

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-156-168

Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях с растущей разностью

З. Х. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Аннотация

Получена асимптотическая формула для количества простых чисел $p \leq x_1$, $p_2 \leq x_2$ таких, что $p_1(p_2 + a) \equiv l \pmod{q}$, $(al, q) = 1$, при $q \leq x^{\alpha_0}$, $x_1 \geq x^{1-\alpha}$, $x_2 \geq x^\alpha$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2, 5 + \theta + \varepsilon}, \quad \alpha \in \left[(\theta + \varepsilon) \frac{\ln q}{\ln x}, 1 - 2, 5 \frac{\ln q}{\ln x} \right],$$

где $\theta = 1/2$, если q — свободное от кубов, $\theta = 5/6$ в противном случае, являющимся уточнением и обобщением известной формулы А.А.Карацубы.

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров с простыми числами

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

З. Х. Рахмонов. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях с растущей разностью // Чебышёвский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 156–168.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-156-168

Distribution of products of shifted primes in arithmetic progressions with increasing difference

Z. Kh. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Abstract

We obtain an asymptotic formula for the number of primes $p \leq x_1$, $p \leq x_2$ such that $p_1(p_2 + a) \equiv l \pmod{q}$ with $q \leq x^{\alpha_0}$, $x_1 \geq x^{1-\alpha}$, $x_2 \geq x^\alpha$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2.5 + \theta + \varepsilon}, \quad \alpha \in \left[(\theta + \varepsilon) \frac{\ln q}{\ln x}, 1 - 2.5 \frac{\ln q}{\ln x} \right],$$

where $\theta = 1/2$, if q is a cube free and $\theta = \frac{5}{6}$ otherwise. This is the refinement and generalization of the well-known formula of A.A.Karatsuba.

Keywords: Dirichlet character, shifted primes, short sum of characters with primes

Bibliography: 30 titles.

For citation:

Z. Kh. Rakhmonov, 2022, "Distribution of products of shifted primes in arithmetic progressions with increasing difference", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 156–168.

1. Введение и вспомогательные утверждения

Для характера Дирихле χ по модулю q функция Чебышёва определяется равенством

$$\psi(y, \chi) = \sum_{n \leq y} \Lambda(n) \chi(n),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта. Далее будем пользоваться следующими обозначениями: $\varphi(q)$ — функция Эйлера, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\mathcal{L} = \ln q$.

Известно, что в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана имеют место оценки

$$t(x; q) = \sum_{\substack{\chi \pmod{q}}} \max_{y \leq x} |\psi(y, \chi)| \ll x + x^{\frac{1}{2}} q (\ln xq)^2, \quad (1)$$

$$T(x; Q) = \sum_{q \leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}^* \max_{y \leq x} |\psi(y, \chi)| \ll x^{\frac{1}{2}} Q^2 (\ln xQ)^2, \quad (2)$$

где $*$ означает, что суммирование ведётся по всем примитивным характерам по модулю q . При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $T(x; Q)$ и $t(x; q)$ имелись оценки, близкие к оценкам (1) и (2).

А.А. Карацуба [1, 2] создал метод решения тернарных мультипликативных задач, с помощью которого оценил самый простой случай величины $t(x; q)$ и решил задачу о распределении чисел вида $p_1(p_2 + a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью в следующей формулировке.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4}]$; $x \geq x_0(\varepsilon)$ — достаточно большое положительное число; q — простое число, $q \leq x^{\alpha_0}$, $\alpha_0 = 1/(4, 6 + \varepsilon)$; $(a, q) = 1$, $(l, q) = 1$, α — произвольное число из интервала

$$\left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{\mathcal{L}}{\ln x}, 1 - 4, 1 \frac{\mathcal{L}}{\ln x} \right];$$

$x_1 \geq x^{1-\alpha}$, $x_2 \geq x^\alpha$; p_1, p_2 — простые числа; $\pi_2(x_1, x_2, a, l)$ — количество чисел $p \leq x_1$, $p_2 \leq x_2$ таких, что $p_1(p_2 + a) \equiv l \pmod{q}$, $\delta > 0$ — сколь угодно малое число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\pi_2(x_1, x_2, a, l) = \frac{\pi(x_1)\pi(x_2)}{\varphi(q)} + O \left((x_1 x_2)^{1+\delta} q^{-1-\frac{\varepsilon^2}{1024}} \right),$$

где константа в O зависит только от ε .

А.А. Карацуба [1] в этой работе отметил, что

- совершенно так же исследуется вопрос о распределении в арифметических прогрессиях чисел вида $(p_1^n + a)f(p_2)$, где p_1 и p_2 — простые числа, f — многочлен с целыми коэффициентами;
- этим же методом можно решать задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» и другие задачи.

М.М. Петечук [3] применяя метод решения тернарных мультипликативных задач А.А. Карацубы, и используя оценки коротких сумм характеров, полученные В.Н. Чубариковым [4] доказал асимптотическую формулу для суммы

$$S = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{q}}} \tau_k(n)$$

где $q = p^m$, p — фиксированное простое число, $(l, q) = 1$, $q \leq x^{\frac{3}{8}+\epsilon}$. Затем А.А. Карацуба и М.М. Петечук получили асимптотическую формулу для суммы S в случае, когда q — простое, и $q \leq x^{\frac{4}{k}-\epsilon}$, $k \geq k_0 \geq 7$ (1979 г., доклад на семинаре аналитической теории чисел в МГУ). Применение оценок коротких сумм характеров по модулю, свободному от кубических делителей, позволило Иванцу и Фридлендеру [5] перенести этот результат на случай бескубических модулей.

В 1989 г. автор [6], опираясь на метод А.А. Карацубы, элементарно доказал, что

$$t(x; q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}} q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} q) x^{\epsilon}.$$

Этим же методом Пан Чен Донг и Пан Чен Бьяо [7] показали, что

$$T(x; Q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}} Q + x^{\frac{1}{2}} Q^2) (\ln x Q)^4.$$

Следствием этой оценки является теорема о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в «среднем», на возможность получения которой было указано в [1].

Г.Монтгомери [8], пользуясь своей плотностной теоремой о нулях L -рядов Дирихле, доказательство которой опирается на метод большого решета, показал, что

$$t(x; q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}} q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}} q) (\ln x q)^{16},$$

$$T(x; Q) \ll (x Q^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} Q^2) (\ln x Q)^{11}.$$

Этот результат уточнил Р.Вон [9]. Он, с помощью метода большого решета и специального представления логарифмической производной L -функции, доказал, что

$$t(x; q) \ll x (\ln x q)^3 + x^{\frac{3}{4}} q^{\frac{5}{8}} (\ln x q)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} q (\ln x q)^{\frac{7}{2}}, \quad (3)$$

$$T(x; Q) \ll x (\ln x Q)^3 + x^{\frac{3}{4}} Q^{\frac{5}{4}} (\ln x Q)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}} Q^2 (\ln x Q)^{\frac{7}{2}}. \quad (4)$$

Автор [10, 11, 12, 13, 14], воспользовавшись методом решения тернарных мультипликативных задач А.А. Карацубы в сочетании с новым аналитическим вариантом метода И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, методом работы Н.М. Тимофеева [15], в которой он исследует распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям, с последующим применением теоремы Г. Монтгомери [8] о четвёртом моменте L -рядов Дирихле, доказал, что

$$t(x; q) \ll x (\ln x q)^3 + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} (\ln x q)^{34} + x^{\frac{1}{2}} q (\ln x q)^{34}, \quad (5)$$

$$T(x; Q) \ll x (\ln x Q)^3 + x^{\frac{4}{5}} Q (\ln x Q)^{34} + x^{\frac{1}{2}} Q^2 (\ln x Q)^c, \quad (6)$$

где $c = 34$, если $Q \leq x^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{-\frac{5}{3}}$, $c = \frac{7}{2}$, если $Q > x^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{-\frac{5}{3}}$.

Заметим, что оценки (5) и (6) точнее чем (3) и (4) соответственно при

$$x^{\frac{2}{5}}(\ln x)^{\frac{1}{5}} < q \leq x^{\frac{2}{3}}(\ln x)^{-\frac{5}{3}}, \quad x^{\frac{1}{5}} < Q \leq x^{\frac{1}{3}},$$

а для остальных q и Q они совпадают с точностью конечных степеней $\ln xq$ и $\ln xQ$.

Оценку (5) сформулируем в следующем виде, которым далее будем пользоваться при доказательстве теоремы 2. Имеем

ЛЕММА 1. При $x \geq 2$ и $q \geq 1$ имеет место оценка

$$\sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} \left| \sum_{p \leq y} \chi(p) \right| \ll x \mathcal{L}_q^2 + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_q^{33} + x^{\frac{1}{2}} q \mathcal{L}_q^{33}.$$

Из оценки (6) следует теорема Бомбьери-Виноградова о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» в следующей формулировке, которой также будем пользоваться при доказательстве теоремы 2.

ЛЕММА 2. Пусть A произвольное положительное число, тогда справедлива оценка

$$\sum_{q \leq \sqrt{x}(\ln x)^{-A-3,5}} \max_{y \leq x} \max_{(l,q)=1} \left| \pi(x; q, l) - \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\ln x)^{A+1}}.$$

А.А. Карацуба решил задачу о распределении чисел вида $p_1(p_2 + a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью, существенно опираясь на свою оценку суммы значений неглавного характера по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел.

Задачу о распределении значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел впервые изучил И.М. Виноградов [16]. Он, воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, в 1938 г. доказал: если q — простое нечётное, $(a, q) = 1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q , тогда

$$T(\chi, x) = \sum_{p \leq x} \chi(p + a) \ll x^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{\sqrt[3]{x}}}.$$

В 1943 г. И.М. Виноградов [17] уточнил эту оценку, доказав, что

$$|T(\chi, x)| \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}} \right). \quad (7)$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невыветов) $\bmod q$ вида $p + a$, $p \leq x$. М.Ютила [18], воспользовавшись оценкой (7), показал, что если q — нечётное простое число, то

$$G(q, l) \ll q^{\frac{11}{8}+\varepsilon},$$

где $G(q, l)$ — наименьшее Гольдбахово число в арифметической прогрессии с разностью q и начальным членом l . Гольдбаховым числом называют число, представимое в виде суммы двух нечётных простых чисел.

Затем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T_1(\chi, x)$ при $x \geq q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число [19, 20]. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T_1(\chi, x)$ можно

записать в виде суммы по нулям соответствующей L -функции Дирихле, тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T_1(\chi < x)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \geq q^{1+\varepsilon}$.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник [21] в 1971 г. писал по этому поводу: «*Весьма важны исследования И.М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел $T_1(\chi)$, которая давала степенное понижение по сравнению с x уже при $x > q^{0,75+\varepsilon}$. Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А.А. Карацубе.*»

А.А. Карацуба [2, 22, 23] в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он [2, 24, 25] доказал следующее утверждение: *если q — простое, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q , $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi, x) \ll xq^{-\frac{\varepsilon^2}{1024}}, \quad (8)$$

А.А. Карацуба применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p + a$ и количества произведений сдвинутых простых чисел вида $p_1(p_2 + a)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью [1, 2].

Автор обобщил оценку (7) на случай составного модуля и доказал следующее утверждение [26, 27, 28]: *пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D , χ_q — примитивный характер, порождённый характером χ , q_1 — произведение простых чисел, делящих D , но не делящих число q , тогда*

$$T(\chi, x) \ll x \ln^4 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x} \tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}} \tau(q_1) \right) \tau(q). \quad (9)$$

Применяя эту оценку, он [26, 29] также доказал, для достаточно большого нечётного натурального числа D имеет место оценка

$$G(D, I) \ll D^{c+\varepsilon}, \quad (10)$$

где ε — положительное, сколь угодно малое постоянное число, c — нижняя грань чисел a таких, что для некоторой постоянной $A > 2$,

$$\sum_{\chi \bmod D} N(\alpha, T, \chi) \ll (DT)^{2a(1-\alpha)} (\ln DT)^A.$$

Из «плотностной» теоремы Хаксли [30] следует, что при $A = 14$ в последней формуле $c \leq \frac{6}{5}$.

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [31] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q, x)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q . Они доказали следующее: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T(\chi_q, x) \ll xq^{-\delta}. \quad (11)$$

Автор [32, 33, 34] в 2013 году доказал, что *если q — достаточно большое натуральное число, χ_q — примитивный характер по модулю q , $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое постоянное число, $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi_q, x) \ll x \exp(-\sqrt{\mathcal{L}}).$$

В 2021 г. Вгусе Кегг в [35] доказал оценку (11), при $x \geq q^{\frac{3}{4}+o(1)}$.

Как уже выше было отмечено, нетривиальные оценки суммы $T(\chi, x)$, χ — неглавный характер по модулю q , q — простое число, были приложены в задачах о распределении произведений сдвинутых простых чисел и о наименьшей гольдбаховых числах в коротких арифметических прогрессиях. При решении этих задач для составного модуля q , наряду с нетривиальными оценками суммы $T(\chi, x)$, для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для производных характеров.

Поэтому естественно рассматривать задачу о нетривиальной оценке сумм $T(\chi, x)$, где χ — неглавный характер по составному модулю q , не только для длинных сумм (оценка (9)), то есть, когда длина суммы по порядку больше модуля характера χ , но и для коротких сумм, когда x — длина суммы — по порядку меньше q . Автором были получены следующие нетривиальные оценки.

ЛЕММА 3. [36, 37]. Пусть q — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю q , χ_d — примитивный характер по модулю d , порождённый характером χ , d — свободное от кубов, $(a, q) = 1$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, имеем

$$T(\chi, x) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\mathcal{L}}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε .

ЛЕММА 4. [38]. Пусть q — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю q , $(a, q) = 1$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем

$$T(\chi, x) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\mathcal{L}}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε .

А.А. Карацуба в своей работе [1] также отметил, что в теореме 1 верхняя граница для q , в случае, когда q — простое число, может быть значительно увеличена, но не более, чем до $x^{\mathfrak{A}_1}$, то есть величина

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{4,6 + \varepsilon}$$

может быть заменена на величину

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2,5 + \varepsilon},$$

которая является следствием условной оценки (1).

В этой работе автору удалось, воспользовавшись новой оценкой для средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля (лемма 1), и нетривиальными оценками коротких сумм значений неглавного характера по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел (леммы 3 и 4), доказать теорему А.А. Карацубы о распределении чисел вида $p_1(p_2 + a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью при

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{2,5 + \theta + \varepsilon}, \quad \theta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & q \text{ — число свободное от кубов;} \\ \frac{5}{6}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $x \geq x_0(\varepsilon)$ — достаточно большое положительное число; q — натуральное число, $q \leq x^{\varepsilon_0}$, ε_0 определяется соотношением (12),

$$\alpha \in \left[(\theta + \varepsilon) \frac{\ln q}{\ln x}, 1 - 2, 5 \frac{\ln q}{\ln x} \right], \quad x_1 \geq x^{1-\alpha}, \quad x_2 \geq x^\alpha,$$

p_1, p_2 — простые числа; $(a, q) = (l, q) = 1$, $\pi_2(x_1, x_2, a, l)$ — количество чисел $p_1 \leq x_1$, $p_2 \leq x_2$ таких, что $p_1(p_2 + a) \equiv l \pmod{q}$. Тогда для произвольного числа $A > 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\pi_2(x_1, x_2, a, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \text{Li}(x_1) \text{Li}(x_2) + O \left(\frac{x_1 x_2}{\varphi(q) \ln x_1 \ln x_2 \mathcal{L}^A} \right),$$

где константа в O зависит только от ε .

При доказательстве теоремы 2 также воспользуемся оценкой (6), а именно её следствием (лемма 1) о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» и теоремой Бруно-Титчмарша. (лемма 5).

ЛЕММА 5. Для $(a, q) = 1$ и $q \leq x$ имеем

$$\pi(x; q, a) \leq \frac{2x}{\varphi(q) \ln \left(\frac{2x}{q} \right)}.$$

2. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, с учётом условий теоремы будем считать, что для параметров x_1 и x_2 выполняются соотношения

$$q^{\frac{5}{2}} \leq x_1 \leq q^{\frac{5}{2}+c_1}, \quad q^{\theta+\varepsilon} \leq x_2 \leq q^{\theta+\varepsilon+c_2}, \quad (13)$$

где c_1 и c_2 произвольные положительные фиксированные числа, поэтому

$$\ln x_1 \asymp \mathcal{L}, \quad \ln x_2 \asymp \mathcal{L}. \quad (14)$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, найдём

$$\pi_2(x_1, x_2, a, l) = \sum_{p_1 \leq x_1} \sum_{p_2 \leq x_2} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \chi(p_1(p_2 + a)) \bar{\chi}(l) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} T_1(x_2, \chi) \bar{\chi}(l) \sum_{p \leq x_1} \chi(p).$$

Разбивая последнюю сумму по χ на две части, находим

$$\begin{aligned} \pi_2(x_1, x_2, a, l) &= \mathcal{M}_2(x_1, x_2, a, l) + \mathcal{R}_2(x_1, x_2, a, l), \\ \mathcal{M}_2(x_1, x_2, a, l) &= \frac{1}{\varphi(q)} T_1(x_2, \chi_0) \sum_{p \leq x_1} \chi_0(p), \\ \mathcal{R}_2(x_1, x_2, a, l) &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} T_1(x_2, \chi) \bar{\chi}(l) \sum_{p \leq x_1} \chi(p). \end{aligned} \quad (15)$$

В этой формуле $\mathcal{M}_2(x_1, x_2, a, l)$ даёт предполагаемый главный член $\pi_2(x_1, x_2, a, l)$, а $\mathcal{R}_2(x_1, x_2, a, l)$ входит в его остаточный член.

Вычислим главный член. Воспользовавшись асимптотическим законом распределения простых чисел и соотношением (14), получим

$$\sum_{p \leq x_1} \chi_0(p) = \pi(x_1) + O\left((\ln x_1)^2\right) = \text{Li}(x_1) + O\left(\frac{x_1}{\ln x_1 \mathcal{L}^A}\right). \quad (16)$$

Теперь представим сумму $T_1(x_2, \chi_0)$ в виде

$$\begin{aligned} T_1(x_2, \chi_0) &= \sum_{\substack{p \leq x_2 \\ (p+a, q)=1}} 1 = \text{Li}(x_2) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} + \sum_{d|q} \mu(d) \left(\pi(x_2; d, -a) - \frac{\text{Li}(x_2)}{\varphi(d)} \right) = \\ &= \text{Li}(x_2) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) + R_1(x_2) + R_2(x_2), \\ R_1(x_2) &= \sum_{\substack{d|q \\ d \leq \sqrt{x}(\ln x)^{-A-3,5}}} \left(\pi(x_2; d, -a) - \frac{\text{Li}(x_2)}{\varphi(d)} \right), \\ R_2(x_2) &= \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x}(\ln x)^{-A-3,5}}} \left(\pi(x_2; d, -a) - \frac{\text{Li}(x_2)}{\varphi(d)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим $R_1(x_2)$ и $R_2(x_2)$, воспользовавшись соответственно теоремой Бомбери-Виноградова (лемма 2) и теоремой Бруно-Титчмаршем (лемма 5). Имеем

$$\begin{aligned} R_1(x_2) &\ll \sum_{\substack{d|q \\ d \leq \sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-3,5}}} \left| \pi(x_2; d, -a) - \frac{\text{Li}(x_2)}{\varphi(d)} \right| \ll \frac{x_2}{(\ln x_2)^{A+1}}; \\ R_2(x_2) &\leq \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-3,5}}} \left(\pi(x_2; d, -a) + \frac{\text{Li}(x_2)}{\varphi(d)} \right) \ll \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-3,5}}} \left(\frac{x_2}{\varphi(d) \ln \left(\frac{x}{d} \right)} + \frac{x_2}{\varphi(d) \ln x_2} \right) \ll \\ &\ll \frac{x_2}{\ln x_2} \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-2,5}}} \frac{1}{\varphi(d)} \ll \frac{x_2}{(\ln x_2)^{A+1}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (17), и воспользовавшись соотношением (14), имеем

$$T_1(x_2, \chi_0) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \text{Li}(x_2) + O\left(\frac{x_2}{\ln x_2 \mathcal{L}^A}\right).$$

Отсюда, из (16) и (15), находим

$$\mathcal{M}_2(x_1, x_2, a, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \text{Li}(x_1) \text{Li}(x_2) + O\left(\frac{x_1 x_2}{\varphi(q) \ln x_1 \ln x_2 \mathcal{L}^A}\right).$$

Оценим остаточный член $\mathcal{R}_2(x; p^\alpha, l)$. Переходя к оценкам, а затем применяя для оценки

суммы $T_1(x_2, \chi)$ при $\chi \neq \chi_0$ леммы 3 и 4, и воспользовавшись леммой 1, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(x_1, x_2, a, l) &\leq \frac{1}{\varphi(q)} \max_{\chi \neq \chi_0} |T_1(x_2, \chi)| \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{p \leq x_1} \chi(p) \right| \ll \\ &\ll \frac{1}{\varphi(q)} x_2 \exp(-0, 6\sqrt{\mathcal{L}}) \left(x_1 (\ln x_1 q)^2 + x_1^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} (\ln x_1 q)^{33} + x_1^{\frac{1}{2}} q (\ln x_1 q)^{33} \right) = \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \frac{x_1 x_2}{\ln x_1 \ln x_2} \Delta(x_1, x_2, q), \\ \Delta(x_1, x_2, q) &= \left((\ln x_1 q)^{-31} + x_1^{-\frac{1}{5}} q^{\frac{1}{2}} + x_1^{-\frac{1}{2}} q \right) (\ln x_1 q)^{33} \ln x_1 \ln x_2 \exp(-0, 6\sqrt{\mathcal{L}}). \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношений (13) и (14), имеем

$$\Delta(x_1, x_2, q) \ll (\ln x_1 q)^{33} \ln x_1 \ln x_2 \exp(-0, 6\sqrt{\mathcal{L}}) \ll \mathcal{L}^{35} \exp(-0, 6\sqrt{\mathcal{L}}) \ll \mathcal{L}^{-A}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. Вып. 4. С. 724 — 727.
2. Карацуба А. А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // УМН. 2008. Т. 63. В. 4(382). С. 43 — 92.
3. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечётного простого числа // Известия АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 892 — 908.
4. Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L -рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ. 1973. № 2. С. 46 — 52.
5. Friendlander J. B., Iwaniec H. The divisor problem for arithmetic progressions // Acta Arith. 1985. V. 45, № 3. P. 273-277. doi:10.4064/aa-45-3-273-277.
6. Рахмонов З. Х. Распределение чисел Харди Литтлвуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, № 1. С. 211 — 224.
7. Пан Чен Донг, Пан Чен Бьяо Основы аналитической теории чисел (на китайском языке). Пекин, 1991.
8. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел — М.: изд-во Мир, 1974.
9. Vaughan R. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. (2). 10(1975), 153 — 162.
10. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 — 71.
11. Рахмонов З. Х. Средние значения функции Чебышёва // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331. № 3. С. 281 — 282.

12. Рахмонов З. Х., Нозиров О.О. О средних значениях функций Чебышёва и их приложениях // Чебышёвский сборник. 2021. Т. 22. № 5(81). С. 198 – 222.
13. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении функций Чебышёва // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1994. Т. 58. № 3. С. 1277 – 139.
14. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении в теории простых чисел // Доклады Российской Академии наук. 1996. Т. 349. № 5. С. 606 – 607.
15. Тимофеев Н.М. Распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям // Известия АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 341 – 362.
16. Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p + k$ по простому модулю // Математический сборник. 1938. Т. 3. № 45. С. 311 – 320.
17. Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.
18. Jutila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference // Ann. Univ. Turku; Ser. A., I, 118 (1968).
19. Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p + k)$ // Известия АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.
20. Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p + k)$ // Известия АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 285 – 290.
21. Линник Ю.В. Новейшие работы И. М. Виноградова // Тр. МИАН. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.
22. Карацуба А.А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1287 – 1289.
23. Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.
24. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.
25. Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами // Доклады АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 517 – 518.
26. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41. № 1. С. 201 – 202.
27. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами // ДАН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.
28. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Тр. МИАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.
29. Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии // Известия АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.
30. Huxley M.N. On the difference between consecutive primes // Inventiones mathematicae June 1971, Volume 15, Issue 2, pp 164–170.

31. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Матем. заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.
32. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5 – 9.
33. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. В. 4(2). С. 113 – 117.
34. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышёвский сборник. 2014. Т. 15. В. 2(50). С. 73 – 100.
35. Керр Б. Оценки для сумм мультипликативных характеров по сдвинутым простым числам // Труды МИАН. 2021. Т. 314. С. 71 – 96.
36. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 1 – 27.
37. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН РТ. 2017. Т. 60. № 9. С. 378-382.
38. Rakhmonov Z.Kh. Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes. (2018) In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers. pp 187-217. Springer, Cham. First Online 05 July 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-92777-0_10.

REFERENCES

1. Karatsuba A. A., 1970, “The distribution of products of shifted prime numbers in arithmetic progressions”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 192, Is. 4, pp. 724–727.
2. Karatsuba, A. A., 2008, “Arithmetic problems in the theory of Dirichlet characters”, *Russian Mathematical Surveys*, vol 63, Is. 4, pp. 641-690.
3. Petečuk M. M., 1980, “The sum of the values of the divisor function in arithmetic progressions whose difference is a power of an odd prime”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 15, Is. 1, pp. 145-160.
4. Chubarikov V. N., 1973, “A more precise bound for the zeros of Dirichlet L -series modulo with a power of prime”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 28, no 1-2, pp. 76–81.
5. Friendlander J. B., & Iwaniec H., 1985, “The divisor problem for arithmetic progressions”, *Acta Arith.*, vol. 45, Is. 3, pp. 273-277.
6. Rakhmonov Z. Kh., 1990, “The distribution of Hardy–Littlewood numbers in arithmetic progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 34, Is. 1, pp. 213-228.
7. Pan Chengdong, & Pan Chengbiao, 1991, “Foundation to Analytic Number Theory”, *Science Press, Beijing, 1991*, (in Chinese).
8. Montgomery, H., 1971, *Topics in Multiplicative Number Theory*, vol. 227. Springer-Verlag, Berlin-New York.
9. Vaughan, R. O., 1975, “Mean value theorems in prime number theory”, *J. London Math. Soc.*, vol. s2-10, Is. 2, pp. 153-162, <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-10.2.153>.

10. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, "Theorem on the mean value of $\psi(x, \chi)$ and its applications", *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64.
11. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, "Mean values of the Chebyshev function", *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, vol. 48, Is. 1, pp. 85–87.
12. Rakhmonov, Z. Kh., & Nozirov O. O., 2021, "On the mean values of the Chebyshev function and their applications", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no 5(81), pp. 198–222.
13. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, "A mean-value theorem for Chebyshev functions", *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 44, Is. 3, pp. 555–569.
14. Rakhmonov, Z. Kh., 1996, "The mean-value theorem in prime number theory", *Doklady Mathematics*, vol. 54, Is. 1, pp. 597–598.
15. Timofeev, N. M., 1988, "Distribution in the mean of arithmetic functions in short intervals in progressions", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 30, Is. 2, pp. 315–335.
16. Vinogradov, I. M., 1938, "On the distribution of quadratic rests and non-rests of the form $p + k$ to a prime modulus", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 3(45), no 2, pp. 311–319.
17. Vinogradov, I. M., 1943, "An improvement of the estimation of sums with primes", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 7, no 1, pp. 17–34.
18. Jutila, M., 1968, "On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference", *Ann. Univ. Turku; Ser. A*, I 118(5).
19. Vinogradov, I. M., 1952, "New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p + k)$ ", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 16, Is. 3, pp. 197–210.
20. Vinogradov, I. M., 1953, "Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p + k)$ ", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 17, Is. 4, pp. 285–290.
21. Linnik, Yu. V., 1975, "Recent works of I.M. Vinogradov", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 132, pp. 25–28.
22. Karatsuba, A. A., 1968, "Sums of characters, and primitive roots, in finite fields", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 180, Is. 6. № 6, pp. 1287–1289.
23. Karatsuba, A. A., 1970, "Estimates of character sums", *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 1, pp. 19–29.
24. Karatsuba, A. A., 1970, "Sums of characters over prime number", *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 2, pp. 303–326.
25. Karatsuba, A. A., 1970, "Sums of characters with prime numbers", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 190, Is. 3, pp. 517–518.
26. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, "On the distribution of values of Dirichlet characters", *Russian Math. Surveys*, vol. 41, Is. 1, pp/ 237–238. doi:10.1070/RM1986v041n01ABEH0032
27. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, "Estimation of the sum of characters with primes", *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, vol. 29, Is. 1, pp. 16–20,, (in Russian).
28. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, "On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 263–272.

29. Rakhmonov, Z. Kh., 1986 “The least Goldbach number in an arithmetic progression”, *Izv. Akad. Nauk Tadzhik. SSR. Otdel. Fiz.-Mat., Khim. i Geol. Nauk*, № 2(100), pp. 103-106, (in Russian).
30. Huxley, M. N., 1971, “On the difference between consecutive primes”, *Inventiones mathematicae*, vol. 15, Is. 2, pp. 164–170.
31. Fridlander, Dzh. B., & Gong, K., & Shparlinskii, I. E., 2010, “Character sums over shifted primes”, *Math. Notes*, vol. 88, Is. 3-4, pp. 585-598. doi:10.1134/S0001434610090312.
32. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, № 1, pp. 5-9, (in Russian).
33. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes”, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, Is. 4(2), pp. 113-117, (in Russian).
34. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “Sums of characters over prime numbers”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, no 2, pp. 73-100, (in Russian).
35. Kerr, B., 2021, “Bounds of Multiplicative Character Sums over Shifted Primes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 314, pp. 64–89.
36. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, “Sums of values of nonprincipal characters over a sequence of shifted primes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 299, pp. 219–245.
37. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, “On the estimation of the sum the values of Dirichlet character in a sequence of shifted primes”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 60, no 9, pp. 378-382, (in Russian).
38. Rakhmonov Z. Kh., 2018, “Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes”, In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers, *Springer International Publishing*, pp. 187-217.

Получено 18.07.2022

Принято в печать 14.09.2022