеоморфен векторному пространству.

Полученный результат оставляет задел для аналогичного уточнения условия на фактор в более широком классе компактных линейных групп. Так, к текущему моменту доказано, что лишь для небольшого количества конкретных простых неприводимых линейных групп классических типов фактор может быть гладким многообразием. Ожидается, что даже гомологическим многообразием он может быть лишь в указанных случаях и что доказать это удастся схожими методами, ссылаясь на базовые классы линейных групп (связная компонента которых коммутативна либо проста и трёхмерна).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлова М. А. О факторпространстве по действию конечной группы, порожденной псевдоотражениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Вып. 48, № 1. С. 104-126.
2. Lange C. When is the underlying space of an orbifold a topological manifold? // arXiv: math.GN/1307.4875.
3. Стырт О. Г. О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Труды ММО. 2009. Вып. 70. С. 235-287.
4. Стырт О. Г. О пространстве орбит трёхмерной компактной линейной группы Ли // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Вып. 75, № 4. С. 165-188.
5. Стырт О. Г. О пространстве орбит неприводимого представления специальной унитарной группы // Труды ММО. 2013. Вып. 74, № 1. С. 175-199.
6. Styrt O. G. On the orbit spaces of irreducible representations of simple compact Lie groups of types B , C , and D // J. Algebra. 2014. Vol. 415. P. 137-161.
7. Styrt O. G. Topological and homological properties of the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component // arXiv: math.AG/1607.06907.
8. Стырт О. Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2018. № 3. С. 68-81.
9. Стырт О. Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой. Выводы // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2018. № 6. С. 48-63.
10. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука. 1980. 440 с.

REFERENCES

1. Mikhailova, M. A. 1985, "On the quotient space modulo the action of a finite group generated by pseudoreflections", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 24, no. 1, pp. 99-119.
DOI: 10.1070/IM1985v024n01ABEH001216

2. Lange, C. 2013, “When is the underlying space of an orbifold a topological manifold?”, arXiv: math.GN/1307.4875.
3. Styr, O. G. 2009, “On the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component“, *Tr. Mosk. Mat. O-va*, vol. 70, pp. 235-287.
4. Styr, O. G. 2011, “On the orbit space of a three-dimensional compact linear Lie group“, *Izv. RAN, Ser. math.*, vol. 75, no. 4, pp. 165-188.
5. Styr, O. G. 2013, “On the orbit space of an irreducible representation of a special unitary group“, *Tr. Mosk. Mat. O-va*, vol. 74, no. 1, pp. 175-199.
6. Styr, O. G. 2014, “On the orbit spaces of irreducible representations of simple compact Lie groups of types B , C , and D “, *J. Algebra*, vol. 415, pp. 137-161.
7. Styr, O. G. 2016, “Topological and homological properties of the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component“, arXiv: math.AG/1607.06907.
8. Styr, O. G. 2018, “Topological and homological properties of the orbit space of a compact linear Lie group with a commutative connected component“, *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki (Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.)*, no. 3, pp. 68-81.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-68-81
9. Styr, O. G. 2018, “More on the topological and homological properties of the orbit space in a compact linear Lie group featuring a commutative connected component“, *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki (Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.)*, no. 6, pp. 48-63.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-48-63
10. Bredon, G. E. 1972, “Introduction to compact transformation groups“, *Academic Press*, 459 p.

Получено 12.05.2022

Принято в печать 14.09.2022