ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.812.4 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-147-155

Связь между кольцом Ad^*-инвариантных полиномов и инвариантами Жордана — Кронекера нильпотентных алгебр Ли малой размерности[1]

В. В. Пономарёв

Пономарёв Владимир Владимирович — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: boba1997@yandex.ru

Аннотация

Эта статья посвящена исследованию взаимосвязи между инвариантами Жордана — Кронекера и свободной порождённостью кольца Ad^*-инвариантных полиномов алгебр Ли размерности меньше или равной семи. На коалгебре алгебры Ли можно задать скобку Пуассона с постоянными коэффициентами, а также скобку Ли-Пуассона. Таким образом, любая пара элементов коалгебры Ли задаёт однопараметрическое семейство кососимметричных билинейных форм, называемое пучком. Для двух любых форм из пучка можно построить базис, в котором они одновременно примут блочно-диагональный вид с блоками двух типов. Этот вид называется разложением Жордана — Кронекера. При этом количество и размеры блоков будут одинаковыми для любой пары форм из пучка. Алгебраическим типом пучка называют количество и размеры блоков в разложении Жордана — Кронекера любой его пары. Почти все пучки одной алгебры Ли имеют одинаковый алгебраический тип, который является инвариантом Жордана — Кронекера данной алгебры Ли. Имеется теорема, которая утверждает, что для нильпотентной алгебры Ли существование двух кронекеровых пучков одного ранга, но различного алгебраического типа означает, что кольцо Ad^*-инвариантных полиномов обязано быть несвободно порождённым. В данной работе рассмотрены все кронекеровы алгебры Ли (из известного списка семимерных нильпотентных алгебр Ли), для которых имеется возможность существования кронекеровых пучков того же ранга, что и ранг алгебры. В результате проверки был получен отрицательный ответ на вопрос о том, верно ли обратное утверждение к сформулированной теореме.

Ключевые слова: алгебра Ли, инварианты Жордана — Кронекера, инварианты коприсоединённого представления.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

В. В. Пономарёв. Связь между кольцом Ad^*-инвариантных полиномов и инвариантами Жордана — Кронекера нильпотентных алгебр Ли малой размерности // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 147–155.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01303).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 512.812.4 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-147-155

Connection between the ring of Ad^*-invariant polynomials and the Jordan–Kronecker invariants of nilpotent low-dimensional Lie algebras

V. V. Ponomarev

Ponomarev Vladimir Vladimirovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: boba1997@yandex.ru

Abstract

This article is concerned with the study of connections between the Jordan–Kronecker invariants and free generatedness of the ring of Ad^*-invariant polynomials of Lie algebras of dimension less than or equal to seven. At the dual space of the Lie algebra it is possible to define the Poisson bracket with the constant coefficients and the Lie-Poisson bracket. Thus, any pair of points from this dual space defines an one-parameter family of skew-symmetric bilinear forms, called a pencil. For any two bilinear forms from the pencil there exists a basis, in which their matrices can be simultaneously reduced to the block-diagonal form with the blocks of two types. This form is called the Jordan-Kronecker decomposition. At the same time, the number and sizes of blocks will be the same for any pair of bilinear forms from the pencil. The algebraic type of a pencil is the number and sizes of blocks in the Jordan-Kronecker decomposition of any pairs of bilinear forms from the pencil. Almost all pencils of the same Lie algebra have the same algebraic type, which is the Jordan-Kronecker invariant of a given Lie algebra. There is a theorem that states that for a nilpotent Lie algebra, the existence of two Kronecker pencils of the same rank but of different algebraic types means that the ring of Ad^*-invariant polynomials must be non-freely generated. In this paper, we considered all Kronecker Lie algebras (from the certain list of 7-dimensional nilpotent Lie algebras) for which there was a possibility of the existence of a Kronecker pencils of the same rank as the rank of the algebra. As a result of the research, a negative answer was obtained to the question of whether the converse statement to the previous theorem is true.

Keywords: Lie algebra, Jordan–Kronecker invariants, coadjoint invariants.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. V. Ponomarev, 2022, "Connection between the ring of Ad^*-invariant polynomials and the Jordan–Kronecker invariants of nilpotent low-dimensional Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 147–155.

1. Введение

Классификация алгебр Ли — одна из основных задач теории групп и алгебр Ли. Для больших размерностей не существует списков алгебр Ли. Однако, в случае малых размерностей мы имеем некоторое количество списков алгебр Ли определённых типов. Их свойства изучались многими геометрами и алгебраистами. Для нильпотентных алгебр Ли мы знаем полный список алгебр размерности меньшей или равной семи [9]. А. Ю. Грознова в своей дипломной работе [10] вычислила инварианты Жордана — Кронекера для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли. С другой стороны, статья [14], написанная А. Оомсом, посвящена изучению свойств колец инвариантов коприсоединённого представления тех же самых алгебр Ли. То, что списки алгебр в статьях [14] и [9] совпадают, доказывается в [12]. Вычисления Грозновой показали, что для некоторых алгебр можно найти пары точек, задающие пучки одного ранга, но разного алгебраического типа. Это натолкнуло А. В. Болсинова на мысль, что существование кронекеровых пучков разного алгебраического типа и одинакового ранга может являться характеристическим свойством для несвободной порождённости колец инвариантов коприсоединённого представления для кронекеровых нильпотентных алгебр Ли. Таким образом, эта статья посвящена поиску таких пучков для семимерных алгебр Ли кронекерова типа, имеющих несвободно порождённое кольцо Ad^*-инвариантных полиномов. Результаты этого исследования сформулированы в Теореме 3, а также в разделе 4.

2. Основные определения и свойства

Для начала, давайте вспомним некоторые определения, которые мы будем использовать далее в этой статье. Читатели, желающие узнать подробнее о теории инвариантов Жордана — Кронекера могут прочесть [4, 1], для ознакомления с историей и предпосылками к данным исследованиям можно ознакомиться с [3, 5, 11, 13], а применения данной теории можно увидеть в [2, 6, 7, 8].

На коалгебре g^* алгебры Ли g зададим *скобку Ли–Пуассона*

$$\{f,g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = \langle x, [df(x), dg(x)]\rangle = \mathcal{A}_x(f,g),$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, а x — точка на коалгебре, и *скобку Пуассона с постоянными коэффициентами*

$$\{f,g\}_a(x) = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = \langle a, [df(x), dg(x)]\rangle = \mathcal{A}_a(f,g),$$

где a — фиксированная точка на коалгебре.

Следующее утверждение называют теоремой Жордана — Кронекера.

Теорема 1 ([4, 15]). *Для двух кососимметричных билинейных форм A и B на одном конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем существует базис этого пространства, в котором формы одновременно приводятся к блочно-диагональному виду со следующими типами блоков:*

1) жорданов блок с собственным значением λ

$$A_i : \begin{pmatrix} 0 & J(\lambda_i) \\ -J^T(\lambda_i) & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_i : \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix},$$

2) жорданов блок с собственным значением ∞

$$A_j : \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_j : \begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J(0) & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

3) кронекеров блок

$$
A_k : \begin{pmatrix}
 & & & & & 1 & & \ldots & & 0 \\
 & & & & & & 1 & \ldots & & 0 \\
 & & & & & & & \ldots & & \\
 & & & & & & & \ldots & 1 & 0 \\
-1 & & \ldots & & & & & & & \\
 & -1 & \ldots & & & & & & & 0 \\
 & & \ldots & & & & & & & \\
 & & \ldots & & -1 & & & & & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad
B_k : \begin{pmatrix}
 & & & & & 0 & 1 & \ldots & & \\
 & & & & & & & \ldots & & \\
 & & & & & 0 & & \ldots & 1 & \\
 & & & & & 0 & & \ldots & & 1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
-1 & & \ldots & & & 0 & & & & \\
 & & \ldots & & & & & & & \\
 & & \ldots & -1 & & 0 & & & & \\
 & & \ldots & & -1 & 0 & & & &
\end{pmatrix}.
$$

Для любой фиксированной пары точек (x, a) существует однопараметрическое семейство $\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a$, называющееся *пучком* скобок Пуассона, заданным парой точек (x, a). Количество и размеры блоков каждого вида в разложении Жордана — Кронекера пары кососимметричных билинейных форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ называются *алгебраическим типом* пучка.

Утверждение 1 ([4]). *Существует непустое открытое в топологии Зарисского множество U, лежащее в $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, такое, что для любой пары (x, a) из U алгебраические типы пучков $\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a$ будут одинаковыми.*

Это утверждение означает, что алгебраический тип почти всех пучков одинаков. Поэтому мы можем называть алгебраический тип пучка, заданного парой точек общего положения, *инвариантами Жордана — Кронекера* алгебры Ли.

Пучок, у которого в разложении Жордана — Кронекера форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ присутствуют только кронекеровы блоки, называется *кронекеровым пучком.* Аналогично, алгебра Ли, у которой пучок, заданный парой точек общего положения, является кронекеровым, называется *кронекеровой алгеброй.*

Тривиальный кронекеров блок — это нулевой 1×1 блок. Следовательно, мы получаем:

Утверждение 2 ([4]). *Число тривиальных кронекеровых блоков равно размерности общего ядра (подпространства ковекторов, принадлежащих ядру любой скобки из пучка).*

Рангом пучка будем называть максимальный ранг билинейных форм $\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a$, составляющих пучок. *Рангом алгебры*, соответственно, назовём ранг пучка, заданного точками общего положения.

Утверждение 3 ([4]). *Число кронекеровых блоков равно корангу пучка.*

Теорема 2. *Для нильпотентной кронекеровой алгебры Ли существование двух кронекеровых пучков одного ранга, но различного алгебраического типа означает, что кольцо* Ad^**-инвариантных полиномов является несвободно порождённым.*

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием Remark 7 и Theorem 9 из [4]. Для их применения необходимо проверить, что данные алгебры Ли являются унимодулярными и их фундаментальный полуинвариант является инвариантом. Но в статье [4] мы можем видеть, что у семимерных кронекеровых алгебр Ли отсутствует фундаментальный полуинвариант, а унимодулярность данных алгебр Ли следует из их нильпотентности. Таким образом, для них работает вторая чать из Remark 7, из которой следует, что пункт (2) из Theorem 9 не выполняется. Theorem 9 же утверждает, что для унимодулярных алгебр, для которых фундаментальный полуинвариант является инвариантом, пункт (2) эквивалентен свободной порождённости кольца Ad^*-инвариантных полиномов. Таким образом, получается, что данные алгебры не могут обладать свободнопорождённым кольцом Ad^*-инвариантных полиномов. $\square$

3. Постановка задачи и алгоритм её решения

Перейдем к рассмотрению примеров семимерных нильпотентных алгебр Ли, связанных со следующей гипотезой.

Гипотеза. *Для нильпотентной кронекеровой алгебры Ли несвободная порождённость кольца* Ad^**-инвариантных полиномов означает существование по крайней мере двух пар точек* (x, a)*, таких что заданные ими пучки являются кронекеровыми и имеют одинаковый ранг, но различный алгебраический тип.*

Алгебраический тип пучка будем обозначать набором чисел, задающих размеры блоков в разложении Жордана — Кронекера: $k_1\ k_2\ \dots\ k_n$.

Утверждение 4. *Для семимерных алгебр Ли кронекерова типа возможны только следующие алгебраические типы пучков:*

$$1\,1\,1\,1\,1\,1\,1, \qquad 1\,1\,1\,1\,3, \qquad 1\,1\,5, \qquad 1\,3\,3, \qquad 7.$$

Как можно заметить из предыдущего утверждения и Утверждения 2, мы можем найти две пары одного ранга, но с различными алгебраическими типами только для алгебр с инвариантами Жордана — Кронекера 1 3 3, потому что только алгебры ранга 4 имеют два возможных набора инвариантов, а размерность общего ядра для пучков, заданных некоторыми специальными парами точек, не может быть меньше, чем в случае пар точек общего положения.

Замечание 1. *Аналогично, для кронекеровых алгебр Ли размерности меньше семи две возможности алгебраических типов существуют только в случае шестимерных алгебр ранга 4. Соответственно, мы можем найти две пары одного ранга, но с различными алгебраическими типами только для алгебр с инвариантами Жордана — Кронекера 3 3. Однако из [10] мы знаем, что алгебр Ли с такими инвариантами Жордана — Кронекера не существует, а значит, минимальная размерность, для которой Гипотеза имеет смысл, равна семи.*

Таким образом, мы можем сказать, что в общем случае Гипотеза неверна, так как существуют примеры нильпотентных алгебр Ли с несвободно порождённым кольцом Ad^*-инвариантных полиномов, но имеющие инварианты Жордана — Кронекера 1 1 1 1 3. Однако полезно проверить это утверждение для алгебр ранга 4.

Как мы можем увидеть в [10], не существует семимерных нильпотентных алгебр Ли с инвариантами Жордана — Кронекера 1 1 5. Это означает что нам надо проверить все семимерные нильпотентные алгебры Ли с несвободно порождённым кольцом Ad^*-инвариантных полиномов ранга четыре. Таких алгебр 11 штук.

Нам надо найти по краней мере два пучка различных алгебраических типов 1 3 3 и 1 1 5. Опишем алгоритм их нахождения.

Рассмотрим в качестве первого пучка любой пучок общего положения. Его алгебраический тип 1 3 3.

Теперь, если мы запишем тензор Пуассона пучка в матричном виде, то увидим, что он зависит от координат точек (x, a) и от параметра λ. Изменяя координаты точек, мы должны найти пару, у которой в общем ядре лежат два вектора (или два столбца нулей в матрице), а ранг равен четырём для любого λ.

Рассмотрим некоторые типичные примеры. Алгебры Ли будем записывать в виде (X,Y), где X — номер алгебры из статьи [14], а Y — соответствующее ей обозначение из статьи [9].

Пример 1. Алгебра Ли (152, 12357A).

Пучки общего положения 1 3 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_4-\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_6-\lambda a_6 & x_7-\lambda a_7 & 0 \\ -x_4+\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & -x_6+\lambda a_6 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 \\ -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6+\lambda a_6 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $x_7 = a_7 = 0$, то тип пучка 1 1 5:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_4-\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0 \\ -x_4+\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & -x_6+\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6+\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае решение можно просто заметить, однако это не так легко для других матриц.

Пример 2. Алгебра Ли (147, 1357B).

$$\begin{pmatrix} 0 & x_4-\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0 \\ -x_4+\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0 \\ -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко увидеть, что последний вектор базиса лежит в общем ядре. Это значит, что нам достаточно найти ещё один такой вектор. Чтобы это сделать, мы умножим матрицу тензора Пуассона справа на столбец неопределённых коэффициентов $(a, b, c, d, e, f, 0)$ и получим систему линейных уравнений на эти коэффициенты. Эта система не должна зависеть от λ, поэтому мы приравниваем сумму коэффициентов при λ к нулю и добавляем новые уравнения в систему. Теперь у нас имеется 12 уравнений на 6 переменных.

Некоторые уравнения решаются моментально, так как имеют тривиальный вид: $ax = 0$. Ограничивая исходную систему на существенные переменные, мы получаем условие существования единственного решения новой системы. Далее, необходимо проверить, что пучки точек, удовлетворяющих этому условию, имеют кронекеров тип.

Ниже приведена матрица линейной системы уравнений для Примера 2 (только на переменные b, d, e, f, так как $a = c = 0$):

$$\begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_7 & 0 \\ -x_5 & -x_7 & 0 & x_7 \\ a_4 & a_5 & a_7 & 0 \\ -a_5 & -a_7 & 0 & a_7 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $(x_5a_7 - x_7a_5)^2$. Следовательно, решение существует, если $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$. Однако, при $\lambda = \frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$ ранг равен двум, что означает, что эти пучки больше не кронекерова типа и мы не можем найти пучки алгебраического типа 1 1 5. Таким образом, на самом деле Пример 2 — это контрпример к Гипотезе.

Пример 3. Алгебра Ли (149, 12457K).

$$\begin{pmatrix} 0 & x_3-\lambda a_3 & x_4-\lambda a_4 & x_7-\lambda a_7 & x_6-\lambda a_6 & x_7-\lambda a_7 & 0 \\ -x_3+\lambda a_3 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_4+\lambda a_4 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7+\lambda a_7 & -x_6+\lambda a_6 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6+\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Давайте рассмотрим уравнения для Примера 3 (только на переменные b, c, d, e, f, так как $a = 0$):

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_7 & x_6 & x_7 \\ 0 & x_5 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_7 & 0 & 0 \\ -x_6 & -x_7 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_7 & a_6 & a_7 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 & 0 \\ -a_5 & 0 & a_7 & 0 & 0 \\ -a_6 & -a_7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эту систему можно разложить на две подсистемы размера 3×3 на переменные b, c, d. В общем случае, они имеют одномерное пространство решений, так что мы можем выразить b и c через d:

$$\frac{a_7}{a_5}d = b = \frac{x_7}{x_5}d, \qquad -\frac{a_6}{a_5}d = c = -\frac{x_6}{x_5}d.$$

Таким образом, решение существует, если $\frac{x_5}{a_5} = \frac{x_6}{a_6} = \frac{x_7}{a_7}$, но если приравнять это число к λ, то ранг упадёт до двух и поэтому Пример 3 тоже оказывается контрпримером.

В итоге мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Среди семимерных нильпотентных кронекеровых алгебр Ли, у которых кольцо* Ad**-инвариантных полиномов не является свободно порождённым, есть ровно три алгебры, для которых существуют пары точек с пучками одного ранга, но различного алгебраического типа. Для остальных алгебр таких пар не существует.*

4. Заключение

Таким образом, исходная гипотеза была опровергнута для нильпотентных алгебр Ли размерности не больше семи. В случае размерностей строго меньше семи не существует нильпотентных кронекеровых алгебр, для которых была бы возможность найти два кронекеровых пучка одного ранга, но разного алгебраического типа.

Для семимерных алгебр Ли нашлось 11 претендентов на существование таких пучков, причём только у трёх из них такие пучки действительно существуют. Ниже приведён список этих алгебр и результатами работы алгоритма, описанного в предыдущем разделе.

141, 123457E: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таком λ ранг равен 2;
142, 12457B: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таком λ ранг равен 2;
144, 13457F: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$ или $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таких λ ранг равен 2;
145, 1357I: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$ или $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таких λ ранг равен 2;
146, 123457D: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$, но при таком λ ранг равен 2;
147, 1357B: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$, но при таком λ ранг равен 2;
149, 12457K: Решение существует при $\frac{x_5}{a_5} = \frac{x_6}{a_6} = \frac{x_7}{a_7}$, но при таком λ ранг равен 2;

150, 12457F: Решение существует при $\frac{x_5}{a_5} = \frac{x_6}{a_6} = \frac{x_7}{a_7}$, но при таком λ ранг равен 2;
152, 12357A: Существует пучок алгебраического типа 1 1 5 при $x_7 = a_7 = 0$;
153, 123457H: Существует пучок алгебраического типа 1 1 5 при $x_7 = a_7 = 0$;
154, 12357B: Существует пучок алгебраического типа 1 1 5 при $x_7 = a_7 = 0$.

Вычисления для первых пяти алгебр в этом списке получаются аналогичными Примеру 2, занимающему шестое место в приведенном выше списке. Вычисления для алгебры Ли с номером 150 аналогичны Примеру 3, а для последних двух алгебр Ли аналогичны Примеру 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolsinov A. V., Kozlov I. K. Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials // arXiv:1407.1878. 2014.

2. Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems // Regul. Chaotic Dyn. 2009. Vol. 14, №4-5. P. 431–454.

3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. // Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет». 1999. 444.

4. Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups. 2016. Vol. 21, №1. P. 51 - 86.

5. Weierstrass K. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen formen // Monatsh. Akad. Wiss., Berlin. 1867. P. 310–338.

6. Gelfand I. M., Zakharevich I. Webs, Veronese curves, and bi-Hamiltonian systems // J. Funct. Anal. 1991. Vol. 99, №1. P. 150–178.

7. Gelfand I. M., Zakharevich I. On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure// The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992, Birkh¨auser Boston, Boston, MA. 1993. P. 51–112.

8. Gelfand I. M., Zakharevich I. Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures // Selecta Math. 2000. New Series Vol. 6, №2. P. 131–183.

9. Gong M.-P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algibraically Closed Fields and R)// PhD thesis, University of Waterloo, Ontario. 1998.

10. Грознова А. Ю. Вычисление инвариантов Жордана — Кронекера для алгебр Ли малых размерностей // Дипломная работа, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Механико-Математический факультет. 2018.

11. Kronecker L. Algebraische reduction der schaaren bilinearer formen // S.-B. Akad., Berlin. 1890. P. 763–776.

12. Magnin L. Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7// J. Geom. Phys. 1986. Vol. 3, №1. P. 119–144.

13. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. 42:2. 396–415.

14. Ooms A. The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven// Journal of Algebra. 2012. №365. P. 83 - 113.

15. Thompson R. C. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices // Linear Algebra and its Appl. 1991. Vol. 147. P. 323–371.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V., Kozlov, I. K. 2014. "Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials", arXiv:1407.1878.

2. Bolsinov, A. V., Oshemkov, A. A. 2009. "Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems", *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 14, no. 4-5, pp. 431–454.

3. Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T. 1999. *Integriruemye gamil'tonovy sistemy. Geometriya, topologiya, klassifikaciya. Tom 1.* [Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, topology, classification. Vol. 1], Izhevsk : Izdatel'skij dom «Udmurtskij universitet». pp. 444.

4. Bolsinov, A. V., Zhang, P. 2016. "Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras", *Transformation Groups.*, vol. 21, no. 1, pp. 51 - 86.

5. Weierstrass, K. 1867. "Zur Theorie der bilinearen und quadratischen formen", *Monatsh. Akad. Wiss., Berlin.*, pp. 310–338.

6. Gelfand, I. M., Zakharevich, I. 1991. "Webs, Veronese curves, and bi-Hamiltonian systems", *J. Funct. Anal.*, vol. 99, no. 1, pp. 150–178.

7. Gelfand, I. M., Zakharevich, I. 1993. "On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure", *The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992, Birkh¨auser Boston, Boston, MA.*, pp. 51–112.

8. Gelfand, I. M., Zakharevich, I. 2000. "Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures", *Selecta Math.*, New Series vol. 6, no. 2, pp. 131–183.

9. Gong, M.-P. 1998. "Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algibraically Closed Fields and R,"), *PhD thesis, University of Waterloo, Ontario.*

10. Groznova, A. Yu. 2018. "Calculation of Jordan-Kronecker invariants for Lie algebras of small dimension", *Diploma work, Lomonosov Moscow State University, Moscow.*

11. Kronecker, L. 1890. "Algebraische reduction der schaaren bilinearer formen", *S.-B. Akad., Berlin.*, pp. 763–776.

12. Magnin, L. 1986. "Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7", *J. Geom. Phys.*, vol. 3, no. 1, pp. 119–144.

13. Mischenko, A. S., Fomenko, A. T. 1978. "Euler equations on finite-dimensional Lie groups", *Math. USSR–Izv.*, vol. 12, no. 2, pp. 371–389

14. Ooms, A. 2012. "The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven", *Journal of Algebra.*, no. 365, pp. 83 - 113.

15. Thompson, R. C. 1991. "Pencils of complex and real symmetric and skew matrices", *Linear Algebra and its Appl.*, vol. 147, pp. 323–371.

Получено 09.12.2021
Принято в печать 14.09.2022