ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 517.9, 514.7

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-133-146

Аналитическое вложение для геометрий постоянной кривизны

В. А. Кыров

Кыров Владимир Александрович — кандидат физико-математических наук, Горно-Алтайский государственный университет (г. Горно-Алтайск).

e-mail: kyrovVA@yandex.ru

Аннотация

В различных разделах современной математики и теоретической физики находят свое широкое применение геометрии постоянной кривизны. К числу таких геометрий относятся сферическая геометрия, геометрии Лобачевского, геометрия де Ситтера. n -мерные геометрии постоянной кривизны задаются метрическими функциями, которые являются инвариантами групп движений размерности $n(n+1)/2$, поэтому они являются геометриями локальной максимальной подвижности. В данной статье на примере геометрий постоянной кривизны решается задача вложения, суть которой состоит в нахождении $(n+1)$ -мерных геометрий локальной максимальной подвижности по n -мерным геометриям постоянной кривизны. Ищутся все функции пары точек вида $f(A, B) = \chi(g(A, B), w_A, w_B)$, задающие $(n+1)$ -мерные геометрии с группами движений размерности $(n+1)(n+2)/2$ по известным метрическим функциям $g(A, B)$ n -мерных геометрий постоянной кривизны. Эта задача сводится к решению функциональных уравнений специального вида в классе аналитических функций. Решение ищется в виде рядов Тейлора. Для упрощения анализа коэффициентов применяется пакет математических программ Maple 17. Результатами такого вложения n -мерных геометрий постоянной кривизны являются $(n+1)$ -мерные расширения евклидовых и псевдоевклидовых n -мерных пространств. Кроме основной теоремы, доказываются вспомогательные утверждения, имеющие самостоятельное значение.

Ключевые слова: метрическая функция, функциональное уравнение, геометрия постоянной кривизны, группа движений.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

В. А. Кыров. Аналитическое вложение для геометрий постоянной кривизны // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 133–146.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 517.9, 514.7

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-133-146

Analytical embedding for geometries of constant curvature

V. A. Kyrov

Kyrov Vladimir Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Gorno-Altai State University (Gorno-Altaiisk).

e-mail: kyrovVA@yandex.ru

Abstract

In various sections of modern mathematics and theoretical physics find their wide application of geometry of constant curvature. These geometries include spherical geometry, Lobachevsky geometry, de Sitter geometry. n -dimensional geometries of constant curvature are defined by metric functions that are invariants of motion groups of dimension $n(n+1)/2$, therefore they are geometries of local maximum mobility. In this article, by the example of geometries of constant curvature, the embedding problem is solved, the essence of which is to find $(n+1)$ -dimensional geometries of local maximum mobility from n -dimensional geometries of constant curvature. We search for all functions of a pair of points of the form $f(A, B) = \chi(g(A, B), w_A, w_B)$ that define $(n+1)$ -dimensional geometries with motion groups of dimension $(n+1)(n+2)/2$ by the well-known metric functions of $g(A, B)$ n -dimensional geometries of constant curvature. This problem reduces to solving functional equations of a special form in the class of analytic functions. The solution is sought in the form of Taylor series. To simplify the analysis of coefficients, the Maple 17 mathematical program package is used. The results of this embedding of n -dimensional geometries of constant curvature are $(n+1)$ -dimensional extensions of Euclidean and pseudo-Euclidean n -dimensional spaces. In addition to the main theorem, auxiliary statements of independent significance are proved.

Keywords: metric function, functional equation, geometry of constant curvature, group of motions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

V. A. Kurov, 2022, "Analytical embedding for geometries of constant curvature", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 133–146.

Введение

В современной математике хорошо известны геометрии постоянной ненулевой кривизны: сферическая геометрия, геометрия Лобачевского, геометрия де Ситтера и т.д. Метрические функции этих геометрий можно записать единым образом:

$$g(A, B) = \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2}{(\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon)(\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon)}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon = \pm 1$, n — размерность многообразия, A, B — точки этого многообразия, а $(x_A^1, \dots, x_A^n)$ и $(x_B^1, \dots, x_B^n)$ — их локальные координаты. Заметим, что если $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = -1$, $\varepsilon = -1$, то метрическая функция (1) задаёт сферическую геометрию, а если $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 1$, $\varepsilon = -1$ или $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = -1$, $\varepsilon = 1$ — геометрию Лобачевского. Отметим, что с помощью подходящей замены координат и некоторого преобразования метрической функции, от (1) переходим к новому выражению для метрической функции геометрии постоянной кривизны на псевдосфере (исключается случай $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon = \pm 1$):

$$l(A, B) = \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_{n-1}(x_A^{n-1} - x_B^{n-1})^2 + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2}{x_A^n x_B^n}. \quad (2)$$

Следует отметить, что для современной математики важны геометрии максимальной подвижности. Одна из классификаций таких геометрий построена Тёрстоном [1, 2]. Эта классификация содержит все трехмерные максимально односвязные геометрии, допускающие компактные фактор-геометрии. Отметим, что трехмерные геометрии постоянной кривизны содержатся в классификации Тёрстона.

Основная цель данной работы — решение задачи вложения для геометрии с метрической функцией (1), то есть нахождение на $(n+1)$ -мерном многообразии метрических функций вида:

$$f(A, B) = \chi(g(A, B), w_A, w_B),$$

где $(x_A^1, \dots, x_A^n, w_A)$ и $(x_B^1, \dots, x_B^n, w_B)$ — координаты точек A и B $(n+1)$ -мерного пространства, сохраняющих свой вид относительно групп преобразований размерности $(n+1)(n+2)/2$. Решение этой задачи сводится к аналитическому решению функционального уравнения специального вида:

$$2[p(A, B)] \frac{\partial \chi}{\partial g} + W(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + W(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} = 0,$$

где

$$p(A, B) = \left[\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} - \frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \dots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \dots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} \right] g,$$

$X_1, \dots, X_n, W, \chi$ — неизвестные, являющиеся аналитическими функциями. Неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора. Данный метод апробирован в работах [3] — [6], в которых аналитически решается задача вложения для евклидовых и псевдоевклидовых пространств [3] и [4], для пространств постоянной кривизны на псевдосфере, задаваемых метрической функции (2) [5] и для особого расширения евклидовых и псевдоевклидовых пространств [6].

Функциональные уравнения также применяются и при изучении связи одномерной геометрии локальной максимальной подвижности с алгебраическими системами [7], что приводит к решению особых функциональных уравнений:

$$\varphi(\varphi(x, z), \varphi(y, z)) = \varphi(x, y),$$

где φ — неизвестная. Отметим, что задача классификации геометрий локальной максимальной подвижности выросла из теории физических структур. Другой важной задачей этой теории является классификация и изучение феноменологически симметричных геометрий на двух множествах, которая применяет методы, также сводящиеся к решению специальных функциональных уравнений [8]. В последние годы активно изучается связь геометрий на двух множествах с алгебраическими системами, в частности, с обобщенными точно транзитивными группами и псевдоматричными группами [9, 10]. Изучение этой связи сводится к исследованию особого функционального уравнения, возникающего в алгебраических системах

$$\phi(x\phi(y^{-1}))y = \phi(\phi(x)\phi(y)),$$

дополненного условием

$$\phi(\phi(x)) = x,$$

где ϕ — неизвестная.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим $(n+1)$ -мерное аналитическое многообразие M , которое локально диффеоморфно прямому произведению n -мерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L , $n \geq 2$. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \rightarrow N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \rightarrow N$ и $\pi_2 : N \times L \rightarrow L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \rightarrow R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2 , и аналитическую функцию $\chi : R \times L \times L \rightarrow R$. Определим проекции $p_1 : M \times M \rightarrow M$ и $p_2 : M \times M \rightarrow M$, которые на точках действуют так: $p_1 : \langle A, B \rangle \mapsto A$ и $p_2 : \langle A, B \rangle \mapsto B$, где $\langle A, B \rangle$ — произвольная точка в $M \times M$. Построим функцию $f : M \times M \rightarrow R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h(p_1)), \pi_1(h(p_2))), \pi_2(h(p_1)), \pi_2(h(p_2))),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2 . Эта функция называется метрической или функцией пары точек. На точках

$$f(A, B) = \chi(g(\pi_1(h(p_1(\langle A, B \rangle))), \pi_1(h(p_2(\langle A, B \rangle))), \pi_2(h(p_1(\langle A, B \rangle))), \pi_2(h(p_2(\langle A, B \rangle))), \quad (3)$$

где A, B — произвольные две точки из M , причем $\langle A, B \rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $A', B' \in U$, $\langle A', B' \rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(A') \subset U$, $U(B') \subset U$ такие, что $\langle A, B \rangle \in S_f$, $\forall A \in U(A')$, $\forall B \in U(B')$. Из выше сказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \rightarrow V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим $(x^1, \dots, x^n)$, а координату в окрестности W — (w) . Тогда в локальных координатах функция (3) принимает следующий вид:

$$f = f(A, B) = \chi(\theta, w_A, w_B), \quad (4)$$

где $g(\pi_1(h(A)), \pi_1(h(B))) = \theta = \theta(x_A^1, \dots, x_A^n, x_B^1, \dots, x_B^n)$ — метрическая функция n -мерной геометрии постоянной кривизны:

$$\theta = \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2}{(\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon)(\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon)}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon = \pm 1$. $\pi_2(h(A)) = w_A$, $\pi_2(h(B)) = w_B$. Пусть выполняются аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \rightarrow R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (3) в произвольной точке из области определения справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_A} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \neq 0. \quad (6)$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \rightarrow U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

- 1). $\lambda(A, e) = A$, $e \in G$ — единица, $A \in U$;
- 2). $\lambda(\lambda(A, a), b) = \lambda(A, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $A \in U$;
- 3). Для любого $A \in U$ $\lambda(A, a) = A$, только если $a = e$.

Действие $\lambda_a : U \rightarrow U'$, определяемое произвольным элементом $a \in G$ (ограничение отображения λ по второму аргументу), называется *движением*, если для любых точек $A, B \in U$ таких, что $\langle A, B \rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(A), \lambda_a(B) \rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(A), \lambda_a(B)) = f(A, B).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(A)$ и $U(B)$ точек A и B , причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают ([11], §1). Множество всех так определенных движений образует аналитическую группу Ли движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G максимальная и равна $\dim G = (n+1)(n+2)/2$.

Основная задача этой работы — поиск всех функций вида (3), являющихся двухточечными инвариантами $(n+1)(n+2)/2$ -мерной группы движений.

где

$$p(A, B) = \left[\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} - \frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} \right] \theta. \quad (12)$$

Заметим, что выражение (11) выполняется тождественно по координатам точек A и B из некоторых окрестностей $U(A')$ и $U(B')$, причем $U(A') \cup U(B') \subset U$, где $U(k)$ — координатная окрестность. Ниже доказываются леммы из предположения принадлежности входящих в тождество (11) функций классу C^3 в $U(A') \times U(B')$.

ЛЕММА 1. *В некоторой окрестности $U(A') \times U(B')$ произвольной точки $\langle A', B' \rangle \in M \times M$, где $A', B' \in U$ для тождества (11) выполняется неравенство $p(A, B) \neq 0$, причём $A \in U(A')$ и $B \in U(B')$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть для произвольной точки $\langle A, B \rangle$ из $U(A') \times U(B')$ выполняется равенство

$$\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} - \frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} = 0. \quad (13)$$

Дифференцируя это равенство по переменной w_A и приводя к общему знаменателю, имеем:

$$(\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon)(\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)X'_{1w_A} + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)X'_{nw_A}) - (\varepsilon_1 x_A^1 X'_{1w_A} + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X'_{nw_A})(\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2) = 0.$$

Новое равенство дважды продифференцируем по x_B^1 , в результате получим

$$\varepsilon_1 x_A^1 X'_{1w_A} + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X'_{nw_A} = 0,$$

следовательно

$$\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)X'_{1w_A} + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)X'_{nw_A} = 0.$$

Далее последнее равенство дифференцируем по переменным $x_B^1, \dots, x_B^n$, в результате имеем $X'_{1w} = 0, \dots, X'_{nw} = 0$, то есть $X_m = X_m(x^1, \dots, x^n)$. Тогда выражение (12) превращается в функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений n -мерной геометрии локально максимальной подвижности с метрической функцией (5). Размерность этой группы движений $n(n+1)/2$. Тогда произвольный оператор линейно выражается через $n(n+1)/2$ базисных операторов.

Запишем теперь тождество (11) с учетом (13):

$$W(A) \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_A} + W(B) \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_B} = 0. \quad (14)$$

Пусть сначала $W = 0$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (4) является линейной комбинацией $n(n+1)/2$ базисных операторов, а должно быть $(n+1)(n+2)/2$. Противоречие.

Пусть теперь $W \neq 0$. Тогда от выражения (14) переходим к тождеству

$$\frac{W(A)}{W(B)} = \varphi(\theta, w_A, w_B), \quad (15)$$

для чего левую и правую части делим на произведение $W(B) \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_A}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, w_A, w_B) = -\frac{\partial f(A, B)}{\partial w_B} / \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_A} \neq 0$. Из тождества (15) вытекает $\varphi_\theta = 0$. Тогда $W'_{x^i} = 0, \forall i$ или $W = c(w) \neq 0$.

Подставляя найденное в (14), имеем

$$c(w_A) \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_A} + c(w_B) \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_B} = 0.$$

Вводим замену: $\int dw/c(w) = \bar{w}$. Тогда в новых координатах $W = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений $(n+1)$ -мерной геометрии локальной максимальной подвижности с метрической функцией (4) является линейной комбинацией $n(n+1)/2 + 1$ базисных операторов, которых должно быть $(n+1)(n+2)/2$. Противоречие. Лемма 1 доказана. $\square$

ЛЕММА 2. В некоторой окрестности $U(A') \times U(B')$ произвольной точки $\langle A', B' \rangle \in M \times M$, где $A', B' \in U$ для тождества (11) выполняется неравенство $W \neq 0$, причём $A \in U(A')$ и $B \in U(B')$.

ЛЕММА 3. В некоторой окрестности $U(A') \times U(B')$ произвольной точки $\langle A', B' \rangle \in M \times M$, где $A', B' \in U$ для тождества (11) справедливо неравенство:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^n} \right)^2 \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этой леммы индексы m, k, l, i, j, s принимают значения $1, \dots, n$.

Предположим противное, пусть для произвольной точки $\langle A, B \rangle$ из $U(A') \times U(B')$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^n} \right)^2 = 0,$$

поэтому $W = W(w) \neq 0$.

Тогда в (11) осуществляем замену координат: $\int dw/W(w) = \bar{w}$. Очевидно, в новых координатах $W(\bar{w}) = 1$. В результате (11) примет вид

$$2p(A, B) \frac{\partial f(A, B)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(A, B)}{\partial \bar{w}_A} + \frac{\partial f(A, B)}{\partial \bar{w}_B} = 0.$$

Деля последнее тождество на ненулевое выражение $2 \frac{\partial f(A, B)}{\partial \theta}$, получаем функциональное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} \\ & - \frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \dots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \dots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} = \end{aligned} \quad (16)$$

$$= \phi(\theta, \bar{w}_A, \bar{w}_B),$$

где введено обозначение

$$\phi(\theta, \bar{w}_A, \bar{w}_B) = -\frac{1}{2\theta} \left(\frac{\partial f(A, B)}{\partial \bar{w}_A} + \frac{\partial f(A, B)}{\partial \bar{w}_B} \right) / \frac{\partial f(A, B)}{\partial \theta},$$

причем по лемме 1 $\phi \neq 0$.

Дифференцируя (16) по $\bar{w}_A$, а результат по $\bar{w}_B$, получаем $\varphi_{\bar{w}_A \bar{w}_B} = 0$, следовательно $\phi(\theta, \bar{w}_A, \bar{w}_B) = \phi_1(\theta, \bar{w}_A) + \phi_2(\theta, \bar{w}_B) + \phi_3(\theta)$. Подставляя найденное в (16) и дифференцируя результат по $\bar{w}_A$ и по $\bar{w}_B$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)X'_{1\bar{w}_A} + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)X'_{n\bar{w}_A}}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} \\ & - \frac{\varepsilon_1 x_A^1 X'_{1\bar{w}_A} + \dots + \varepsilon_n x_A^n X'_{n\bar{w}_A}}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} = \phi_{1\bar{w}_A}(\theta, \bar{w}_A), \\ & \frac{\varepsilon_1(x_B^1 - x_A^1)X'_{1\bar{w}_B} + \dots + \varepsilon_n(x_B^n - x_A^n)X'_{n\bar{w}_B}}{\varepsilon_1(x_B^1 - x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_B^n - x_A^n)^2} \\ & - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X'_{1\bar{w}_B} + \dots + \varepsilon_n x_B^n X'_{n\bar{w}_B}}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} = \phi_{2\bar{w}_B}(\theta, \bar{w}_B). \end{aligned} \quad (17)$$

Во втором равенстве из (17) заменяя $B \rightarrow A$, получаем $\phi_{2\bar{w}_A}(\theta, \bar{w}_A) = \phi_{1\bar{w}_A}(\theta, \bar{w}_A)$. Вычитая в (17) из первого равенства второе и полагая $\bar{w}_A = \bar{w}_B = \bar{w}$, $Y_l(A) = Y_l(x_1^1, \dots, x_A^n, \bar{w}) = X'_{l\bar{w}}(A) = \partial X_l(x_1^1, \dots, x_A^n, \bar{w})/\partial \bar{w}$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(Y_1(A) - Y_1(B)) + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(Y_n(A) - Y_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} \\ & - \frac{\varepsilon_1 x_A^1 Y_1(A) + \dots + \varepsilon_n x_A^n Y_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 Y_1(B) + \dots + \varepsilon_n x_B^n Y_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Вводим сокращающие обозначения:

$$\vartheta = \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2, \psi = \frac{\varepsilon_1 x^1 Y_1 + \dots + \varepsilon_n x^n Y_n}{\varepsilon_1(x^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x^n)^2 + \varepsilon}.$$

Тогда уравнение (18) можно привести к виду

$$\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(Y_1(A) - Y_1(B)) + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(Y_n(A) - Y_n(B)) = (\psi(A) + \psi(B))\vartheta. \quad (19)$$

Далее дифференцируем (19) по x_A^l , а результат по x_B^k :

$$-\varepsilon_l Y_{lx_B^k} - \varepsilon_k Y_{kx_A^l} = -\psi_{x_A^l} 2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k) + \psi_{x_B^k} 2\varepsilon_l(x_A^l - x_B^l) - 2\varepsilon_l \delta_{kl}(\psi(A) + \psi(B)). \quad (20)$$

Дифференцируя последнее тождество по x_A^l , а результат по x_B^l , получаем при $k \neq l$ $\psi_{x^k x^l} = 0$, а при $k = l$ $\psi_{x^k x^k}(A) + \psi_{x^k x^k}(B) = 0$. Разделяя переменные, имеем $\psi_{x^k x^l} = 0$. Интегрируя последнее, получаем

$$\psi = a_1(\bar{w})x^1 + \dots + a_n(\bar{w})x^n + c(\bar{w}).$$

С учетом последнего, уравнение (20) принимает вид:

$$-\varepsilon_l Y_{lx_B^k} - \varepsilon_k Y_{kx_A^l} = -a_l(\bar{w})2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k) + a_k(\bar{w})2\varepsilon_l(x_A^l - x_B^l) - 2\varepsilon_l \delta_{kl}(\psi(A) + \psi(B)).$$

Разделяя переменные, получаем

$$Y_{kx^k} = 2a_1(\bar{w})x^1 + \dots + 2a_n(\bar{w})x^n + 2c(\bar{w}), Y_{kx^l} = 2a_l(\bar{w})x^k - 2\varepsilon_k \varepsilon_l a_k(\bar{w})x^l + a_{kl}(\bar{w}),$$

где $\varepsilon_k a_{kl}(\bar{w}) + \varepsilon_l a_{lk}(\bar{w}) = 0$, $k \neq l$. Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} Y_k &= -\varepsilon_k a_k(\bar{w})(\varepsilon_1(x^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x^n)^2) + \\ & 2x^k(a_1(\bar{w})x^1 + \dots + a_n(\bar{w})x^n + c(\bar{w})) + a_{kl}(\bar{w})x^l + b_k(\bar{w}). \end{aligned}$$

Теперь подставляя найденное в равенство

$$\frac{\varepsilon_1 x^1 Y_1 + \dots + \varepsilon_n x^n Y_n}{\varepsilon_1 (x^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x^n)^2 + \varepsilon} = a_1(\bar{w})x^1 + \dots + a_n(\bar{w})x^n + c(\bar{w}),$$

получим $c(\bar{w}) = 0$, $b_k(\bar{w}) = \varepsilon \varepsilon_k a_k(\bar{w})$. Поэтому

$$\begin{aligned} Y_k &= -\varepsilon_k a_k(\bar{w})(\varepsilon_1 (x^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x^n)^2) + \\ &2x^k (a_1(\bar{w})x^1 + \dots + a_n(\bar{w})x^n) + a_{kl}(\bar{w})x^l + \varepsilon \varepsilon_k a_k(\bar{w}), \\ \psi &= a_1(\bar{w})x^1 + \dots + a_n(\bar{w})x^n. \end{aligned}$$

Полученные выражения подставляя в (18), имеем

$$\varepsilon [a_1(\bar{w})(x_A^1 - x_B^1) + \dots + a_n(\bar{w})(x_A^n - x_B^n)] = 0,$$

следовательно $a_1(\bar{w}) = \dots = a_n(\bar{w}) = 0$. Тогда

$$Y_k = a_{kl}(\bar{w})x^l.$$

С этим выражением возвращаемся в (17):

$$\frac{\varepsilon_1 (x_A^1 - x_B^1)(a_{1l}(\bar{w})x_A^l) + \dots + \varepsilon_n (x_A^n - x_B^n)(a_{nl}(\bar{w})x_A^l)}{\varepsilon_1 (x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x_A^n - x_B^n)^2} = \phi_{1\bar{w}}(\theta, \bar{w})$$

или

$$\varepsilon_1 a_{1l}(\bar{w})x_A^l x_B^1 + \dots + \varepsilon_n a_{nl}(\bar{w})x_A^l x_B^n = \varepsilon_k a_{kl}(\bar{w})x_A^l x_B^k = -\vartheta \phi_{1\bar{w}}(\theta, \bar{w}).$$

Переобозначая точки A и B , имеем $\varepsilon_k a_{kl}(\bar{w})x_B^l x_A^k = \varepsilon_k a_{kl}(\bar{w})x_A^l x_B^k = -\vartheta \phi_{1\bar{w}}(\theta, \bar{w})$. Тогда $Y_k = 0$ и $\phi_1 = \phi_1(\theta)$. Аналогично $\phi_2 = \phi_2(\theta)$.

С учетом найденного функциональное уравнение (16) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon_1 (x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \dots + \varepsilon_n (x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1 (x_A^1 - x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x_A^n - x_B^n)^2} - \\ &\frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \dots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1 (x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \dots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1 (x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x_B^n)^2 + \varepsilon} = \phi(\theta) \neq 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $X_i = X_i(x^1, \dots, x^n)$.

Заметим, что доказательство леммы проводится в окрестности $U(k)$ точки k , причем система координат в этой окрестности выбрана так, чтобы $k(0, 0, \dots, 0)$. Точки A и B принадлежат этой окрестности. Будем считать эти точки достаточно близкими к k , то есть полагаем $\varepsilon_1 (x_A^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x_A^n)^2 = \varepsilon_1 (x_B^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x_B^n)^2 = 0$. Тогда уравнение (21) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 (x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \dots + \varepsilon_n (x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B)) = \\ &\varepsilon \vartheta (\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \dots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A) + \varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \dots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)) + \vartheta \phi(\vartheta), \end{aligned} \quad (22)$$

Решая это уравнение, найдем функцию $\phi(\vartheta)$, а затем с результатом вернемся в (21). Для удобства введем обозначения $\kappa(\vartheta) = \vartheta \phi(\vartheta)$, $P(A) = \varepsilon(\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \dots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A))$, $P(B) = \varepsilon(\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \dots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B))$.

Дифференцируем последнее равенство по x_A^k и по x_B^k :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_k (X_k(A) - X_k(B)) + \varepsilon_1 (x_A^1 - x_B^1) X'_{1x_A^k} + \dots + \varepsilon_n (x_A^n - x_B^n) X'_{nx_A^k} = \\ &= 2\varepsilon_k (x_A^k - x_B^k)(P(A) + P(B)) + \vartheta P'_{x_A^k} + 2\varepsilon_k (x_A^k - x_B^k) \kappa'_{\vartheta}, \\ &-\varepsilon_k (X_k(A) - X_k(B)) - \varepsilon_1 (x_A^1 - x_B^1) X'_{1x_B^k} - \dots - \varepsilon_n (x_A^n - x_B^n) X'_{nx_B^k} = \\ &= -2\varepsilon_k (x_A^k - x_B^k)(P(A) + P(B)) + \vartheta P'_{x_B^k} - 2\varepsilon_k (x_A^k - x_B^k) \kappa'_{\vartheta}. \end{aligned}$$

Далее складываем полученные равенства:

$$\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X'_{1x_A} - X'_{1x_B}) + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X'_{nx_A} - X'_{nx_B}) = \vartheta(P'_{x_A} + P'_{x_B}).$$

Это функциональное уравнение решая как (19), получаем

$$\begin{aligned} P'_{x^k} &= \varepsilon(\sum_m \varepsilon_m x^m X_m)'_{x^k} = a_1^k x^1 + \dots + a_n^k x^n + c^k, \\ X'_{mx^k} &= -\varepsilon_m a_m^k (\varepsilon_1 (x^1)^2 + \dots + \varepsilon_n (x^n)^2) + \\ &+ 2x^m (a_1^k x^1 + \dots + a_n^k x^n + c^k) + \sum_l a_{ml}^k x^l + b_m^k, \\ X''_{mx^k x^s} &= -2\varepsilon_m \varepsilon_s a_m^k x^s + 2\delta_{ms} (a_1^k x^1 + \dots + a_n^k x^n + c^k) + 2a_s^k x^m + a_{ms}^k, \\ X'''_{mx^k x^s x^q} &= -2\varepsilon_m \varepsilon_s a_m^k \delta_{sq} + 2\delta_{ms} a_q^k + 2a_s^k \delta_{mq}, \end{aligned} \quad (23)$$

причем $c^k, a_i^k, b_i^k, a_{ij}^k = \text{const}$, $\varepsilon_m a_{ml}^k + \varepsilon_l a_{lm}^k = 0$, $m \neq l$, δ_{ij} — симметричный символ Кронекера. Из равенств $X''_{mx^k x^s} = X''_{mx^s x^k}$, $X'''_{mx^k x^s x^m} = X'''_{mx^s x^k x^m}$ при условии $s \neq m$ вытекают дополнительные соотношения $a_s^k = a_k^s$, $a_{ms}^k = a_{mk}^s$.

Выше введенное обозначение для P продифференцируем три раза по x^k :

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon \sum_i \varepsilon_i x^i X_i, \quad P'_{x^k} = \varepsilon(\varepsilon_k X_k + \sum_i \varepsilon_i x^i X'_{ix^k}), \quad P''_{x^k x^k} = \varepsilon(2\varepsilon_k X'_{kx^k} + \sum_i \varepsilon_i x^i X''_{ix^k x^k}), \\ P'''_{x^k x^k x^k} &= \varepsilon(3\varepsilon_k X''_{kx^k x^k} + \sum_i \varepsilon_i x^i X'''_{ix^k x^k x^k}). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляем в последнее равенство системы (24) производные из (23):

$$0 = 6\varepsilon_k \left(\sum_i a_i^k x^i + c^k \right) - 2\varepsilon_k \sum_i a_i^k x^i + 4\varepsilon_k a_k^k x^k.$$

Из данного равенства, очевидно, следует $c^k = a_i^k = 0$. Далее идем в третье равенство системы (24):

$$0 = 2\varepsilon_k \left(\sum_i a_{ki}^k x^i + b_k^k \right) + \sum_i \varepsilon_i a_{ik}^k x^i.$$

Тогда $a_{ki}^k = b_k^k = 0$. Поэтому

$$X_m = 1/2 \sum_{k,l} a_{ml}^k x^l x^k + \sum_k b_m^k x^k + b_m, \quad P = \text{const}.$$

Потом с найденным возвращаемся в первое равенство из (24):

$$P = \varepsilon \left(1/2 \sum_{k,m,l} \varepsilon_m a_{ml}^k x^l x^k x^m + \sum_{k,m} \varepsilon_m b_m^k x^k x^m + \varepsilon_m b_m x^m \right) = \text{const}.$$

Значит $\varepsilon_m b_m^k + \varepsilon_k b_k^m = 0$, $b_m = 0$, $P = 0$, $\varepsilon_m a_{ml}^k + \varepsilon_l a_{lk}^m + \varepsilon_k a_{km}^l = 0$. Воспользовавшись выше доказанными равенствами $a_{kl}^m + a_{km}^l = 0$ и $\varepsilon_l a_{lk}^m + \varepsilon_k a_{kl}^m = 0$, получаем $a_{kl}^m = 0$. В итоге будем иметь

$$X_m = \sum_k b_m^k x^k, \quad P = \text{const}, \quad \varepsilon_m b_m^k + \varepsilon_k b_k^m = 0.$$

И, наконец, найденное подставляя в (22), имеем $\phi(\vartheta) = 0$. Возвращаясь к общей ситуации, идем в функциональное уравнение (16), в котором $\phi = 0$. Противоречие. Лемма 3 доказана. $\square$

Приступим теперь к доказательству теоремы.

Функциональное уравнение (11) удобно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \dots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B)) \\ - \vartheta(A, B)[\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \dots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)]/\vartheta(A) \\ - \vartheta(A, B)[\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \dots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)]/\vartheta(B) \\ + \vartheta(A)\vartheta(B)[F_1 W(A) + F_2 W(B)] = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\vartheta(A) &= \varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon, \quad \vartheta(B) = \varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon, \\ \vartheta(A, B) &= \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2, \quad \theta = \vartheta(A, B)/\vartheta(A)\vartheta(B),\end{aligned}$$

а также

$$F_1(\theta, w_A, w_B) = \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_A} / 2 \frac{\partial f(A, B)}{\partial \theta}, \quad F_2(\theta, w_A, w_B) = \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_B} / 2 \frac{\partial f(A, B)}{\partial \theta}. \quad (26)$$

Из аналитичности функции (4) и справедливости неравенств (6) в $U(A) \times U(B)$, следует аналитичность функций (26). Тогда имеем разложения в ряд Тейлора ([13], гл. 11):

$$\begin{aligned}F_1(\theta, w_A, w_B) &= f_1(w_A, w_B) + D_1(f_1)(w_A, w_B)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_1)(w_A, w_B)\theta^2 + \cdots \\ F_2(\theta, w_A, w_B) &= f_2(w_A, w_B) + D_1(f_2)(w_A, w_B)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_2)(w_A, w_B)\theta^2 + \cdots,\end{aligned} \quad (27)$$

где, например,

$$\begin{aligned}f_1(w_A, w_B) &= F_1(0, w_A, w_B), \quad D_1(f_1)(w_A, w_B) = \frac{\partial F_1(\theta, w_A, w_B)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}, \\ f_2(w_A, w_B) &= F_2(0, w_A, w_B), \quad D_1(f_2)(w_A, w_B) = \frac{\partial F_2(\theta, w_A, w_B)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}.\end{aligned}$$

Разложения (9) и (27) подставляем в тождество (25) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных $x_A^1, \dots, x_A^n, x_B^1, \dots, x_B^n$. Эта задача существенно упрощается с применением пакета программ MAPLE 17 ([15], гл. 8).

Из леммы 3 вытекает, что в последовательности

$$D_1(W)(w), D_2(W)(w), \dots, D_n(W)(w), D_{11}(W)(w), D_{12}(W)(w), \dots$$

есть хотя-бы один ненулевой член. Сравнивая тогда коэффициенты в (25), имеем

$$D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(W)(w_A) D_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(f_1)(w_A, w_B) = 0, \quad D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(W)(w_B) D_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(f_2)(w_A, w_B) = 0,$$

где $\alpha_k = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$, $\gamma_l = 1, 2, 3, 4, \dots$. Тогда

$$D_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(f_1)(w_A, w_B) = D_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(f_2)(w_A, w_B) = 0.$$

Поэтому система (27) принимает вид:

$$\begin{aligned}F_1(\theta, w_A, w_B) &= f_1(w_A, w_B) + D_1(f_1)(w_A, w_B)\theta, \\ F_2(\theta, w_A, w_B) &= f_2(w_A, w_B) + D_1(f_2)(w_A, w_B)\theta.\end{aligned}$$

Из сравнения коэффициентов, также получаем

$$\begin{aligned}f_1(w_A, w_B) &= 0, \quad D_1(f_1)(w_A, w_B) = 1/\psi(w_A), \\ f_2(w_A, w_B) &= 0, \quad D_1(f_2)(w_A, w_B) = 1/\psi(w_B).\end{aligned}$$

Подставляя найденное в (26), получаем систему дифференциальных уравнений

$$2\theta \frac{\partial f(A, B)}{\partial \theta} = \psi(w_A) \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_A}, \quad 2\theta \frac{\partial f(A, B)}{\partial \theta} = \psi(w_B) \frac{\partial f(A, B)}{\partial w_B},$$

решая которую, находим

$$f(A, B) = \chi(\ln |\theta| + \varphi(w_A) + \varphi(w_B)).$$

Вводя переобозначение координат $e^{\varphi(w)} / |\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2 + \varepsilon| \rightarrow e^{2w}$ и масштабное преобразование $f \rightarrow e^{\chi^{-1}(f)}$, получаем метрическую функцию (10). Теорема доказана. $\square$

Заключение

Выше поставленная задача об аналитическом вложении геометрий постоянной кривизны полностью решена. Её можно распространить на класс дифференцируемых функций из C^3 . Эта задача тогда сведётся к решению функционального уравнения (25), которое надо дифференцировать, а затем разделять переменные.

Благодарности

Выражаю искреннюю благодарность профессору Михайличенко Геннадию Григорьевичу за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thurston W.P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bulletin of the American Mathematical Society. 1982. Vol. 6, №3. P. 357–381. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0>
2. Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 6. С. 1248–1264.
3. Кыров В. А. Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 741–758. DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060>
4. Кыров В. А. Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Труды института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 167–181. DOI: [10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181)
5. Кыров В. А. Аналитическое вложение геометрий постоянной кривизны на псевдосферах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, № 3. С. 246–257. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257>
6. Кыров В. А. Вложение многомерных особых расширений псевдоевклидовых геометрий // Челяб. физ.-матем. журн. 2018. Т. 3, № 4. С. 408–420. DOI: [10.24411/2500-0101-2018-13403](https://doi.org/10.24411/2500-0101-2018-13403)
7. Михайличенко Г. Г., Малышев В. М. Феноменологическая симметрия и функциональные уравнения // Известия вузов. Математика. 2001. № 7. С. 77–79.
8. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.
9. Симонов А. А. Обобщение точно транзитивных групп // Известия РАН. Серия математическая. 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8214>
10. Симонов А. А. Псевдоматричные группы и физические структуры // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, № 1. С. 211–226.
11. Михайличенко Г. Г. Математические основы и результаты теории физических структур. – Горно-Алтайск: Горно-Алтайский государственный университет, 2016.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

13. Фиктенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1963.
14. Белько И. В. О вырожденных римановых метриках // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 5. С. 767–774.
15. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчётах. – М.: ДМС Пресс, 2014.

REFERENCES

1. Thurston, W.P. 1982, “Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 6, no. 3, pp. 357–381. DOI. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0>
2. Berdinsky, D. A., Taimanov, I. A. 2005, “Surfaces in three-dimensional Lie groups”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 46, no. 6, pp. 1005–1019. DOI. <https://doi.org/10.1007/s11202-005-0096-9>
3. Kyrov, V. A. 2018, “The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries”, *Siberian Electronic Mathematical Report*, vol. 15, pp. 741–758. (Russian) DOI. <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060>
4. Kyrov, V. A. 2017, “The analytical embedding method of Euclidean and pseudo-Euclidean geometries”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAN*, vol. 23, no. 2, pp. 167–181. (Russian) DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181
5. Kyrov, V. A. 2019, “Analytical embedding of geometries of constant curvature on the pseudosphere”, *Proceedings of Saratov University. New Series. Mathematics. Mechanics. Computer science*, vol. 19, no. 3, pp. 246–257. (Russian) DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257>
6. Kyrov, V. A. 2018, “Embedding of multidimensional singular extensions of pseudo-Euclidean geometries”, *Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal*, vol. 3, no. 4, pp. 408–420. (Russian) DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13403
7. Mikhailichenko, G. G., Malyshev, V. M. 2001, “Phenomenological symmetry and functional equations”, *Russian Mathematics*, vol. 45, no. 7, pp. 75–76.
8. Mikhailichenko, G. G. 1972, “The solution of functional equations in the theory of physical structures”, *Soviet Mathematics. Doklady*, vol. 13, pp. 1377–1380. DOI. <https://zbmath.org/?q=an:0268.50003>
9. Simonov, A. A. 2014, “On generalized sharply n -transitive groups”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 78, no. 6, pp. 1207–1231. DOI. <https://doi.org/10.1070/IM2014v078n06ABEH00272>
10. Simonov, A. A. 2015, “Pseudomatrix groups and physical structures”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 56, no. 1, pp. 177–190. DOI. <https://doi.org/10.1134/S0037446615010176>
11. Mikhailichenko, G. G. 2016, “Mathematical foundations and results of the theory of physical structures”, Gorno-Altai: Gorno-Altai State University. (Russian)
12. Ovsyannikov, L. V. 1978, “Group analysis of differential equations”, М.: Nauka. (Russian)
13. Fikhtengol'ts, G. M. 1963, “A course of differential and integral calculus. Vol. 2”, М.: Fizmatgiz. (Russian)

14. Bel'ko, I. V. 1975, "Degenerate Riemannian metrics", *Mathematical Notes*, vol. 18, no. 5, pp. 1046–1049. DOI. <https://doi.org/10.1007/BF01153574>
15. D'yakonov, V. P. 2014, "Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations)", М.: DMS Press. (Russian)

Получено 22.11.2021

Принято в печать 14.09.2022